Вопросы к главе 2.

1. Дать определения: а) матрицы с диагональным преобладанием, б) нормы матрицы, подчиненной данной норме вектора, в) числа обусловленности матрицы A.

2. Доказать свойства нормы матрицы: $\|Ax\| \leqslant \|A\|\,\|x\|$ для любого вектора x, $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$, $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.

3. Доказать, что $\|A\| \geqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} |\lambda_k|$.

4. Пусть норма матрицы подчинена среднеквадратичной норме вектора. Доказать, что для симметричной вещественной матрицы A выполнено равенство

$$\|A\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |\lambda_k| \,.$$

5. Доказать: если вещественная матрица A имеет обратную, то $A^{\mathrm{T}}A$ — симметричная положительно определенная матрица.

6. В чем состоит первый шаг метода последовательного исключения неизвестных?

7. Что называется ведущим элементом очередного шага исключения?

8. Что называется главным элементом очередного шага исключения?

9. Какой вид принимает матрица системы уравнений в результате прямого хода метода исключения Гаусса?

10. Сформулировать условие возможности применения метода последовательного исключения неизвестных.

11. Показать, что для решения системы уравнений $Ax = f$ с симметричной положительно определенной матрицей A можно применять метод последовательного исключения неизвестных.

12. Доказать для матриц второго и третьего порядка следующее утверждение. Если A — матрица со строгим диагональным преобладанием, то все ее угловые миноры отличны от нуля и, следовательно, можно применять метод последовательного исключения неизвестных.

13. Привести пример, показывающий, что нестрогое диагональное преобладание

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

не гарантирует существования обратной матрицы.

14. Найти число умножений, необходимых для вычисления всех компонент вектора $y = Ax$ по заданной квадратной матрице A порядка m и заданному вектору x.

15. Найти число умножений, необходимых для перемножения двух квадратных матриц порядка m.

16. Система $Ax = f$ с матрицей порядка m решается методом исключения Гаусса. Назовите порядок числа арифметических действий, необходимых для осуществления прямого и обратного хода метода исключения.

17. Можно ли решить систему уравнений

$$y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1} = -f_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1, \quad y_0 = y_1, \quad y_N = y_{N-1}$$

методом прогонки?

18. Записать и привести к каноническому виду итерационный метод Зейделя для системы уравнений $5x_1 + x_2 = f_1, \quad x_1 + 6x_2 = f_2$.

19. Сформулировать определение сходимости итерационного метода.

20. Дать определение расходимости итерационного метода.

Упражнения к главе 2.

1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 23 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 11 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

2. Решить ту же систему методом Гаусса с выбором главного элемента по строке.

3. Дана система уравнений

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ x + y &= 3. \end{aligned}$$

Записать метод простой итерации и выяснить, при каких значениях параметра τ он сходится. Задавая начальное приближение $x_0 = y_0 = 0$ и $\tau = 2/3$, построить две первые итерации.

4. Для той же системы построить две первые итерации по методу Зейделя.

5. Для той же системы построить две первые итерации по методу верхней релаксации с параметром $\omega = 1,5$.

6. Определить число обусловленности матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -0,01 \end{bmatrix}.$$

7. Определить число обусловленности матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 10^{-4} & 2 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

8. Решается краевая задача

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = -f_i, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, N-1, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2.$$

Выписать формулы прогонки, подсчитать число умножений и выяснить, устойчива ли прогонка.

9. Для системы уравнений из предыдущей задачи записать итерационный метод Якоби и доказать его сходимость.

10. Для той же системы уравнений записать итерационный метод Зейделя, привести к каноническому виду и указать способ его реализации.

Ответы и указания к вопросам главы 2.

10. Все угловые миноры матрицы системы отличны от нуля.

11. Согласно критерию Сильвестра, все угловые миноры такой матрицы положительны.

13. $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

14. m^2.

15. m^3.

16. Прямой ход требует $O(m^3)$ действий, обратный — $O(m^2)$.

17. Нет, так как решение системы определено с точностью до постоянной.

18. Пусть n — номер итерации. Покоординатная запись метода Зейделя: $5x_1^{n+1} + x_2^n = f_1$, $x_1^{n+1} + 6x_2^{n+1} = f_2$. Канонический вид

$$B(x^{n+1} - x^n)/\tau + Ax^n = f, \quad \tau = 1, \quad x^n = (x_1^n\ x_2^n)^{\mathrm{T}}, \quad f = (f_1\ f_2)^{\mathrm{T}},$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

19. Итерационный метод сходится, если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$ и любом начальном приближении x_0.

20. Итерационный метод расходится, если найдутся начальное приближение x_0, натуральное число N и постоянная $\alpha > 0$ такие, что $\|x_n - x\| \geqslant \alpha$ для всех $n \geqslant N$.

Ответы к упражнениям главы 2.

1. $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3.$

3. Сходится при $\tau < 3 - \sqrt{5}$.

4. Метод Зейделя имеет вид

$$\begin{gathered} 2x_{n+1} + y_n = 4 \\ x_{n+1} + y_{n+1} = 3 \end{gathered}$$

5. Метод верхней релаксации имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(\omega - 1) & \omega \\ 0 & \omega - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\omega \\ 3\omega \end{bmatrix}.$$

6. Число обусловленности примерно равно 200.

7. Нельзя определить, так как матрица вырождена.

8.

1. Прямая прогонка.

$$\alpha_{j+1} = \frac{1}{2 - \alpha_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1, \quad \alpha_1 = 0,$$

$$\beta_{j+1} = \frac{\beta_j + f_j}{2 - \alpha_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1, \quad \beta_1 = \mu_1.$$

2. Обратная прогонка.

$$y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = N-1, N-2, \ldots, 0,$$
$$y_N = \mu_2.$$

На одну точку приходится два деления и одно умножение, всего 3 действия. Всего $N-1$ точек, следовательно $3(N-1)$ действий. Условия устойчивости прогонки выполнены.

9. Метод Якоби

$$\begin{aligned} &y_{i-1}^n - 2y_i^{n+1} + y_{i+1}^n = -f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ &y_0^{n+1} = \mu_1, \quad y_N^{n+1} = \mu_2 \end{aligned}$$

Канонический вид

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = f,$$

где B — единичная матрица, $\tau = 0.5$ и

$$y_n = \left(y_1^n \; y_2^n \; \cdots \; y_{N-1}^n\right)^{\mathrm{T}}, \quad f = \left(f_1 + \mu_1, \; f_2, \; \cdots, \; f_{N-2}, \; f_{N-1} + \mu_2\right)^{\mathrm{T}},$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Матрица A является симметричной и положительно определенной. Ее собственные значения можно выписать в явном виде (см., например, [2, с. 39]):

$$\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Условие сходимости $E > 0.5\tau A$ будет выполнено, если потребовать положительности минимального собственного значения $\lambda_{\min}(P)$ матрицы $P = E - 0.25A$. Поскольку $\lambda_{\min}(P) = 1 - \cos^2(\pi/(2N)) > 0$, метод сходится.

10. Метод Зейделя

$$y_{i-1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i+1}^n = -f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad y_0^{n+1} = \mu_1, \quad y_N^{n+1} = \mu_2$$

Записанные уравнения решаются относительно y_i^{n+1} $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ последовательно, начиная с первого.

Канонический вид

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = f,$$

где $\tau = 1$,

$$y_n = (y_1^n \; y_2^n \; \cdots \; y_{N-1}^n)^{\mathrm{T}}, \quad f = (f_1 + \mu_1, \; f_2, \; \cdots, \; f_{N-2}, \; f_{N-1} + \mu_2)^{\mathrm{T}},$$

и

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Литература

Упражнения к главе 3
курса "Введение в численные методы"

1. Пояснить геометрический смысл интерполирования по двум и трем узлам.

2. Задано 3 узла: $x_0 = x-h, \quad x_1 = x, \quad x_2 = x+h$, где $h > 0$. Показать, что при $h \to 0$

$$f(x_0, x_1) = f'(x) + O(h), \quad f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f''(x)}{2} + O(h^2).$$

3. Построить интерполяционный многочлен второй степени для функции $f(x) = \cos x$ по ее значениям в точках $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/3$, $x_2 = \pi/2$. Вычислить его значение в точке $x = \pi/4$, найти погрешность и сравнить с теоретической оценкой.

4. Построить интерполяционный многочлен второй степени для функции $f(x) = \cos x$ по ее значениям в точках $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/3$. Вычислить его значение в точке $x = \pi/2$, найти погрешность и сравнить с теоретической оценкой.

5. Построить интерполяционный многочлен второй степени для функции $y = 1/(1+x^2)$ по ее значениям в точках $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$.

6. Построить интерполяционный многочлен второй степени для функции $y = 1/(1-x)$ по ее значениям в точках $x_0 = -1$, $x_1 = -0,5$, $x_2 = 0$. Вычислить его значение в точке $x = 0,5$, оценить погрешность.

7. Построить кубический сплайн для функции $f(x) = 1/(1+x)$ на сегменте $[0,\ 2]$ с узлами $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Вычислить значение сплайна в точке $x = 0,5$ и сравнить полученное число со значением функции.

8. Построить кубический сплайн для функции $f(x) = 1/(1-x)$ на сегменте $[-0,5,\ 0,5]$ с узлами $x_0 = -0,5$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0,5$. Вычислить значение сплайна и его производной в точке $x = 0,2$.

9. Для функции $f(x) \in C^{(2)}[x_0, x_1]$ построить интерполяционный многочлен по значениям $f(x_0)$, $f(x_1)$ и оценить максимальную на $[x_0, x_1]$ погрешность интерполирования.

10. Привести пример функции $f(x)$, для которой оценка погрешности из предыдущей задачи выполняется со знаком равенства.

11*. Выписать систему уравнений, определяющую кубический сплайн с условиями периодичности

$$s(a) = s(b), \quad s'(a) = s'(b), \quad s''(a) = s''(b).$$

12. Построить многочлен Эрмита по данным

$$f(x_0) = f_0, \quad f'(x_0) = f'_0, \quad f''(x_0) = f''_0$$

и найти выражение для остаточного члена.

13. Интерполяционный многочлен Эрмита построен по данным

$$f(x_0) = f_0, \quad f(x_1) = f_1, \quad f'(x_1) = f'_1 \quad f(x_2) = f_2.$$

Выписать выражение для остаточного члена.

14. В условиях предыдущей задачи оценить максимальную погрешность интерполирования на сегменте $[x_0, x_2]$, если $x_0 = -0,5h$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0,5h$.

Ответы к упражнениям главы 3.

1. Проведение прямой (параболы) через две (соответственно, три) заданные точки.

3.

$$L_2(x) = -\frac{3}{\pi^2}x^2 - \frac{1}{2\pi}x + 1, \quad L_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,6875, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,707,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - L_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,019, \quad |f(x) - L_2(x)| \leqslant 0,0269$$

4.

$$L_2(x) = -\frac{6(4\sqrt{2}-5)}{\pi^2}x^2 - \frac{6(23-16\sqrt{2})}{2\pi}x + 1, \quad L_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0.078,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - L_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.078, \quad |f(x) - L_2(x)| \leqslant 0,108.$$

5.

$$L_2(x) = -0,2x^2 - 0,3x + 1$$

6.

$$L_2(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{6}x + 1, \quad L_2\,(0,5) = 1,5, \quad f(0,5) = 2,0,$$

$f(0,5) - L_2\,(0,5) = 0,5.$

7.

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = -\frac{109}{324}x^3 + x^2 - \frac{377}{324}x + 1, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ s_2(x) = \frac{5}{324}x^3 - \frac{1}{18}x^2 - \frac{35}{324}x + \frac{35}{54}, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

$$f(0,5) = 0,667, \quad s(0,5) = 0,626, \quad f(0,5) - s(0,5) = 0,041.$$

Решение задачи 7. Исходим из общих формул. По заданным узлам $x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N$ находим шаги $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Затем решаем систему уравнений

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right),$$
$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad c_0 = f''(x_0), \quad c_N = f''(x_N).$$

Досчитываем коэффициенты

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, \quad b_i = \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i},$$
$$i = 1, 2, \dots, N.$$

На отрезке $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$ сплайн-функция определяется как

$$s_i(x) = f_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

В задаче 7 дано:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad N = 2, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

Отсюда находим

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f''(x_0) = 2, \quad f''(x_2) = \frac{2}{27}, \quad h_1 = h_2 = 1.$$

Для определения коэффициентов c_i получаем одно уравнение

$$h_1 c_0 + 2(h_1 + h_2)c_1 + h_2 c_2 = 6\left(\frac{f_2 - f_1}{h_2} - \frac{f_1 - f_0}{h_1}\right), \quad c_0 = 2, \quad c_2 = \frac{2}{27},$$

решая которое, получим $c_1 = -1/54$. Далее вычисляем

$$d_1 = \frac{c_1 - c_0}{h_1} = -\frac{109}{54}, \quad d_2 = \frac{c_2 - c_1}{h_2} = \frac{5}{54}$$

и находим коэффициенты

$$b_1 = \frac{h_1}{2}c_1 - \frac{h_1^2}{6}d_1 + \frac{f_1 - f_0}{h_i} = -\frac{14}{81}, \quad b_2 = \frac{h_2}{2}c_2 - \frac{h_2^2}{6}d_2 + \frac{f_2 - f_1}{h_2} = -\frac{47}{324}.$$

Отсюда после несложных вычислений получим приведенные в ответе выражения для сплайн-функций. Точка $x = 0,5$ принадлежит интервалу (x_0, x_1), поэтому значение сплайна в этой точке вычисляется по найденному выражению для функции $s_1(x)$.

8.

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = -\frac{20}{81}x^3 - \frac{2}{27}x^2 + \frac{56}{81}x + 1, \text{ если } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0, \\ s_2(x) = \frac{436}{81}x^3 - \frac{2}{27}x^2 + \frac{56}{81}x + 1, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$f(0,2) = \frac{5}{4}, \quad s(0,2) = \frac{3977}{3375}, \quad f(0,2) - s(0,2) = 0,072,$$

$$f'(0,2) = \frac{25}{16}, \quad s'(0,2) = \frac{2648}{2025}, \quad f'(0,2) - s'(0,2) = 0,255.$$

9.

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1),$$

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |L_1(x) - f(x)| \leqslant M_2 \frac{(x_1 - x_0)^2}{8},$$

где $M_2 = \max\limits_{x \in [x_0, x_1]} |f''(x)|$.

10. $f(x) = x^2$.

11.

$$h_i d_i = c_i - c_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad c_0 = c_N,$$

$$h_i c_i - \frac{h_i^2}{2}d_i = b_i - b_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad b_0 = b_N,$$

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2}c_i + \frac{h_i^3}{6}d_i = f_i - f_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Для коэффициентов c_i получаем систему

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad c_0 = c_N, \quad c_1 = c_{N+1}, \quad h_0 = h_N, \quad f_0 = f_N.$$

12.

$$H(x) = f_0 + (x - x_0)f' + \frac{(x - x_0)^2}{2}f'',$$

$$f(x) - H(x) = \frac{f'''(\xi)}{6}(x - x_0)^3.$$

13.

$$f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2).$$

14.

$$|f(x) - H_3(x)| \leqslant \frac{M_4 h^4}{24 \cdot 64} = \frac{M_4 h^4}{1536},$$

где M_4 — максимум модуля $f^{(4)}(x)$ на сегменте $[x_0, x_2]$.

Упражнения к главе 4
курса "Введение в численные методы"

1. С помощью квадратурной формулы Гаусса с тремя узлами вычислить интеграл $I = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$. Найти погрешность.

2. С помощью метода Симпсона вычислить с шагом $h = 1/4$ интеграл $I = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$. Найти погрешность. Дать априорную и апостериорную оценку точности.

3. С помощью метода трапеций вычислить с шагом $h = 1/4$ интеграл $I = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$. Найти априорную и апостериорную оценку точности.

4. С помощью квадратурной формулы Гаусса с двумя узлами вычислить интеграл $I = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$. Найти погрешность.

5. На отрезке $[a, b]$ введена неравномерная сетка

$$\omega_h = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b\}$$

с шагами $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, так что $\sum\limits_{i=1}^N h_i = b - a$. Построить на ω_h составные формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона и оценить их погрешности.

6. Пусть $f \in C^{(4)}[a, b]$. Доказать, что

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - hf(x_{i-1/2}) = \frac{h^3}{24} f''(x_i - 0,5h) + O(h^5),$$

где $h = x_i - x_{i-1}$.

7. Пусть $f \in C^{(4)}[a, b]$ и $f'(b) = f'(a)$. Доказать, что погрешность составной формулы прямоугольников, построенной на равномерной сетке с шагом h, является величиной $O(h^4)$.

Указание. Использовать результат предыдущей задачи и равенство

$$\sum_{i=1}^N f''(x_{i-1/2})h = \int\limits_a^b f''(x)dx + O(h^2).$$

8. Для $n = 4$ и $n = 5$ построить квадратурные формулы интерполяционного типа

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k)$$

в случае $\rho(x) \equiv 1$, $x_1 = a$, $x_n = b$ и равноотстоящих узлов. Указать наивысшую степень многочлена, для которого данная формула является точной.

9. Построить квадратурную формулу интерполяционного типа для вычисления интеграла

$$I = \int_0^\pi \sin(\omega x)f(x)dx,$$

полагая $\rho(x) = \sin(\omega x)$, $n = 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$, $x_2 = \pi$.

Ответы к упражнениям главы 4.

1. $I = 0,69314718, \quad I_h = 0,6931216, \quad I - I_h = 2.558 \cdot 10^{-5}$

2.

$$I_h = 0,693155, \quad I = 0,693147, \quad I_h - I = 8 \cdot 10^{-6}, \quad |\Psi| \leqslant 3,255 \cdot 10^{-5}$$

3. $I_h = 0,697,$, $I = 0,693$, $I_{h/2} = 0.694$. Априорная оценка точности $|\Psi| \leqslant 0,01$, апостериорная оценка точности $I - I_h = -0,003$. Реальная погрешность $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} - I_h = -0,004$.

4.

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = 0,6931, \quad I_h = 0,6923, \quad I - I_h = 8,4 \cdot 10^{-4}$$

5.

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1/2})h_i, \quad |\Psi| \leqslant \frac{M_2h^2(b-a)}{24},$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\hbar_i + 0,5(h_1f(a) + h_Nf(b)), \quad |\Psi| \leqslant \frac{M_2h^2(b-a)}{12},$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{6}\left(h_1f(a) + h_Nf(b) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\hbar_i + 4\sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1/2})h_i\right),$$

$$|\Psi| \leqslant \frac{M_4h^4(b-a)}{2880},$$

где $\hbar_i = 0,5(h_i + h_{i+1})$, $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, N-1$, $h = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} h_i$.

8. При $n = 4$ — формула "трех восьмых

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{8}\left(f(x_1) + 3f(x_2) + 3f(x_3) + f(x_4)\right).$$

Точна для любого многочлена не выше третьей степени. При $n = 5$ — квадратурная формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90}\left(7f(x_1) + 32f(x_2) + 12f(x_3) + 32f(x_4) + 7f(x_5)\right),$$

точная для любого многочлена не выше пятой степени.

9.

$$I \approx c_0f(x_0) + c_1f(x_1) + c_2f(x_2),$$

где

$$c_0 = \frac{\sin\pi\omega}{\pi\omega^2} + \frac{4\cos\pi\omega}{\pi^2\omega^3} + \frac{1}{\omega} - \frac{4}{\pi^2\omega^3},$$
$$c_1 = -\frac{4\sin\pi\omega}{\pi\omega^2} - \frac{8\cos\pi\omega}{\pi^2\omega^3} + \frac{8}{\pi^2\omega^3},$$
$$c_2 = \frac{3\sin\pi\omega}{\pi\omega^2} + \left(\frac{4}{\pi^2\omega^3} - \frac{1}{\omega}\right)\cos\pi\omega - \frac{4}{\pi^2\omega^3}.$$

Упражнения к главе 5
курса "Введение в численные методы"

1. Доказать, что при $\alpha \neq 0$ метод Рунге — Кутта

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = (1-\alpha) f(x_i, y_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, y_i)\right)$$

имеет второй порядок аппроксимации на решении уравнения

$$\frac{du}{dx} = f(x, u).$$

Указание. См. [1, с. 159].

2. Рассмотреть задачу Коши

$$u'(x) + xu^2 = 0, \quad u(1) = 1.$$

Сделать для нее один шаг по методу Рунге — Кутта с $\alpha = 0,5$. Сравнить результат с точным решением.

3. Рассмотреть задачу Коши

$$u'(x) + xu^2 = 0, \quad u(1) = 1.$$

Сделать для нее один шаг по методу Рунге — Кутта с $\alpha = 1$. Сравнить результат с точным решением.

4. Рассмотреть задачу Коши

$$u'(x) + (1 + x)u^3 = 0, \quad u(0) = 1.$$

Сделать для нее один шаг по методу Рунге — Кутта с $h = 0,05$ при $\alpha = 1$.

5. Рассмотреть задачу Коши

$$u'(x) + xu^2 = 0, \quad u(1) = 1.$$

Сделать для нее два шага по методу Рунге — Кутта с $h = 0,1$ при $\alpha = 1$.

6. Рассмотреть задачу Коши

$$u'(x) + \frac{x}{u+1} = 0, \quad u(1) = 0$$

Сделать для нее два шага по методу Рунге — Кутта с $h = 0,1$ при $\alpha = 1$.

7. Рассмотреть задачу Коши

$$u'(x) + xu = 0, \quad u(1) = 1.$$

Сделать для нее один шаг по методу Рунге — Кутта с $h = 0,1$ при $\alpha = 1$. Сравнить результат с точным решением.

8. Рассмотреть задачу Коши

$$u'(x) + (1 + x)u = 0, \quad u(0) = 1.$$

Сделать для нее три шага по методу Эйлера, найти погрешность решения.

9. Для уравнения

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad \lambda = \mathrm{const}$$

построить трехэтапный метод Рунге — Кутта третьего порядка точности и исключить промежуточные значения. Показать, что схема с исключенными промежуточными значениями имеет третий порядок аппроксимации.

10. Доказать, что для задачи

$$\frac{du}{dt} = u^2, \quad 0 < t < \frac{1}{u_0}, \quad u(0) = u_0 > 0$$

разностная схема

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = y_n y_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad y_0 = u_0 > 0$$

является точной, то есть $y_n = u(t_n)$ для всех $t \in (0, u_0^{-1})$.

Ответы к упражнениям главы 5.

2.

$$y(1 + h) = 1 - h + 0,5h^2 + 0,5h^3 - 0,5h^4,$$

$$u(1 + h) = \frac{2}{1 + (1 + h)^2}, \quad y(1 + h) - u(1 + h) \approx 0,5h^3.$$

3.

$$u(1+h)=\frac{2}{1+(1+h)^2},$$

$$y(1+h)=1-h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{4}-\frac{h^4}{8},\quad y(1+h)-u(1+h)\approx 0,25h^3$$

4.

$$u(h)=0,95238,\quad y(h)=0,95250,\quad y(h)-u(h)\approx 1,175\cdot 10^{-4}$$

5.

$$y(1+2h)=0,819,\quad u(1+2h)=0,820$$

6.

$$y(1+2h)=--0,249,\quad u(1+2h)=-0,252$$

7.

$$y(x_1)=0,90025,\quad u(x_1)=0.900325,\quad u(x_1)-y(x_1)=-7,5\cdot 10^{-5}$$

8.

$$y(3h)=1-3h+5h^3-h^4-2h^5,$$
$$u(3h)=1-3h+9h^3-\frac{27}{4}h^4-\frac{243}{20}h^5+O(h^6),$$
$$u(3h)-y(3h)=O(h^3)$$

9.

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}=\left(1+\frac{\tau\lambda}{2}+\frac{\tau^2\lambda^2}{6}\right)\lambda y_n.$$