

Билеты по курсу «Введение в численные методы» (2 –ой поток) (2015)

- Билет 1. Прямые методы решения СЛАУ. Метод Гаусса.
- Билет 2. Трехдиагональные системы линейных алгебраических уравнений. Метод прогонки.
- Билет 3. Обусловленность системы линейных алгебраических уравнений. Число обусловленности.
- Билет 4. Одношаговые итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений. Достаточные условия сходимости.
- Билет 5. Метод простой итерации.
- Билет 6. Метод Зейделя.
- Билет 7. Метод верхней релаксации.
- Билет 8. Интерполирование полиномами. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона.
- Билет 9. Погрешность интерполяционного полинома.
- Билет 10. Интерполирование с кратными узлами. Полиномы Эрмита
- Билет 11. Интерполирование сплайнами.
- Билет 12. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций.
- Билет 13. Квадратурные формулы Симпсона.
- Билет 14. Квадратурные формулы Гаусса.
- Билет 15. Сеточные функции. Разностная аппроксимация первой и второй производной.
- Билет 16. Метод Эйлера.
- Билет 17. Метод Рунге-Куты.
- Билет 18. Метод Адамса.
- Билет 19. Разностная аппроксимация краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка.
- Билет 20. Разностная задача на собственные значения.

Содержание

Глава 1 Численное решение систем линейных алгебраических уравнений.

Билет 1. Прямые методы решения СЛАУ. Метод Гаусса.

Постановка задачи численного решения СЛАУ.

§ 1. Прямые методы.

1. Правило Крамера

Формулы Крамера (без вывода). Оценка количества действий (с использованием формулы Стирлинга).

2. Метод Гаусса

Прямой ход, формулы прямого хода, получение треугольной матрицы. Обратный ход, формулы обратного хода. Оценка количества действий.

3. Метод Гаусса с выбором главного элемента

Оценка роста погрешности вычислений в процессе обратного хода. Выбор главного элемента, ограниченность погрешности.

4. Система с диагональным преобладанием

Определение, теорема о существовании и единственности решения системы с

диагональным преобладанием.

Билет 2. Трехдиагональные системы линейных алгебраических уравнений. Метод прогонки.

5. Системы с трехдиагональной матрицей. Метод прогонки.

Запись системы с трехдиагональной матрицей в виде системы «трехточечных» уравнений. Формулы метода прогонки – прямого и обратного хода. Теорема о корректности метода прогонки. Устойчивость метода прогонки.

Билет 3. Обусловленность системы линейных алгебраических уравнений. Число обусловленности.

§ 2. Обусловленность СЛАУ. Число обусловленности.

Непрерывная зависимость погрешности решения от погрешности правой части для системы с невырожденной матрицей. Определения абсолютной и относительной погрешности. Оценка относительной погрешности решения через относительную погрешность правой части. Определение числа обусловленности, роль числа обусловленности. Примеры.

Лемма об оценке числа обусловленности через собственные значения невырожденной матрицы. Лемма о числе обусловленности самосопряженной невырожденной матрицы.

Билет 4. Одношаговые итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений. Достаточные условия сходимости.

§ 3. Итерационные методы.

Постановка задачи .

1. Одношаговые итерационные методы. Сходимость.

Определение одношагового итерационного метода. Канонический вид. Определение сходимости, невязки. Лемма о связи погрешности решения и невязки для линейного одношагового метода. Свойства самосопряженных положительных операторов, лемма о положительности собственных значений, лемма об оценке (Ax, x) через собственные значения. Лемма об оценке (Ax, x) снизу для невырожденной матрицы.

2. Достаточные условия сходимости одношагового итерационного процесса.

Теорема Самарского.

Билет 5. Метод простой итерации.

3. Метод простой итерации.

Каноническая запись метода. Теорема о достаточном условии сходимости. Теорема о необходимом и достаточном условии сходимости (условие на оператор перехода). Оптимальное значение итерационного параметра.

Билет 6. Метод Зейделя.

4. Метод Зейделя.

Каноническая запись метода Зейделя. Теорема о сходимости метода Зейделя. Индексная запись метода. Теорема о сходимости при диагональном преобладании. Скорость сходимости.

Билет 7. Метод верхней релаксации.

5. Метод верхней релаксации.

Каноническая запись. Индексный вид. Теорема о достаточном условии сходимости.

Билет 8. Интерполирование полиномами. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона.

Глава 2 Интерполирование.

1. Постановка задачи.

Постановка задачи интерполяции . Чебышевская система функций.

2. Интерполирование полиномами

Постановка задачи, разрешимость задачи интерполирования полиномами.

3. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.

Построение общего вида интерполяционного многочлена в форме Лагранжа.

4. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.

Построение общего вида интерполяционного многочлена в форме Ньютона.

Билет 9. Погрешность интерполяционного полинома.

5. Погрешность интерполяции.

Теорема о погрешности интерполяции полиномом. Следствия (оценка погрешности, равномерная сходимость).

Билет 10. Интерполирование с кратными узлами. Полиномы Эрмита

6. Интерполяционный многочлен Эрмита.

Определение полинома Эрмита. Теорема о существовании и единственности полинома Эрмита. Оценка погрешности интерполяции полиномом Эрмита.

Билет 11. Интерполирование сплайнами.

7. Интерполирование сплайнами.

Определение кубического сплайна. Теорема о существовании и единственности кубического сплайна (сведение задачи построения кубического сплайна к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, существование и единственность решения).

Теоремы о сходимости и скорости сходимости (без доказательств).

Билет 12. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций.

Глава 3. Численное интегрирование

Постановка задачи численного интегрирования

§ 1. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона.

1. Метод прямоугольников

Квадратурные формулы прямоугольников. Оценка погрешности.

2. Метод трапеций

Квадратурные формулы трапеций. Оценка погрешности.

Билет 13. Квадратурные формулы Симпсона.

3. Метод Симпсона.

Квадратурные формулы парабол.

Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме (без вывода). Оценка погрешности.

Билет 14. Квадратурные формулы Гаусса.

§ 2. Квадратурные формулы Гаусса.

1. Постановка задачи.

2. Полиномы Лежандра.

Свойства полиномов Лежандра (четность, значения в точках 1 и -1, свойства корней, свойство ортогональности полиномов Лежандра).

3. Узлы и коэффициенты квадратуры Гаусса.

Способ построения узлов, способ вычисления коэффициентов.

4. Точность формулы Гаусса для полиномов степени $2n-1$.

Доказательство того, что построенная по указанным узлам и коэффициентам формулам есть формула Гаусса. Пример.

Глава 4. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений.

Билет 15. Сеточные функции. Разностная аппроксимация первой и второй производной.

§ 1. Сеточные функции, аппроксимация.

1. Постановка задачи.

2. Сетка, сеточные функции.

Определение сетки, сеточной функции. Пространство сеточных функций. Разностная схема. Погрешность решения разностной схемы, погрешность аппроксимации дифференциального оператора, погрешность аппроксимации правой части, сходимость, порядок сходимости и аппроксимации.

§ 2. Разностная аппроксимация первой и второй производной.

1. Первая производная.

Правая, левая и центральная производная. Погрешность аппроксимации.

2. Вторая производная.

Аппроксимация второй производной, погрешность аппроксимации.

Билет 16. Метод Эйлера.

§ 3. Численное решение задачи Коши.

1. Метод Эйлера

Формула явного метода Эйлера. Погрешность аппроксимации. Доказательство сходимости, оценка скорости сходимости.

Билет 17. Метод Рунге-Куты.

2. Метод Рунге-Кутты.

Однопараметрическая схема Рунге-Кутты второго порядка. Погрешность аппроксимации. Сходимость, скорость сходимости. Схема Рунге-Кутты четвертого порядка (без доказательства)

Билет 18. Метод Адамса.

3. Метод Адамса.

Построение общей формулы явного метода Адамса по m точкам. Погрешность аппроксимации для схемы с $m=1$.

Билет 19. Разностная аппроксимация краевой задачи для линейного

дифференциального уравнения второго порядка.

§ 4. Численное решение краевой задачи для ОДУ второго порядка.

1. Постановка задачи, разностная схема

Краевая задача. Разностная схема для ОДУ второго порядка. Сведение разностной схемы к системе с трехдиагональной матрицей. Диагональное преобладание. Применимость метода прогонки.

2. Аппроксимация и сходимость.

Погрешность аппроксимации разностной задачи. Доказательство сходимости, скорость сходимости.

Билет 20. Разностная задача на собственные значения.

3. Разностная задача на собственные значения.

Краевая задача на собственные значения для дифференциального уравнения второго порядка, собственные числа, собственные функции. Разностная задача, собственные значения и собственные функции.