С.И.Мухин, Н.В.Соснин, А.П.Фаворский

ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ НА ПУЛЬСОВУЮ ВОЛНУ

Препринт

МАКС ПРЕСС
МОСКВА
2004

УДК 519.63

С.И.Мухин, Н.В.Соснин, А.П.Фаворский

Линейный анализ влияния вязкого трения на пульсовую волну: Препринт. - М.: МАКС ПРЕСС, 2004. - 48с.

В работе в линейном приближении рассмотрено влияние вязкого трения на процесс распространения в эластичном сосуде пульсовых волн давления и скорости. Построены и исследованы приближенные аналитические и численные решения задачи Коши для уравнений гемодинамики с вязким трением.

E-mail: vmmus@cs.msu.su
Тел.: 939-21-95

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.

В §1 данной работы в линейном приближении проводится исследование влияния вязкости жидкости, проявляющейся в рамках используемой квазиодномерной модели в виде заданного параметрически в уравнении движения трения, на процесс распространения пульсовых волн давления и скорости.

В нелинейных квазиодномерных уравнениях гемодинамики, в которых присутствует слагаемое, описывающее вязкое трение, осуществлен переход к безразмерным переменным. При обезразмеривании выбраны характерные для кровообращения в сердечно-сосудистой системе человека значения размерных, масштабных величин времени сердечного цикла, скорости кровотока, среднего давления в артериальной части сосудистой системы, кинематической вязкости и плотности крови, площади поперечного сечения магистрального артериального сосуда. В результате такого обезразмеривания в уравнении движения появляется малый числовой параметр, входящий в слагаемое, описывающее вязкое трение.

В дальнейшем в работе ищется аналитическое решение задачи Коши для уравнений гемодинамики, записанных в безразмерных переменных. Для выяснения влияния трения на пульсовую волну используются начальные условия, имеющие вид однородного фонового давления и одинаковой фоновой скорости прокачки жидкости через длинный эластичный сосуд. В этот однородный фон внесены локальные конечные возмущения давления и скорости.

Получено приближенное аналитическое решение задачи Коши для уравнений гемодинамики. Использован метод возмущения по параметру. С помощью этого подхода получено приближенное, линейное по малому параметру аналитическое решение уравнений гемодинамики с вязким трением.

Приближенные аналитические решения сопоставлены с численными решениями, соответствующих задач для нелинейных уравнений гемодинамики. Для расчета численных решений использован программный комплекс CVSS. Показано удовлетворительное совпадение аналитических и численных решений.

Установлено, что влияние вязкого трения на течение жидкости в эластичном сосуде проявляется в основном в виде торможения фонового течения всей жидкости и уменьшении в течение времени амплитуды локального начального возмущения давления и скорости. Фоновое однородное давление вдоль сосуда мало чувствительно к появлению вязкого трения при рассмотренных значениях параметров самого сосуда и протекающей по нему жидкости.

В §2 построено с использованием метода Римана точное аналитическое решение задачи Коши для системы двух линейных неоднородных уравнений гиперболического типа с постоянными коэффициентами. Получено в линейном приближении по малому параметру аналитическое решение задачи Коши для ЛГДТ уравнений в постоянном гравитационном поле.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 04-01-00558).

§1. Задача Коши для уравнений гемодинамики с трением.

1. Постановка задачи для уравнений гемодинамики в безразмерных переменных. Рассмотрим один изолированный сосуд с тонкой эластичной стенкой. Пусть поперечный размер сосуда много меньше его длины. Жидкость, текущую по сосуду, будем считать несжимаемой и вязкой. Тогда, для математического описания течения жидкости по такому сосуду может быть использована система квазиодномерных уравнений гемодинамики [1]:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial SU}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U^2}{2}+\frac{P}{\rho}\right)=F_{TP}, \qquad S=S(P). \qquad (1)$$

Здесь: S - площадь поперечного сечения сосуда; $U(x,t)$ - скорость движения жидкости вдоль сосуда; $P(x,t)$ - давление в жидкости внутри сосуда; $\rho = const$ - плотность жидкости; x - независимая пространственная переменная, измеряемая вдоль оси сосуда; t - время, независимая переменная; F_{TP} - сила трения в жидкости, которая в случае течения Пуазейля равна $F_{TP}=-8\pi\nu U/S$, где ν - коэффициент кинематической вязкости.

Перейдем в системе уравнений (1) к безразмерным переменным. Для этого представим все входящие в уравнения (1) переменные в виде: $t=t_M t'$, $x=x_M x'$, $S=S_M S'$, $U=U_M U'$, $P=P_M P'$. Здесь t_M, x_M, S_M, U_M, P_M - масштабные множители, имеющие ту же размерность, что и исходные переменные, а t', x', S', U', P' - безразмерные переменные. Подставляя данное представление переменных в уравнения (1), предполагая выполненным соотношение $x_M=U_M t_M$ и без ограничения общности рассмотрения отбрасывая всюду далее штрихи у безразмерных переменных, получаем систему уравнений гемодинамики в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial SU}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial P}{\partial x}=-\varepsilon\frac{U}{S}, \qquad S=S(P). \qquad (2)$$

Здесь безразмерные параметры ρ_* и ε равны: $\rho_*=\dfrac{\rho U_M^2}{P_M}$, $\varepsilon=\dfrac{8\pi\nu t_M}{S_M}$.

Выберем в качестве масштабных множителей следующие величины:

- t_M =0,1 сек - характерный масштаб времени для процессов, протекающих в течение одного циклического сокращения сердца человека;
- U_M =20 см/сек - средняя величина линейной скорости крови в аорте человека;
- P_M =100 мм рт.ст. - среднее значение давления в артериальной части кровеносной системы человека;
- S_M =4 см² - среднее значение площади поперечного сечения аорты человека;
- ρ =1 г/см³ - приближенное значение плотности крови человека;
- ν =0,04 см²/сек - приближенное значение коэффициента кинематической вязкости крови человека.

При этом, безразмерные параметры ρ_* и ε имеют следующие числовые значения: ρ_*=0,003, ε =0,025.

Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений гемодинамики (2):

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial SU}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial P}{\partial x}=-\varepsilon\frac{U}{S},$$
$$S=S(P), \quad -\infty<x<+\infty, \qquad t>0, \tag{3}$$
$$U(x,0)=\bar{u}+\psi(x),\ P(x,0)=\bar{p}+\varphi(x), \ -\infty<x<+\infty.$$

Здесь $\bar{p}$, $\bar{u}$ - постоянные фоновые значения давления и скорости, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - малые начальные отклонения от фоновых значений давления и скорости, соответственно.

2. Решение задачи методом возмущения по параметру. В уравнении движения присутствует малый числовой параметр ε. Будем искать аналитическое решение задачи (3), используя метод возмущения по параметру [2]. Представим решение задачи (3) в виде разложения по степеням ε. В данной работе ограничимся линейным относительно ε и малых отклонений от фоновых значений видом функций P, U и S. Пусть

$$P(x,t)=\bar{p}+p(x,t)+\varepsilon\cdot p_1(x,t)+O(\varepsilon^2),$$
$$U(x,t)=\bar{u}+u(x,t)+\varepsilon\cdot u_1(x,t)+O(\varepsilon^2), \tag{4}$$
$$S=S(P)=\bar{s}+\bar{s}'_p\cdot p(x,t)+\varepsilon\cdot\bar{s}'_p\cdot p_1(x,t)+O(\varepsilon^2),$$

где $\bar{s}=S(\bar{p})$ и $\bar{s}'_p=\left.\frac{dS(p)}{dp}\right|_{p=\bar{p}}$.

Подставляя представление (4) в (3) и принимая во внимание только выражения линейные относительно ε и p, p_1, u, u_1, получаем соотношения:

$$\bar{s}'_p\frac{\partial p}{\partial t}+\bar{s}'_p\bar{u}\frac{\partial p}{\partial x}+\bar{s}\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon\left(\bar{s}'_p\frac{\partial p_1}{\partial t}+\bar{s}'_p\bar{u}\frac{\partial p_1}{\partial x}+\bar{s}\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)+O(\varepsilon^2)=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p}{\partial x}+\varepsilon\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{\bar{u}+u}{\bar{s}}-\frac{\bar{s}'_p\bar{u}}{\bar{s}^2}p\right)+O(\varepsilon^2)=0.$$

Из этих соотношений следует цепочка линейных задач Коши для функций $p(x,t)$, $u(x,t)$ и $p_1(x,t)$, $u_1(x,t)$.

Так, для функций $p(x,t)$ и $u(x,t)$ имеем задачу Коши для ЛГД уравнений [3]:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial p}{\partial x}+\rho_*\bar{c}^2\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p}{\partial x}=0, \qquad -\infty<x<+\infty, \qquad t>0, \tag{5}$$
$$p(x,0)=\varphi(x), \qquad u(x,0)=\psi(x), \qquad -\infty<x<+\infty,$$

где $\bar{c}^2=\frac{\bar{s}}{\rho_*\bar{s}'_p}$.

Решение задачи (5), как известно [3,4], имеет вид

$$p(x,t)=\rho_*\bar{c}\cdot\left(F^+(x-(\bar{u}+\bar{c})t)-F^-(x-(\bar{u}-\bar{c})t)\right),$$
$$u(x,t)=F^+(x-(\bar{u}+\bar{c})t)+F^-(x-(\bar{u}-\bar{c})t). \tag{6}$$

Здесь $F^-=-\frac{\varphi}{2\rho_*\bar{c}}+\frac{\psi}{2}$ и $F^+=\frac{\varphi}{2\rho_*\bar{c}}+\frac{\psi}{2}$.

Функции $p_1(x,t)$ и $u_1(x,t)$ являются решением также задачи Коши, но для неоднородных ЛГД уравнений

$$\frac{\partial p_1}{\partial t}+\bar{u}\,\frac{\partial p_1}{\partial x}+\rho_*\bar{c}^2\,\frac{\partial u_1}{\partial x}=0\,,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\bar{u}\,\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{1}{\rho_*}\,\frac{\partial p_1}{\partial x}=h(x,t)\,,\qquad -\infty<x<+\infty\,,\qquad t>0\,,\quad (7)$$

$$p_1(x,0)=0\,,\quad u_1(x,0)=0\,,\quad -\infty<x<+\infty\,,$$

где $h(x,t)=-\dfrac{\bar{u}+u(x,t)}{\bar{s}}+\dfrac{\bar{m}}{\rho_*\bar{c}\bar{s}}\cdot p(x,t)\,,\qquad \bar{m}=\dfrac{\bar{u}}{\bar{c}}$. а $p(x,t)$ и $u(x,t)$ определяются в соответствие с формулой (6).

Решением задачи (7), в соответствие с [3,4], являются функции

$$p_1(x,t)=\frac{\rho_*\bar{c}}{2}\int_0^t\Big(h\big(x-(\bar{u}+\bar{c})(t-\tau)\,,\tau\big)-h\big(x-(\bar{u}-\bar{c})(t-\tau)\,,\tau\big)\Big)d\tau\,,$$

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t\Big(h\big(x-(\bar{u}+\bar{c})(t-\tau)\,,\tau\big)+h\big(x-(\bar{u}-\bar{c})(t-\tau)\,,\tau\big)\Big)d\tau\,.$$

Подставляя в интегралы выражение для функции h, получим следующее представление для функций $p_1(x,t)$ и $u_1(x,t)$:

$$p_1(x,t)=\frac{\rho_*\bar{c}}{2\bar{s}}\big(I_2-I_1\big)+\frac{\rho_*\bar{c}\,\bar{m}}{2\bar{s}}\big(I_3-I_4\big),$$

$$u_1(x,t)=-\frac{\bar{u}}{\bar{s}}t-\frac{1}{2\bar{s}}\big(I_1+I_2\big)+\frac{\bar{m}}{2\bar{s}}\big(I_3+I_4\big).$$

Здесь использованы обозначения

$$I_1=\int_0^t u\big(x-(\bar{u}+\bar{c})(t-\tau)\,,\tau\big)d\tau\,,\qquad I_2=\int_0^t u\big(x-(\bar{u}-\bar{c})(t-\tau)\,,\tau\big)d\tau\,,$$

$$I_3=\frac{1}{\rho_*\bar{c}}\int_0^t p\big(x-(\bar{u}+\bar{c})(t-\tau),\tau\big)d\tau\,,\qquad I_4=\frac{1}{\rho_*\bar{c}}\int_0^t p\big(x-(\bar{u}-\bar{c})(t-\tau),\tau\big)d\tau\,.$$

Преобразуем выражения для интегралов I_1, I_2, I_3 и I_4, используя формулы (6). Для интеграла I_1 справедливы следующие преобразования:

$$I_1=\int_0^t u(x-(\bar{u}+\bar{c})(t-\tau)\,,\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_0^t\Big(F^+\big(x-(\bar{u}+\bar{c})t\big)+F^-\big(x-(\bar{u}+\bar{c})t+2\bar{c}\,\tau\big)\Big)d\tau=$$

$$=t\cdot F^+\big(x-(\bar{u}+\bar{c})t\big)+\int_0^t F^-\big(x-(\bar{u}+\bar{c})t+2\bar{c}\,\tau\big)d\tau=$$

={замена переменной интегрирования: $\alpha=x-(\bar{u}+\bar{c})t+2\bar{c}\,\tau$, $\dfrac{1}{2\bar{c}}\,d\alpha=d\tau$ }=

$$=t\cdot F^+\big(x-(\bar{u}+\bar{c})t\big)+\frac{1}{2\bar{c}}\int_{x-(\bar{u}+\bar{c})t}^{x-(\bar{u}-\bar{c})t}F^-(\alpha)d\alpha\,.$$

Аналогично преобразуется и выражение для интеграла I_2:

$$I_2=\int_0^t u(x-(\bar{u}-\bar{c})(t-\tau)\,,\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_0^t \Big(F^-\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)+F^+\big(x-(\bar u-\bar c)t-2\bar c\,\tau\big)\Big)d\tau=$$

$$=t\cdot F^-\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)+\int_0^t F^+\big(x-(\bar u-\bar c)t-2\bar c\,\tau\big)d\tau=$$

={замена переменной интегрирования: $\alpha=x-(\bar u-\bar c)t-2\bar c\,\tau$, $-\dfrac{1}{2\bar c}d\alpha=d\tau$ }=

$$=t\cdot F^-\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)+\frac{1}{2\bar c}\int_{x-(\bar u+\bar c)t}^{x-(\bar u-\bar c)t}F^+(\alpha)d\alpha\,.$$

Выполняя предыдущие преобразования и с интегралами I_3, I_4, получаем следующее

$$I_3=\frac{1}{\rho_*\bar c}\int_0^t p(x-(\bar u+\bar c)(t-\tau),\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_0^t \Big(F^+\big(x-(\bar u+\bar c)t\big)-F^-\big(x-(\bar u+\bar c)t+2\bar c\,\tau\big)\Big)d\tau=$$

$$=t\cdot F^+\big(x-(\bar u+\bar c)t\big)-\int_0^t F^-\big(x-(\bar u+\bar c)t+2\bar c\,\tau\big)d\tau=$$

$$=t\cdot F^+\big(x-(\bar u+\bar c)t\big)-\frac{1}{2\bar c}\int_{x-(\bar u+\bar c)t}^{x-(\bar u-\bar c)t}F^-(\alpha)d\alpha\,,$$

$$I_4=\frac{1}{\rho_*\bar c}\int_0^t p(x-(\bar u-\bar c)(t-\tau),\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_0^t \Big(F^+\big(x-(\bar u-\bar c)t-2\bar c\,\tau\big)-F^-\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)\Big)d\tau=$$

$$=-t\cdot F^-\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)+\int_0^t F^+\big(x-(\bar u-\bar c)t-2\bar c\,\tau\big)d\tau=$$

$$=-t\cdot F^-\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)+\frac{1}{2\bar c}\int_{x-(\bar u+\bar c)t}^{x-(\bar u-\bar c)t}F^+(\alpha)d\alpha\,.$$

Тогда для функций $p_1(x,t)$ и $u_1(x,t)$ имеем представление следующего вида

$$p_1(x,t)=\frac{\rho_*\bar c}{2\bar s}\big(I_2-I_1\big)+\frac{\rho_*\bar c\,\bar m}{2\bar s}\big(I_3-I_4\big)=$$

$$=-\frac{\rho_*\bar c}{2\bar s}t\Big(F^+\big(x-(\bar u+\bar c)t\big)-F^-\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)\Big)+\frac{\rho_*}{4\bar s}\int_{x-(\bar u+\bar c)t}^{x-(\bar u-\bar c)t}\Big(F^+(\alpha)-F^-(\alpha)\Big)d\alpha+$$

$$+\bar m\frac{\rho_*\bar c}{2\bar s}t\Big(F^+\big(x-(\bar u+\bar c)t\big)+F^-\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)\Big)-\bar m\frac{\rho_*}{4\bar s}\int_{x-(\bar u+\bar c)t}^{x-(\bar u-\bar c)t}\Big(F^+(\alpha)+F^-(\alpha)\Big)d\alpha=$$

$$=-\frac{t}{2\bar s}\cdot p(x,t)+\frac{\rho_*}{4\bar s}\int_{x-(\bar u+\bar c)t}^{x-(\bar u-\bar c)t}\Big(F^+(\alpha)-F^-(\alpha)\Big)d\alpha+$$

$$+\overline{m}\frac{\rho_*\overline{c}}{2\overline{s}}t\cdot u(x,t)-\overline{m}\frac{\rho_*}{4\overline{s}}\int\limits_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x-(\overline{u}-\overline{c})t}\left(F^+(\alpha)+F^-(\alpha)\right)d\alpha\,,$$

$$u_1(x,t)=-\frac{\overline{u}}{\overline{s}}t-\frac{1}{2\overline{s}}\left(I_1+I_2\right)+\frac{\overline{m}}{2\overline{s}}\left(I_3+I_4\right)=$$

$$=-\frac{\overline{u}}{\overline{s}}t-\frac{1}{2\overline{s}}t\left(F^+\left(x-(\overline{u}+\overline{c})t\right)+F^-\left(x-(\overline{u}-\overline{c})t\right)\right)-\frac{1}{4\overline{s}\overline{c}}\int\limits_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x-(\overline{u}-\overline{c})t}\left(F^+(\alpha)+F^-(\alpha)\right)d\alpha+$$

$$+\frac{\overline{m}}{2\overline{s}}t\left(F^+\left(x-(\overline{u}+\overline{c})t\right)-F^-\left(x-(\overline{u}-\overline{c})t\right)\right)+\frac{\overline{m}}{4\overline{s}\overline{c}}\int\limits_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x-(\overline{u}-\overline{c})t}\left(F^+(\alpha)-F^-(\alpha)\right)d\alpha=$$

$$=-\frac{\overline{u}}{\overline{s}}t-\frac{t}{2\overline{s}}\cdot u(x,t)-\frac{1}{4\overline{s}\overline{c}}\int\limits_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x-(\overline{u}-\overline{c})t}\left(F^+(\alpha)+F^-(\alpha)\right)d\alpha+$$

$$+\frac{\overline{m}}{2\overline{s}\rho_*\overline{c}}t\cdot p(x,t)+\frac{\overline{m}}{4\overline{s}\overline{c}}\int\limits_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x-(\overline{u}-\overline{c})t}\left(F^+(\alpha)-F^-(\alpha)\right)d\alpha\,.$$

Теперь воспользуемся тем, что $F^-=-\dfrac{\varphi}{2\rho_*\overline{c}}+\dfrac{\psi}{2}$ и $F^+=\dfrac{\varphi}{2\rho_*\overline{c}}+\dfrac{\psi}{2}$. В результате получаем, что решением задачи (7) являются функции

$$p_1(x,t)=-\frac{t}{2\overline{s}}\cdot p(x,t)+\frac{1}{4\overline{s}\overline{c}}\int\limits_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x-(\overline{u}-\overline{c})t}\varphi(\alpha)d\alpha+\overline{m}\frac{\rho_*\overline{c}}{2\overline{s}}t\cdot u(x,t)-\overline{m}\frac{\rho_*}{4\overline{s}}\int\limits_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x-(\overline{u}-\overline{c})t}\psi(\alpha)d\alpha\,,$$

$$u_1(x,t)=-\frac{\overline{u}}{\overline{s}}t-\frac{t}{2\overline{s}}\cdot u(x,t)-\frac{1}{4\overline{s}\overline{c}}\int\limits_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x-(\overline{u}-\overline{c})t}\psi(\alpha)d\alpha+$$

$$+\frac{\overline{m}}{2\overline{s}\rho_*\overline{c}}t\cdot p(x,t)+\frac{\overline{m}}{4\overline{s}\rho_*\overline{c}^2}\int\limits_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x-(\overline{u}-\overline{c})t}\varphi(\alpha)d\alpha\,. \qquad (8)$$

Используя найденные выражения для функций $p(x,t)$, $u(x,t)$ (5) и $p_1(x,t)$, $u_1(x,t)$ (8), можем записать соотношения (4), определяющие приближенное решение исходной задачи (3), в следующем виде

$$P(x,t)=\overline{p}+\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\overline{s}}\right)\cdot p(x,t)+\frac{\varepsilon}{4\overline{s}\overline{c}}\cdot\int\limits_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x-(\overline{u}-\overline{c})t}\varphi(\alpha)d\alpha+$$

$$+\varepsilon\cdot\overline{m}\cdot\rho_*\overline{c}\cdot\left(\frac{t}{2\overline{s}}\cdot u(x,t)-\frac{1}{4\overline{s}\overline{c}}\cdot\int\limits_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x-(\overline{u}-\overline{c})t}\psi(\alpha)d\alpha\right)+O(\varepsilon^2)\,,$$

$$U(x,t)=\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{\overline{s}}\right)\cdot\overline{u}+\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\overline{s}}\right)\cdot u(x,t)-\frac{\varepsilon}{4\overline{s}\overline{c}}\cdot\int\limits_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x-(\overline{u}-\overline{c})t}\psi(\alpha)d\alpha+$$

$$+\varepsilon\cdot\overline{m}\cdot\frac{1}{\rho_*\overline{c}}\cdot\left(\frac{t}{2\overline{s}}\cdot p(x,t)+\frac{1}{4\overline{s}\overline{c}}\cdot\int\limits_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x-(\overline{u}-\overline{c})t}\varphi(\alpha)d\alpha\right)+O(\varepsilon^2)\,, \qquad (9)$$

где

$$p(x,t)=\frac{\varphi\left(x-(\overline{u}+\overline{c})t\right)+\varphi\left(x-(\overline{u}-\overline{c})t\right)}{2}+\rho_*\overline{c}\cdot\frac{\psi\left(x-(\overline{u}+\overline{c})t\right)-\psi\left(x-(\overline{u}-\overline{c})t\right)}{2}\,,$$

$$u(x,t)=\frac{\varphi\big(x-(\bar u+\bar c)t\big)-\varphi\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)}{2\rho_*\bar c}+\frac{\psi\big(x-(\bar u+\bar c)t\big)+\psi\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)}{2}.$$

Заметим, что как показано в §2 для функций $P(x,t)$ и $U(x,t)$ предпочтительна следующая форма записи

$$P(x,t)=\bar p+\exp\left(-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\bar s}\right)\cdot p(x,t)+\frac{\varepsilon}{4\bar s\bar c}\cdot\int\limits_{x-(\bar u+\bar c)t}^{x-(\bar u-\bar c)t}\varphi(\alpha)d\alpha+$$

$$+\varepsilon\cdot\bar m\cdot\rho_*\bar c\cdot\left(\frac{t}{2\bar s}\cdot u(x,t)-\frac{1}{4\bar s\bar c}\cdot\int\limits_{x-(\bar u+\bar c)t}^{x-(\bar u-\bar c)t}\psi(\alpha)d\alpha\right)+O(\varepsilon^2),$$

$$U(x,t)=\left(\exp\left(-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\bar s}\right)-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\bar s}\right)\cdot\bar u+\exp\left(-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\bar s}\right)\cdot u(x,t)-\frac{\varepsilon}{4\bar s\bar c}\cdot\int\limits_{x-(\bar u+\bar c)t}^{x-(\bar u-\bar c)t}\psi(\alpha)d\alpha+$$

$$+\varepsilon\cdot\bar m\cdot\frac{1}{\rho_*\bar c}\cdot\left(\frac{t}{2\bar s}\cdot p(x,t)+\frac{1}{4\bar s\bar c}\cdot\int\limits_{x-(\bar u+\bar c)t}^{x-(\bar u-\bar c)t}\varphi(\alpha)d\alpha\right)+O(\varepsilon^2).\quad(9')$$

В формулах $(9')$ учтено, что $1-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\bar s}+\underline{O}(\varepsilon^2)=\exp\left(-\varepsilon\frac{t}{2\bar s}\right)$ и $1-\varepsilon\frac{t}{\bar s}+\underline{O}(\varepsilon^2)=\exp\left(-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\bar s}\right)-\varepsilon\frac{t}{2\bar s}$.

Содержательна также и несколько другая форма записи полученного решения задачи (3). Изменим обозначения в начальных условиях задачи (3). Пусть $U(x,0)=U_0(x)=\bar u+\psi(x)$ и $P(x,0)=P_0(x)=\bar p+\varphi(x)$. В этом случае формулы (9) принимают вид

$$P(x,t)=\left(\frac{P_0\big(x-(\bar u+\bar c)t\big)+P_0\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)}{2}+\right.$$

$$\left.+\rho_*\bar c\cdot\frac{U_0\big(x-(\bar u+\bar c)t\big)-U_0\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)}{2}\right)\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\bar s}\right)+\frac{\varepsilon}{4\bar s\bar c}\cdot\int\limits_{x-(\bar u+\bar c)t}^{x-(\bar u-\bar c)t}P_0(\alpha)d\alpha+$$

$$+\varepsilon\bar m\frac{t}{2\bar s}\cdot\left(\frac{P_0\big(x-(\bar u+\bar c)t\big)-P_0\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)}{2}+\right.$$

$$\left.+\rho_*\bar c\cdot\frac{U_0\big(x-(\bar u+\bar c)t\big)+U_0\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)}{2}\right)-\varepsilon\bar m\frac{\rho_*}{4\bar s}\cdot\int\limits_{x-(\bar u+\bar c)t}^{x-(\bar u-\bar c)t}U_0(\alpha)d\alpha+O(\varepsilon^2),$$

$$U(x,t)=\left(\frac{P_0\big(x-(\bar u+\bar c)t\big)-P_0\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)}{2\rho_*\bar c}+\right.$$

$$\left.+\frac{U_0\big(x-(\bar u+\bar c)t\big)+U_0\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)}{2}\right)\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\bar s}\right)-\frac{\varepsilon}{4\bar s\bar c}\cdot\int\limits_{x-(\bar u+\bar c)t}^{x-(\bar u-\bar c)t}U_0(\alpha)d\alpha+$$

$$+\varepsilon\bar m\frac{t}{2\bar s}\cdot\left(\frac{P_0\big(x-(\bar u+\bar c)t\big)+P_0\big(x-(\bar u-\bar c)t\big)}{2\rho_*\bar c}+\right.$$

$$+\frac{U_0\big(x-(\overline{u}+\overline{c})t\big)-U_0\big(x-(\overline{u}-\overline{c})t\big)}{2}\Bigg)+\varepsilon\,\overline{m}\,\frac{1}{4\overline{s}\,\rho_*\overline{c}^{\,2}}\cdot\int\limits_{x-(\overline{u}+\overline{c})\,t}^{x-(\overline{u}-\overline{c})\,t}P_0(\alpha)\,d\alpha-$$

$$-\,\varepsilon\,\overline{m}\,\frac{\overline{p}}{\overline{s}\,\rho_*\overline{c}}\cdot t+O(\varepsilon^2)\,. \qquad (10)$$

В соответствии с $(9')$, изменение в e раз амплитуды пульсовой волны происходит за время $T=\dfrac{2\overline{s}}{\varepsilon}$. В случае выбранных в данной работе масштабных множителей, имеем $\overline{s}=1$ и $\varepsilon=0{,}025$. Поэтому $T=80$ в безразмерных единицах. Возвращаясь к размерным переменным, имеем $T=8c$. Значение T примерно в 10 раз больше характерного времени прохождения пульсовой волной по всей сердечно-сосудистой системе в двух направлениях.

3. Линеаризованные уравнения гемодинамики с трением (ЛГДТ уравнения). Соотношения (4), использованные в данном параграфе, соответствуют представлению функций P, U и S в виде комбинаций некоторых постоянных средних значений, на которые накладываются малые переменные возмущения:

$$P(x,t)=\overline{p}+\widetilde{p}(x,t)\,,\qquad U(x,t)=\overline{u}+\widetilde{u}(x,t)\,,$$

$$S=S(P)=\overline{s}+\widetilde{s}(x,t)\cong\overline{s}+\overline{s}'_p\cdot\widetilde{p}(x,t)\,,$$

где $\overline{s}=S(\overline{p})$ и $\overline{s}'_p=\dfrac{dS(p)}{dp}\Big|_{p=\overline{p}}$.

Подставляя данное представление в (3) и принимая во внимание только выражения линейные относительно $\widetilde{p}$ и $\widetilde{u}$, получаем систему из двух линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial t}+\overline{u}\,\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x}+\rho_*\overline{c}^{\,2}\,\frac{\partial U}{\partial x}=0\,,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\overline{u}\,\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{\rho_*}\,\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial x}+\varepsilon\frac{U}{\overline{s}}-\varepsilon\frac{\overline{m}}{\rho_*\overline{c}\,\overline{s}}\,\widetilde{p}=0\,. \qquad (3')$$

Уравнения замыкаются начальными условиями $U(x\,,0)=\overline{u}+\psi(x)$,

$$\widetilde{p}(x,0)=\varphi(x)\,,\qquad -\infty<x<+\infty\,.$$

Эту систему уравнений для функций $\widetilde{p}(x,t)$ и $U(x\,,t)$ будем называть линеаризованными уравнениями гемодинамики с вязким трением (ЛГДТ уравнения).

Заметим, что уравнения $(3')$ выполнены с точностью до величин порядка ε^2 для функций $\widetilde{p}(x,t)=p(x,t)+\varepsilon\cdot p_1(x,t)$, $\quad U(x,t)=\overline{u}+u(x,t)+\varepsilon\cdot u_1(x,t)$. Здесь функции $p(x,t)$, $u(x,t)$ и $p_1(x,t)$, $u_1(x,t)$ определены формулами (6) и (8). Действительно, выполнив подстановку таких $\widetilde{p}(x\,,t)$ и $U(x\,,t)$ в уравнения $(3')$ получаем, что первое из этих уравнений выполнено точно, а второе уравнение выполнено с точностью до величин пропорциональных ε^2.

4. Эволюция пульсовой волны, распространяющейся по направлению координатной оси. В качестве иллюстрации использования полученного решения задачи (3), определяемого формулами (9) и (10), рассмотрим несколько частных случаев начальных условий в задаче (3). Все они соответствуют пульсовой волне, распространяющейся по направлению оси x.

Итак, пусть функции $P_0(x)$ и $U_0(x)$, определяющие вид начальных условий задачи (3), связаны соотношением $U_0(x) = \dfrac{1}{\rho_* \bar{c}} P_0(x)$. В этом случае формулы (10) принимают вид:

$$P(x,t) = P_0\big(x-(\bar{u}+\bar{c})t\big)\cdot\left(1-\varepsilon\frac{1-\bar{m}}{2\bar{s}}t\right)+\varepsilon\frac{1-\bar{m}}{4\bar{s}\bar{c}}\cdot\int\limits_{x-(\bar{u}+\bar{c})t}^{x-(\bar{u}-\bar{c})t} P_0(\alpha)\,d\alpha + O(\varepsilon^2), \qquad (11)$$

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho_*\bar{c}}\left(P_0\big(x-(\bar{u}+\bar{c})t\big)\cdot\left(1-\varepsilon\frac{1-\bar{m}}{2\bar{s}}t\right)-\varepsilon\frac{1-\bar{m}}{4\bar{s}\bar{c}}\int\limits_{x-(\bar{u}+\bar{c})t}^{x-(\bar{u}-\bar{c})t} P_0(\alpha)\,d\alpha-\frac{\varepsilon\overline{mp}}{\bar{s}}t\right)+O(\varepsilon^2)$$

Напомним, что начальный профиль давления $P_0(x)$ складывается из фонового постоянного давления $\bar{p}$ и малого отклонения от фонового значения, задаваемого функцией $\varphi(x)$, то есть $P_0(x) = \bar{p} + \varphi(x)$. С учетом этого формулы (11) преобразуются к виду:

$$P(x,t) = \bar{p}+\varphi\big(x-(\bar{u}+\bar{c})t\big)\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{1-\bar{m}}{2\bar{s}}\cdot t\right)+\varepsilon\cdot\frac{1-\bar{m}}{4\bar{s}\bar{c}}\cdot\int\limits_{x-(\bar{u}+\bar{c})t}^{x-(\bar{u}-\bar{c})t}\varphi(\alpha)\,d\alpha+O(\varepsilon^2),$$

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho_*\bar{c}}\cdot\left(\bar{p}\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{\bar{s}}\right)+\varphi\big(x-(\bar{u}+\bar{c})t\big)\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{1-\bar{m}}{2\bar{s}}\cdot t\right)-\right.$$
$$\left.-\varepsilon\cdot\frac{1-\bar{m}}{4\bar{s}\bar{c}}\cdot\int\limits_{x-(\bar{u}+\bar{c})t}^{x-(\bar{u}-\bar{c})t}\varphi(\alpha)\,d\alpha\right)+O(\varepsilon^2). \qquad (12)$$

Получим формулы, описывающие эволюцию малого отклонения от фонового давления в случае, когда это отклонение локализовано на конечном отрезке, что соответствует рассмотрению пульсовой волны конечной протяженности. В дальнейшем считаем, что $\varphi(x) = 0$ при $-\infty < x < x_0$, $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ при $x_0 \le x \le x_0 + \ell$ и $\varphi(x) = 0$ при $x_0 + \ell < x < +\infty$ (Рис.1).

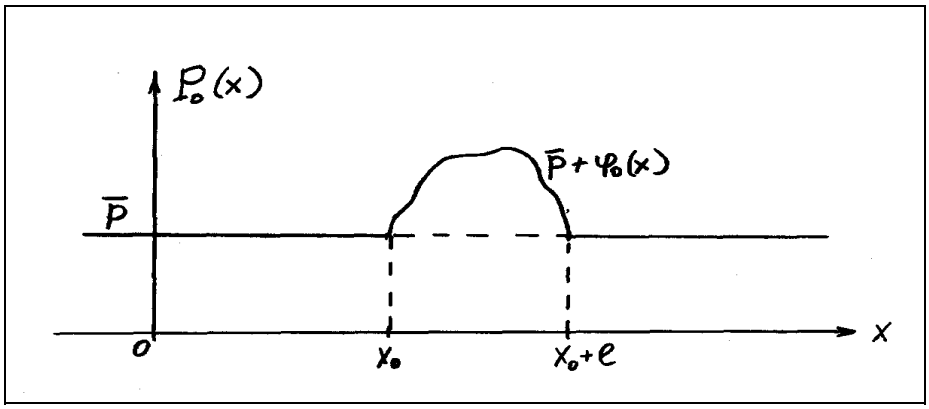


Рис. 1

Здесь x_0 - координата левой границы отрезка локализации начального возмущения фонового давления, а ℓ - длина отрезка, на котором задано начальное возмущение фонового давления. Введем обозначение $\overline{\varphi} = \frac{1}{\ell}\int\limits_{x_0}^{x_0+\ell} \varphi_0(x)\,dx$. В дальнейшем удобно воспользоваться вспомогательными построениями в плоскости двух независимых переменных x и t (Рис.2).

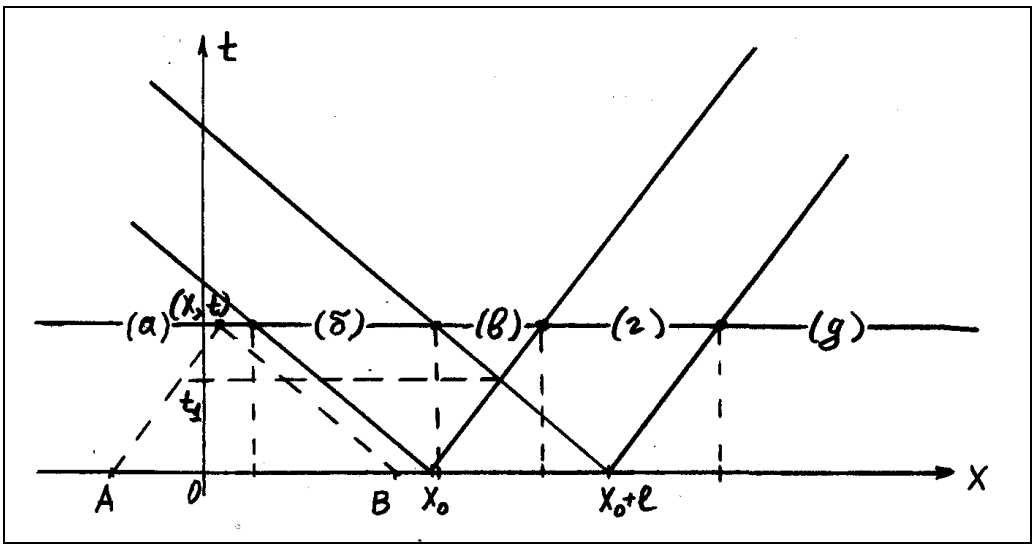


Рис. 2

Через точки x_0 и $x_0+\ell$ на координатной оси x проведем четыре характеристики $x-(\overline{u}+\overline{c})t = x_0$, $x-(\overline{u}+\overline{c})t = x_0+\ell$, $x-(\overline{u}-\overline{c})t = x_0$ и $x-(\overline{u}-\overline{c})t = x_0+\ell$. Время t_1, при котором пересекаются две из этих характеристик, равно $t_1 = \frac{\ell}{2\overline{c}}$.

Пространственные профили давления и скорости. Зафиксируем произвольный момент времени $t > t_1$. На Рис.2 точки с фиксированным значением t лежат на прямой, параллельной координатной оси x. Эта прямая делится в точках пересечения с четырьмя характеристиками на пять участков, которые на Рис.2 условно обозначены (а), (б), (в), (г) и (д).

На участке (а) переменная x меняется в пределах $-\infty < x < x_0+(\overline{u}-\overline{c})t$.

На участке (б) $x_0+(\overline{u}-\overline{c})t \le x < x_0+\ell+(\overline{u}-\overline{c})t$. На участке (в) $x_0+\ell+(\overline{u}-\overline{c})t \le x < x_0+(\overline{u}+\overline{c})t$. На участке (г) $x_0+(\overline{u}+\overline{c})t \le x < x_0+\ell+(\overline{u}+\overline{c})t$. И, наконец, на участке (д) переменная x меняется в пределах $x_0+\ell+(\overline{u}+\overline{c})t \le x < +\infty$.

Получим формулы для давления $P(x,t)$ и скорости $U(x,t)$ при фиксированном значении t на каждом из этих участков.

Так, например, на участке (а) для произвольной точки (x,t) построим две характеристики $x-(\overline{u}+\overline{c})t = const$ и $x-(\overline{u}-\overline{c})t = const$, проходящие через эту точку. Обозначим через A и B точки пересечения этих характеристик с координатной осью x. Тогда, в соответствие с формулами (12), давление в

точке (x,t) складывается из слагаемого, пропорционального начальному давлению в точке A, и слагаемого, пропорционального интегралу от начального давления по отрезку AB. Такую же геометрическую интерпретацию имеет и формула для скорости $U(x,t)$.

Подставляя в формулы (12) соответствующие значения начального давления, получаем, что в области изменения переменной $-\infty < x < x_0 + (\overline{u} - \overline{c})t$

$$P(x,t) = \overline{p} \quad \text{и} \qquad U(x,t) = \frac{\overline{p}}{\rho_* \overline{c}}(1 - \varepsilon \frac{t}{\overline{s}}). \tag{13}$$

Проводя аналогичные построения и на участках (б), (в), (г) и (д), приходим к следующим выражениям для $P(x,t)$ и $U(x,t)$.

На отрезке $x_0 + (\overline{u} - \overline{c})t \le x < x_0 + \ell + (\overline{u} - \overline{c})t$

$$P(x,t) = \overline{p} + \varepsilon \cdot \frac{1-\overline{m}}{4\overline{s}\overline{c}} \cdot \int_{x_0}^{x-(\overline{u}-\overline{c})t} \varphi_0(\alpha)\, d\alpha \qquad \text{и}$$

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{1-\overline{m}}{4\overline{s}\overline{c}} \cdot \int_{x_0}^{x-(\overline{u}-\overline{c})t} \varphi_0(\alpha)\, d\alpha \right). \tag{14}$$

На отрезке $x_0 + \ell + (\overline{u} - \overline{c})t \le x < x_0 + (\overline{u} + \overline{c})t$

$$P(x,t) = \overline{p} + \varepsilon \cdot \frac{(1-\overline{m}) \cdot \overline{\varphi}}{2\overline{s}} \cdot t_1 \qquad \text{и}$$

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{(1-\overline{m}) \cdot \overline{\varphi}}{2\overline{s}} \cdot t_1 \right). \tag{15}$$

На отрезке $x_0 + (\overline{u} + \overline{c})t \le x < x_0 + \ell + (\overline{u} + \overline{c})t$

$$P(x,t) = \overline{p} + \varphi_0\big(x - (\overline{u} + \overline{c})t\big) \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{1-\overline{m}}{2\overline{s}} \cdot t\right) + \varepsilon \cdot \frac{1-\overline{m}}{4\overline{s}\overline{c}} \cdot \int_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x_0+\ell} \varphi_0(\alpha)\, d\alpha \qquad \text{и}$$

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) + \varphi_0\big(x - (\overline{u} + \overline{c})t\big) \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{1-\overline{m}}{2\overline{s}} \cdot t\right) - \right.$$

$$\left. - \varepsilon \cdot \frac{1-\overline{m}}{4\overline{s}\overline{c}} \cdot \int_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x_0+\ell} \varphi_0(\alpha)\, d\alpha \right). \tag{16}$$

И при изменении переменной x в области $x_0 + \ell + (\overline{u} + \overline{c})t \le x < +\infty$

$$P(x,t) = \overline{p} \quad \text{и} \qquad U(x,t) = \frac{\overline{p}}{\rho_* \overline{c}}(1 - \varepsilon \frac{t}{\overline{s}}). \tag{17}$$

Отметим, что в формулах (13)-(17) и во всех последующих формулах для давления и скорости в данном пункте изложения отброшены слагаемые порядка $O(\varepsilon^2)$.

Дальнейшая детализация формул (14) - (16) связана с выбором конкретного вида функции $\varphi_0(x)$. Рассмотрим два частных случая.

Кусочно-постоянное начальное возмущение.

Пусть функция $\varphi_0(x) = \overline{p} + \Delta p_1$, где $x_0 \le x \le x_0 + \ell$ и $\Delta p_1 = const$. При этом, начальные профили давления и скорости имеют вид, представленный на Рис.3.

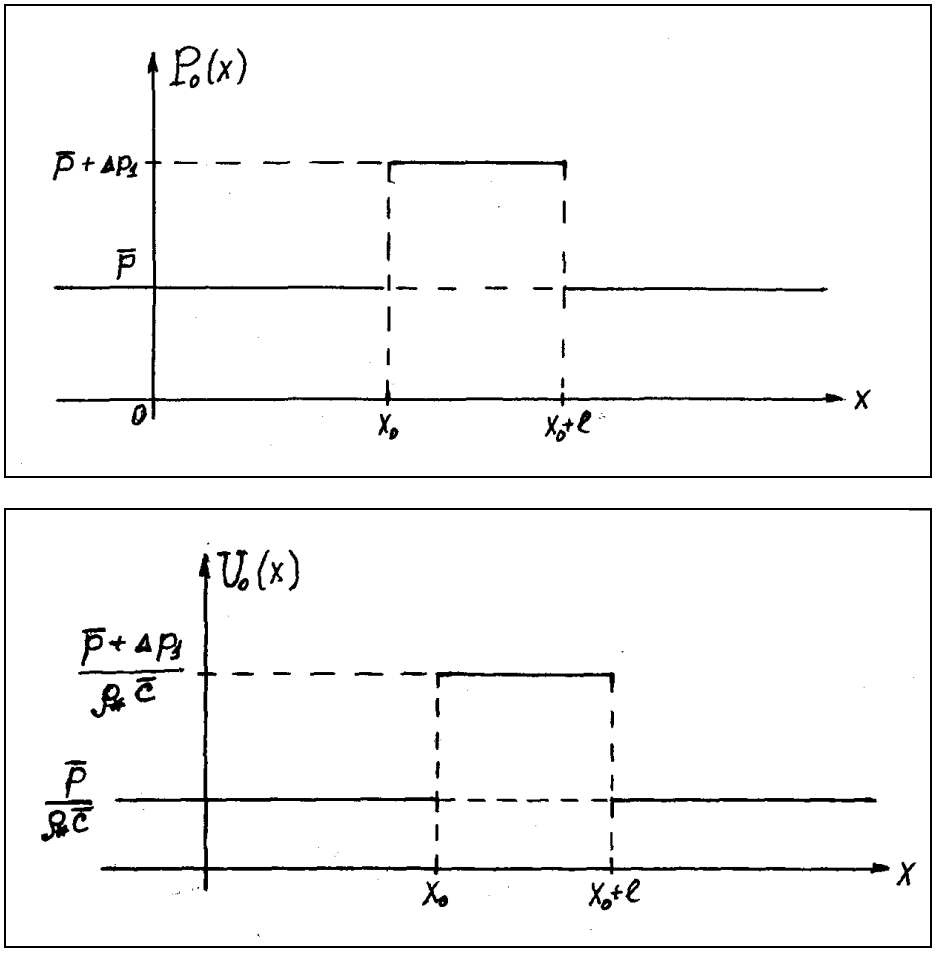


Рис. 3

Вычислив для данной функции $\varphi_0(x)$ интегралы в формулах (14)-(16), получаем выражения для давления и скорости в фиксированный момент времени $t > t_1$.

Итак, профиль давления определяется следующей группой формул:

$P(x,t) = \bar{p}$ на полуоси $-\infty < x < x_0 + (\bar{u} - \bar{c})t$;

$P(x,t) = \bar{p} + \varepsilon \cdot \dfrac{(1-\bar{m}) \cdot \Delta p_1}{4\bar{s}\bar{c}} \cdot \left(x - (\bar{u} - \bar{c})t - x_0\right)$ на отрезке $x_0 + (\bar{u} - \bar{c})t \le x < x_0 + \ell + (\bar{u} - \bar{c})t$. Это линейная по переменной x функция, имеющая значение $\bar{p}$ в точке $x = x_0 + (\bar{u} - \bar{c})t$ и значение $\bar{p} + \varepsilon \dfrac{(1-\bar{m})\Delta p_1}{2\bar{s}} t_1$ в точке $x = x_0 + \ell + (\bar{u} - \bar{c})t$;

$P(x,t) = \bar{p} + \varepsilon \cdot \dfrac{(1-\bar{m}) \cdot \bar{\varphi}}{2\bar{s}} \cdot t_1$ на отрезке $x_0 + \ell + (\bar{u} - \bar{c})t \le x < x_0 + (\bar{u} + \bar{c})t$.

Здесь $\bar{\varphi} = \Delta p_1$;

$P(x,t) = \bar{p} + \Delta p_1 \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \dfrac{1-\bar{m}}{2\bar{s}} \cdot t\right) + \varepsilon \cdot \dfrac{(1-\bar{m}) \cdot \Delta p_1}{4\bar{s}\bar{c}} \cdot \left(x_0 + \ell - x + (\bar{u} + \bar{c})t\right)$ на отрезке $x_0 + (\bar{u} + \bar{c})t \le x < x_0 + \ell + (\bar{u} + \bar{c})t$. Это линейно убывающая по переменной x функция, имеющая значение $\bar{p} + \Delta p_1 - \varepsilon \dfrac{(1-\bar{m})\Delta p_1}{2\bar{s}} \cdot \left(t - t_1\right)$ в

точке $x = x_0 + (\overline{u} + \overline{c})t$ и значение $\overline{p} + \Delta p_1 - \varepsilon \dfrac{(1-\overline{m})\Delta p_1}{2\overline{s}} t$ в точке $x = x_0 + \ell + (\overline{u} + \overline{c})t$;

$$P(x,t) = \overline{p} \text{ на полуоси } x_0 + \ell + (\overline{u} + \overline{c})t \le x < +\infty. \qquad (18)$$

Профиль давления, определенный формулами (18), представлен графически на Рис.4.

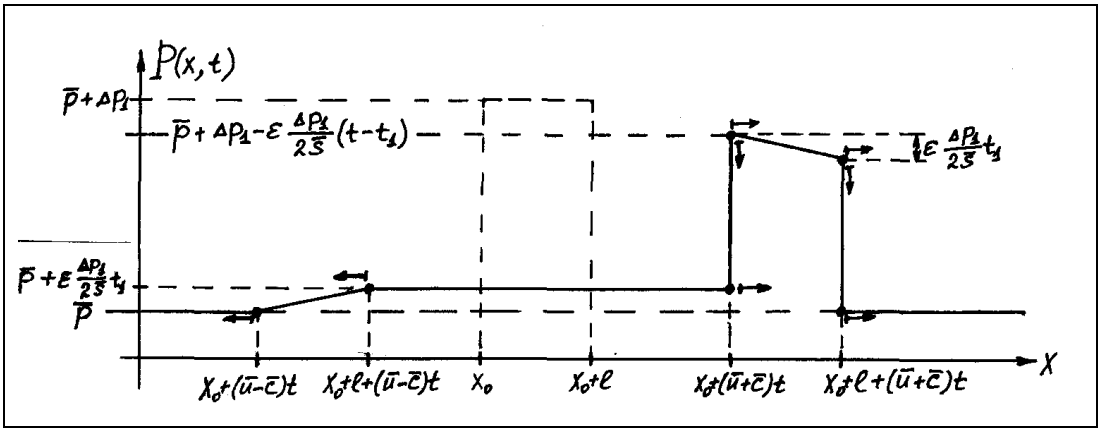


Рис. 4

Профиль скорости определяется следующей группой формул:

$$U(x,t) = \frac{\overline{p}}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(1 - \varepsilon \frac{t}{\overline{s}}\right) \text{ на полуоси } -\infty < x < x_0 + (\overline{u} - \overline{c})t;$$

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{(1-\overline{m}) \cdot \Delta p_1}{4\overline{s}\,\overline{c}} \cdot \left(x - (\overline{u} - \overline{c})t - x_0\right)\right) \text{ на}$$

отрезке $x_0 + (\overline{u} - \overline{c})t \le x < x_0 + \ell + (\overline{u} - \overline{c})t$. Это линейно убывающая по переменной x функция, имеющая значение $\dfrac{\overline{p}}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(1 - \varepsilon \dfrac{t}{\overline{s}}\right)$ в точке $x = x_0 + (\overline{u} - \overline{c})t$ и значение $\dfrac{1}{\rho_* \overline{c}} \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \dfrac{t}{\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \dfrac{(1-\overline{m})\Delta p_1}{2\overline{s}} t_1\right)$ в точке $x = x_0 + \ell + (\overline{u} - \overline{c})t$;

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{(1-\overline{m}) \cdot \overline{\varphi}}{2\overline{s}} \cdot t_1\right) \text{ на отрезке}$$

$x_0 + \ell + (\overline{u} - \overline{c})t \le x < x_0 + (\overline{u} + \overline{c})t$. Здесь $\overline{\varphi} = \Delta p_1$;

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) + \Delta p_1 \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{1-\overline{m}}{2\overline{s}} \cdot t\right) - \right.$$

$$\left. - \varepsilon \cdot \frac{(1-\overline{m}) \cdot \Delta p_1}{4\overline{s}\,\overline{c}} \cdot \left(x_0 + \ell - x + (\overline{u} + \overline{c})t\right)\right) \text{ на отрезке}$$

$x_0 + (\overline{u} + \overline{c})t \le x < x_0 + \ell + (\overline{u} + \overline{c})t$. Это линейно возрастающая по переменной x функция, имеющая значение $\dfrac{1}{\rho_* \overline{c}} \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \dfrac{t}{\overline{s}}\right) + \Delta p_1 \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \dfrac{1-\overline{m}}{2\overline{s}} t\right) - \varepsilon \cdot \dfrac{(1-\overline{m})\Delta p_1}{2\overline{s}} t_1\right)$ в точке

$x = x_0 + (\overline{u} + \overline{c})t$ и значение $\dfrac{1}{\rho_* \overline{c}}\left(\overline{p}\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\dfrac{t}{\overline{s}}\right)+\Delta p_1\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\dfrac{1-\overline{m}}{2\overline{s}}t\right)\right)$ в точке $x = x_0 + \ell + (\overline{u} + \overline{c})t$;

$$U(x,t) = \frac{\overline{p}}{\rho_* \overline{c}}\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{\overline{s}}\right) \text{ на полуоси } x_0 + \ell + (\overline{u} + \overline{c})t \le x < +\infty . \qquad (19)$$

Профиль скорости, определенный формулами (19), представлен графически на Рис.5.

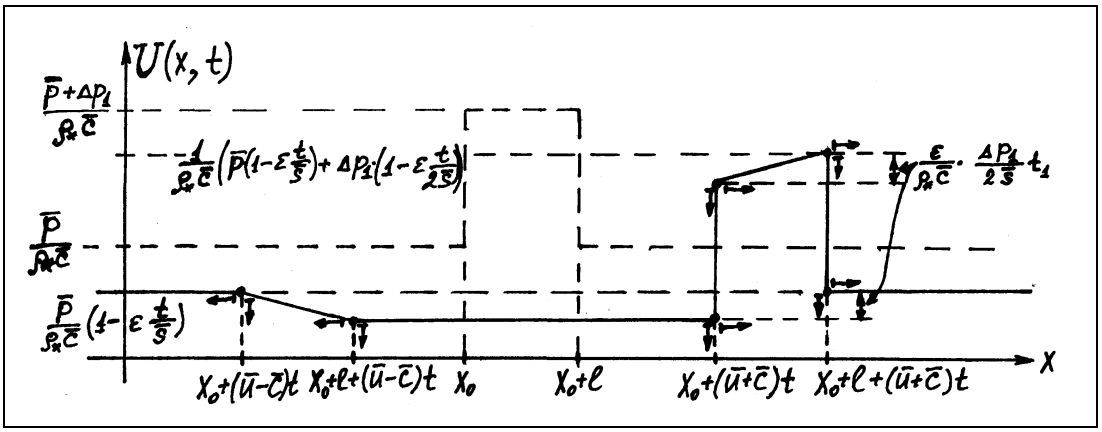
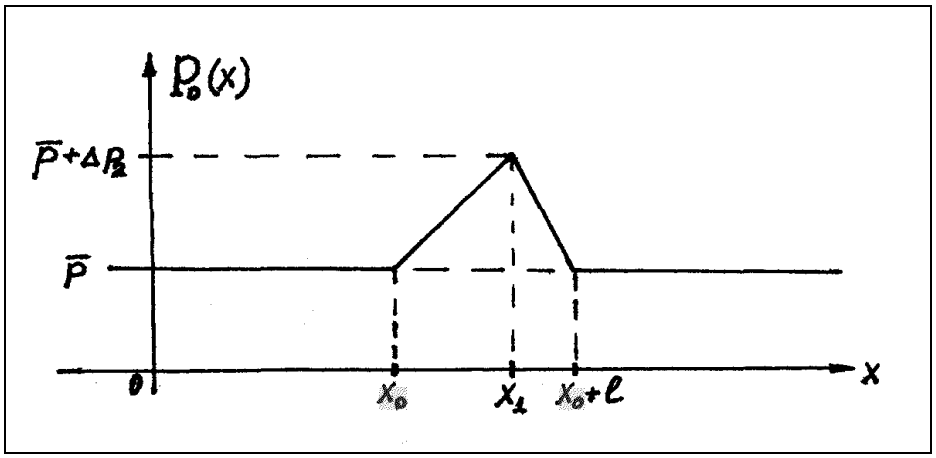


Рис. 5

<u>*Кусочно-линейное начальное возмущение.*</u>

Пусть функция $\varphi_0(x) = \overline{p} + \Delta p_2 \cdot (x - x_0)/(x_1 - x_0)$ в случае $x_0 \le x < x_1$ и $\varphi_0(x) = \overline{p} + \Delta p_2 \cdot (x_0 + \ell - x)/(x_0 + \ell - x_1)$ в случае $x_1 \le x \le x_0 + \ell$. Здесь x_1 фиксированное значение из отрезка $[x_0, x_0 + \ell]$ и $\Delta p_2 = const$. При этом, начальные профили давления и скорости имеют вид, представленный на Рис.6.



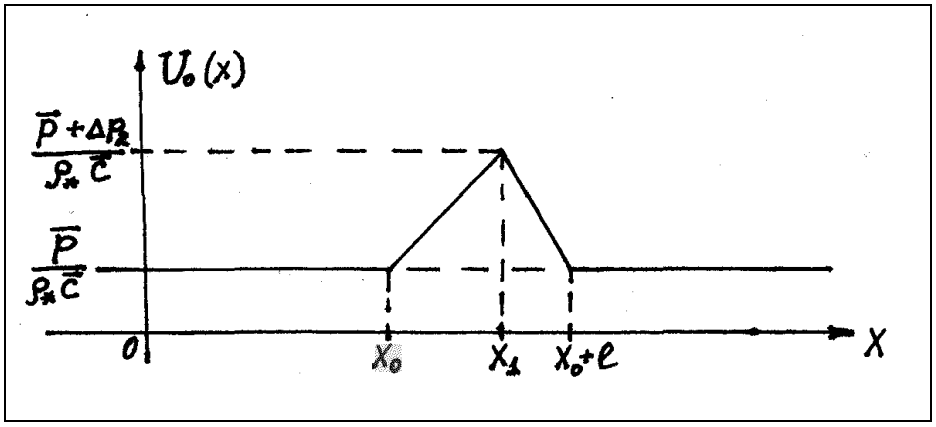


Рис. 6

Вычислив для данной функции $\varphi_0(x)$ интегралы в формулах (14)-(16), получаем выражения для давления и скорости в фиксированный момент времени $t > t_1$.

Приведенные далее формулы формально соответствуют значению параметра $\overline{m} = 0$. Выбор такого значения параметра $\overline{m}$ связан с тем, что в формулах (13)-(17) этот параметр встречается только в комбинации $\varepsilon \cdot \overline{m}$. А для артериальных сосудов сердечно-сосудистой системы человека параметр $\overline{m}$ имеет числовые значения близкие к значению параметра ε. Поэтому выражения пропорциональные произведению $\varepsilon \cdot \overline{m}$ фактически эквивалентны величинам пропорциональным ε^2, ранее уже отнесенным к остаточным членам в выражениях (4).

Итак, профиль давления определяется следующей группой формул:

$P(x,t) = \overline{p}$ на полуоси $-\infty < x < x_0 + (\overline{u} - \overline{c})t$;

$P(x,t) = \overline{p} + \varepsilon \cdot \dfrac{\Delta p_2}{8\overline{s}\overline{c}(x_1 - x_0)} \cdot \left(x - (\overline{u} - \overline{c})t - x_0\right)^2$ на отрезке $x_0 + (\overline{u} - \overline{c})t \le x < x_1 + (\overline{u} - \overline{c})t$. Это квадратичная по переменной x функция. Монотонно возрастает на данном участке. Имеет выпуклость направленную вниз. Принимает значение $\overline{p}$ в точке $x = x_0 + (\overline{u} - \overline{c})t$ и значение $\overline{p} + \varepsilon \dfrac{\Delta p_2}{4\overline{s}} \cdot \dfrac{x_1 - x_0}{2\overline{c}}$ в точке $x = x_1 + (\overline{u} - \overline{c})t$;

$P(x,t) = \overline{p} + \varepsilon \cdot \dfrac{\Delta p_2}{4\overline{s}} \cdot t_1 - \varepsilon \dfrac{\Delta p_2}{8\overline{s}\overline{c}(x_0 + \ell - x_1)} \cdot \left(x_0 + \ell - x + (\overline{u} - \overline{c})t\right)^2$ на отрезке $x_1 + (\overline{u} - \overline{c})t \le x < x_0 + \ell + (\overline{u} - \overline{c})t$. Это квадратичная по переменной x функция. Монотонно возрастает на данном участке. Имеет выпуклость направленную вверх. Принимает значение $\overline{p} + \varepsilon \dfrac{\Delta p_2}{4\overline{s}} \cdot \dfrac{x_1 - x_0}{2\overline{c}}$ в точке $x = x_1 + (\overline{u} - \overline{c})t$ и значение $\overline{p} + \varepsilon \dfrac{\Delta p_2}{4\overline{s}} \cdot t_1$ в точке $x = x_0 + \ell + (\overline{u} - \overline{c})t$;

$P(x,t) = \overline{p} + \varepsilon \dfrac{\overline{\varphi}}{2\overline{s}} t_1$ на отрезке $x_0 + \ell + (\overline{u} - \overline{c})t \le x < x_0 + (\overline{u} + \overline{c})t$.

Здесь $\overline{\varphi} = \dfrac{\Delta p_2}{2}$. Если $\Delta p_2 = 2 \cdot \Delta p_1$, то числовое значение $\overline{\varphi}$ такое же, как в формулах (18);

$$P(x,t)=\overline{p}+\varepsilon\frac{\Delta p_2}{4\overline{s}}\cdot t_1+$$

$$+\frac{\Delta p_2}{(x_1-x_0)}\cdot\left(\left(x-(\overline{u}+\overline{c})t-x_0\right)\cdot\left(1-\varepsilon\frac{t}{2\overline{s}}\right)-\varepsilon\frac{1}{8\overline{s}\overline{c}}\left(x-(\overline{u}+\overline{c})t-x_0\right)^2\right)$$

на отрезке $x_0+(\overline{u}+\overline{c})t\le x<x_1+(\overline{u}+\overline{c})t$.

Это квадратичная по переменной x функция. Монотонно возрастает на данном участке. Имеет выпуклость направленную вверх. Принимает значение $\overline{p}+\varepsilon\frac{\Delta p_2}{4\overline{s}}\cdot t_1$ в точке $x=x_0+(\overline{u}+\overline{c})t$ и значение $\overline{p}+\Delta p_2\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\overline{s}}\right)+\varepsilon\cdot\frac{\Delta p_2}{4\overline{s}}\cdot\frac{x_0+\ell-x_1}{2\overline{c}}$ в точке $x=x_1+(\overline{u}+\overline{c})t$;

$$P(x,t)=\overline{p}+$$

$$+\frac{\Delta p_2}{(x_0+\ell-x_1)}\cdot\left(\left(x_0+\ell-x+(\overline{u}+\overline{c})t\right)\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\overline{s}}\right)+\varepsilon\cdot\frac{1}{8\overline{s}\overline{c}}\left(x_0+\ell-x+(\overline{u}+\overline{c})t\right)^2\right)$$

на отрезке $x_1+(\overline{u}+\overline{c})t\le x<x_0+\ell+(\overline{u}+\overline{c})t$. Это квадратичная по переменной x функция. Монотонно убывает на данном участке. Имеет выпуклость направленную вниз. Принимает значение $\overline{p}+\Delta p_2\cdot\left(1-\varepsilon\mp\cdot\frac{t}{2\overline{s}}\right)+\varepsilon\cdot\frac{\Delta p_2}{4\overline{s}}\cdot\frac{x_0+\ell-x_1}{2\overline{c}}$ в точке $x=x_1+(\overline{u}+\overline{c})t$ и значение $\overline{p}$ в точке $x=x_0+\ell+(\overline{u}+\overline{c})t$;

$$P(x,t)=\overline{p}\ \text{на полуоси}\ x_0+\ell+(\overline{u}+\overline{c})t\le x<+\infty. \qquad (20)$$

Профиль давления, определенный формулами (20), представлен графически на Рис.7.

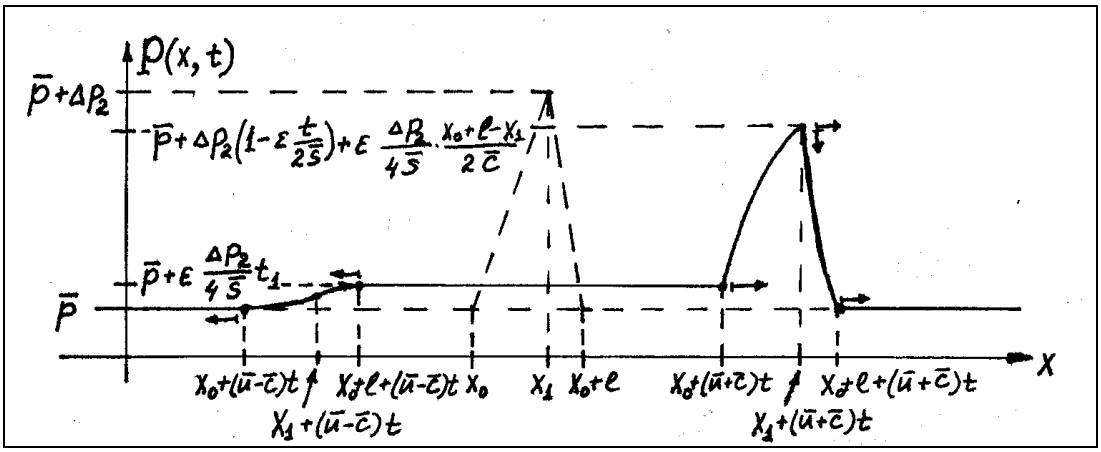


Рис. 7

Профиль скорости определяется следующей группой формул:

$$U(x,t)=\frac{\overline{p}}{\rho_*\overline{c}}\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{\overline{s}}\right)\ \text{на полуоси}\ -\infty<x<x_0+(\overline{u}-\overline{c})t;$$

$$U(x,t)=\frac{1}{\rho_*\overline{c}}\cdot\left(\overline{p}\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{\overline{s}}\right)-\varepsilon\cdot\frac{\Delta p_2}{8\overline{s}\overline{c}(x_1-x_0)}\cdot\left(x-(\overline{u}-\overline{c})t-x_0\right)^2\right)$$ на отрезке $x_0+(\overline{u}-\overline{c})t\le x<x_1+(\overline{u}-\overline{c})t$. Это квадратичная по переменной x функция. Монотонно убывает на данном участке. Имеет выпуклость

направленную вверх. Принимает значение $\frac{\overline{p}}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right)$ в точке $x = x_0 + (\overline{u} - \overline{c})t$ и значение $\frac{1}{\rho_* \overline{c}}\left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{\Delta p_2}{4\overline{s}} \cdot \frac{x_1 - x_0}{2\overline{c}}\right)$ в точке $x = x_1 + (\overline{u} - \overline{c})t$;

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{\Delta p_2}{4\overline{s}} \cdot t_1 + \varepsilon \cdot \frac{\Delta p_2}{8\overline{s}\overline{c}(x_0 + \ell - x_1)} \cdot \left(x_0 + \ell - x + (\overline{u} - \overline{c})t\right)^2\right)$$

на отрезке $x_1 + (\overline{u} - \overline{c})t \le x < x_0 + \ell + (\overline{u} - \overline{c})t$. Это квадратичная по переменной x функция. Монотонно убывает на данном участке. Имеет выпуклость направленную вниз. Принимает значение $\frac{1}{\rho_* \overline{c}}\left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{\Delta p_2}{4\overline{s}} \cdot \frac{x_1 - x_0}{2\overline{c}}\right)$ в точке $x = x_1 + (\overline{u} - \overline{c})t$ и значение $\frac{1}{\rho_* \overline{c}}\left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{\Delta p_2}{4\overline{s}} t_1\right)$ в точке $x = x_0 + \ell + (\overline{u} - \overline{c})t$;

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{\overline{\varphi}}{2\overline{s}} \cdot t_1\right)$$

на отрезке $x_0 + \ell + (\overline{u} - \overline{c})t \le x < x_0 + (\overline{u} + \overline{c})t$. Здесь $\overline{\varphi} = \frac{\Delta p_2}{2}$;

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{\Delta p_2}{4\overline{s}} \cdot t_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta p_2}{(x_1 - x_0)} \cdot \left(\left(x - (\overline{u} + \overline{c})t - x_0\right) \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{2\overline{s}}\right) + \varepsilon \cdot \frac{1}{8\overline{s}\overline{c}}\left(x - (\overline{u} + \overline{c})t - x_0\right)^2\right)\right)$$

на отрезке $x_0 + (\overline{u} + \overline{c})t \le x < x_1 + (\overline{u} + \overline{c})t$. Это квадратичная по переменной x функция. Монотонно возрастает на данном участке. Имеет выпуклость направленную вниз. Принимает значение $\frac{1}{\rho_* \overline{c}}\left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{\Delta p_2}{4\overline{s}} \cdot t_1\right)$ в точке $x = x_0 + (\overline{u} + \overline{c})t$ и значение $\frac{1}{\rho_* \overline{c}}\left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) + \Delta p_2 \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{2\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{\Delta p_2}{4\overline{s}} \cdot \frac{x_0 + \ell - x_1}{2\overline{c}}\right)$ в точке $x = x_1 + (\overline{u} + \overline{c})t$;

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta p_2}{(x_0 + \ell - x_1)} \cdot \left(\left(x_0 + \ell - x + (\overline{u} + \overline{c})t\right) \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{2\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{1}{8\overline{s}\overline{c}} \cdot \left(x_0 + \ell - x + (\overline{u} + \overline{c})t\right)^2\right)\right)$$

на отрезке $x_1 + (\overline{u} + \overline{c})t \le x < x_0 + \ell + (\overline{u} + \overline{c})t$.

Это квадратичная по переменной x функция. Монотонно убывает на данном участке. Имеет выпуклость направленную вверх. Принимает значение

$$\frac{1}{\rho_* \bar{c}}\left(\bar{p}\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{\bar{s}}\right)+\Delta p_2\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\bar{s}}\right)-\varepsilon\cdot\frac{\Delta p_2}{4\bar{s}}\cdot\frac{x_0+\ell-x_1}{2\bar{c}}\right)$$ в точке $x = x_1 + (\bar{u}+\bar{c})t$ и значение $\frac{\bar{p}}{\rho_* \bar{c}}\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{\bar{s}}\right)$ в точке $x = x_0 + \ell + (\bar{u}+\bar{c})t$;

$$U(x,t) = \frac{\bar{p}}{\rho_* \bar{c}}\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{\bar{s}}\right) \text{ на полуоси } x_0+\ell+(\bar{u}+\bar{c})t \le x < +\infty. \qquad (21)$$

Профиль скорости, определенный формулами (21), представлен графически на Рис.8.

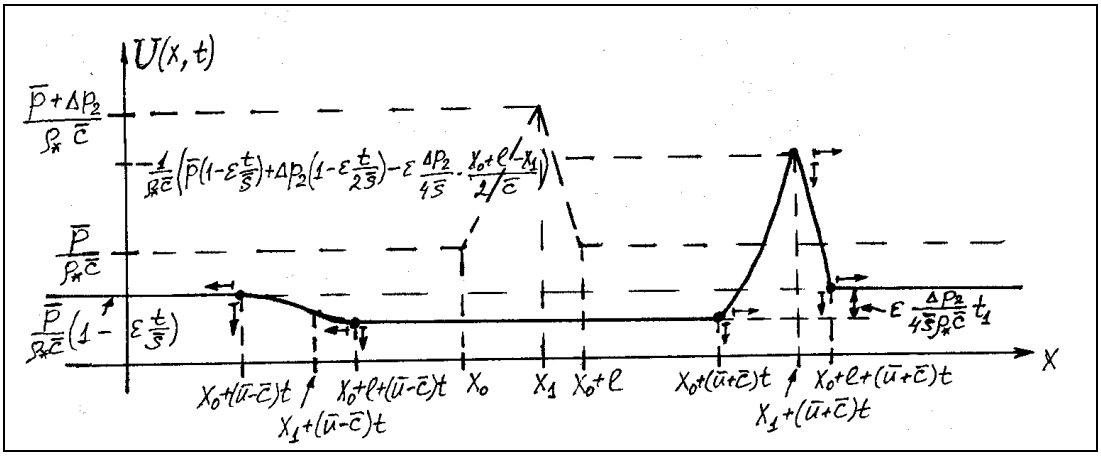


Рис. 8

Закон изменения во времени давления и скорости в фиксированном сечении. Выберем и зафиксируем произвольное сечение сосуда с координатой $x > x_0 + \ell$. На Рис.9 точки с фиксированным значением x лежат на прямой, параллельной координатной оси t. Эта прямая делится в точках пересечения с двумя характеристиками на три участка, которые на Рис.9 условно обозначены (а), (б) и (в). На участке (а) переменная t меняется в пределах $0 \le t < \frac{x-x_0-\ell}{\bar{u}+\bar{c}}$. На участке (б) $\frac{x-x_0-\ell}{\bar{u}+\bar{c}} \le t < \frac{x-x_0}{\bar{u}+\bar{c}}$ и на участке (в) $\frac{x-x_0}{\bar{u}+\bar{c}} \le t < +\infty$.

Получим формулы для давления $P(x,t)$ и скорости $U(x,t)$ при фиксированном значении x на каждом из этих участков. Так, например, на участке (а) для произвольной точки (x,t) построим две характеристики $x-(\bar{u}+\bar{c})t = const$ и $x-(\bar{u}-\bar{c})t = const$, проходящие через эту точку. Обозначим через A и B точки пересечения этих характеристик с координатной осью x. Тогда, в соответствие с формулами (12), давление в точке (x,t) складывается из слагаемого, пропорционального начальному давлению в точке A, и слагаемого, пропорционального интегралу от начального давления по отрезку AB. Такую же геометрическую интерпретацию имеет и формула для скорости $U(x,t)$.

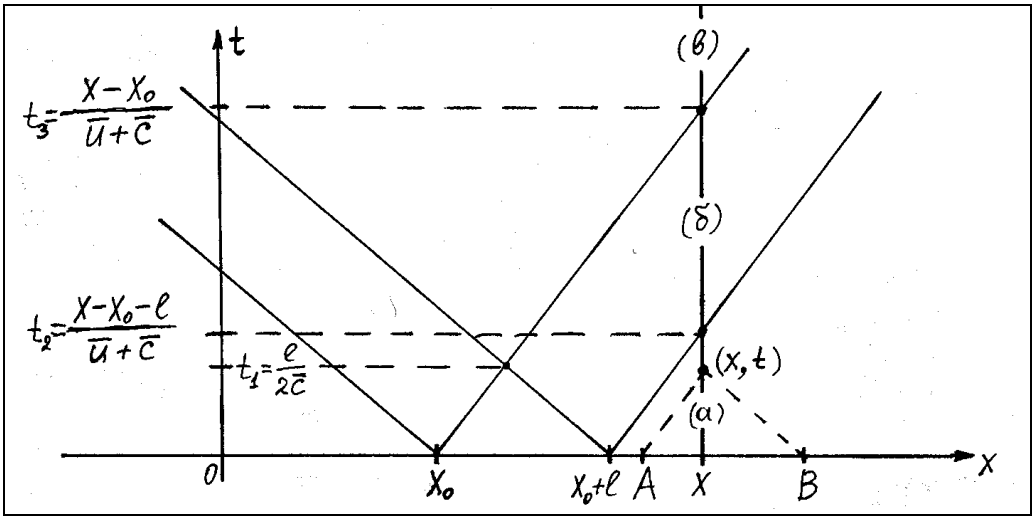


Рис. 9

Подставляя в формулы (12) соответствующие значения начального давления и начальной скорости и, как и в предыдущем пункте, формально полагая $\overline{m}=0$, получаем, что в области изменения переменной $0 \le t < \dfrac{x-x_0-\ell}{\overline{u}+\overline{c}} = t_2$

$$P(x,t)=\overline{p} \quad \text{и} \qquad U(x,t)=\frac{\overline{p}}{\rho_*\overline{c}}\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{\overline{s}}\right). \tag{22}$$

Проводя аналогичные построения и на участках (б) и (в), приходим к следующим выражениям, определяющим $P(x,t)$ и $U(x,t)$.

На отрезке $t_2 \le t < \dfrac{x-x_0}{\overline{u}+\overline{c}} = t_3$

$$P(x,t)=\overline{p}+\varphi_0\big(x-(\overline{u}+\overline{c})t\big)\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\overline{s}}\right)+\varepsilon\cdot\frac{1}{4\overline{s}\overline{c}}\cdot\int\limits_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x_0+\ell}\varphi_0(\alpha)\,d\alpha \qquad \text{и}$$

$$U(x,t)=\frac{1}{\rho_*\overline{c}}\left(\overline{p}\cdot\left(1-\varepsilon\frac{t}{\overline{s}}\right)+\varphi_0\big(x-(\overline{u}+\overline{c})t\big)\cdot\left(1-\varepsilon\frac{t}{2\overline{s}}\right)-\varepsilon\frac{1}{4\overline{s}\overline{c}}\int\limits_{x-(\overline{u}+\overline{c})t}^{x_0+\ell}\varphi_0(\alpha)\,d\alpha\right). \tag{23}$$

И, наконец, при изменении переменной t в области $t_3 \le t < +\infty$

$$P(x,t)=\overline{p}+\varepsilon\cdot\frac{\overline{\varphi}}{2\overline{s}}\cdot t_1 \qquad \text{и}$$

$$U(x,t)=\frac{1}{\rho_*\overline{c}}\cdot\left(\overline{p}\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{\overline{s}}\right)-\varepsilon\cdot\frac{\overline{\varphi}}{2\overline{s}}\cdot t_1\right). \tag{24}$$

Дальнейшая детализация формул (22) - (24) связана с выбором конкретного вида функции $\varphi_0(x)$. Рассмотрим два частных случая.

Кусочно-постоянное начальное возмущение.

Пусть функция $\varphi_0(x)=\overline{p}+\Delta p_1$, где $x_0 \le x \le x_0+\ell$ и $\Delta p_1 = const$. При этом, начальные профили давления и скорости имеют вид, представленный на Рис.3. Вычислив для данной функции $\varphi_0(x)$ интегралы в формулах (23), (24),

получаем выражения для давления и скорости в фиксированном сечении $x > x_0 + \ell$.

Итак, изменение во времени давления в фиксированном сечении сосуда определяется следующей группой формул:

$P(x,t) = \overline{p}$ на отрезке $0 \le t < t_2$;

$P(x,t) = \overline{p} + \Delta p_1 + \varepsilon \cdot \dfrac{\Delta p_1}{4\overline{s}\overline{c}} \cdot \left(x_0 + \ell - x + (\overline{u} - \overline{c})t\right)$ на отрезке $t_2 \le t < t_3$. Это линейная, убывающая по переменной t функция, имеющая значение $\overline{p} + \Delta p_1 - \varepsilon \cdot \dfrac{\Delta p_1}{2\overline{s}} \cdot t_2$ в момент времени $t = t_2$ и значение $\overline{p} + \Delta p_1 - \varepsilon \cdot \dfrac{\Delta p_1}{2\overline{s}} \cdot \left(t_3 - t_1\right)$ в момент времени $t = t_3$;

$$P(x,t) = \overline{p} + \varepsilon \cdot \frac{\overline{\varphi}}{2\overline{s}} \cdot t_1 \text{ на полуоси } t_3 \le t < +\infty. \qquad (25)$$

Здесь $\overline{\varphi} = \Delta p_1$.

Зависимость давления от времени, определяемая формулами (25), представлена графически на Рис.10.

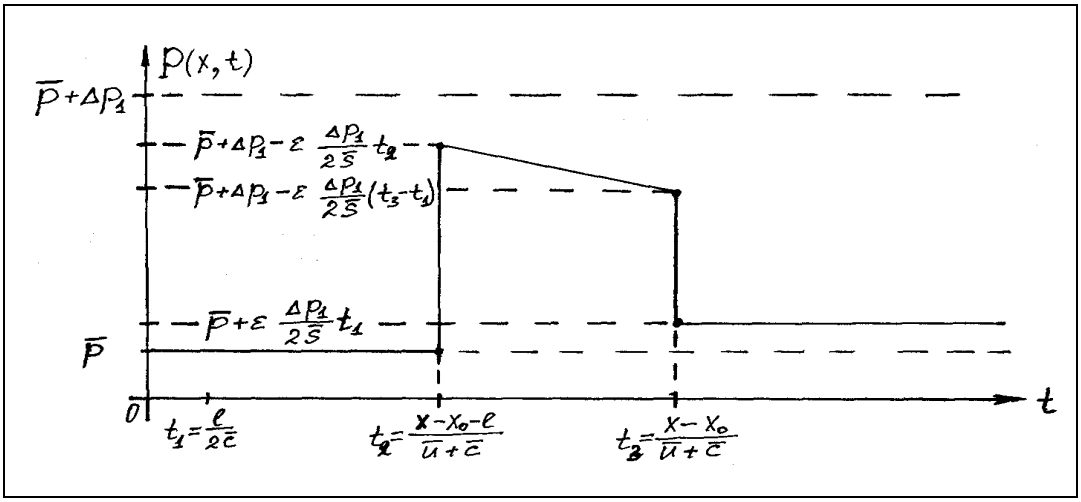


Рис. 10

Изменение во времени скорости в фиксированном сечении сосуда определяется следующей группой формул:

$U(x,t) = \dfrac{\overline{p}}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \dfrac{t}{\overline{s}}\right)$ на отрезке $0 \le t < t_2$;

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) + \Delta p_1 \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{2\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{\Delta p_1}{4\overline{s}\overline{c}} \cdot \left(x_0 + \ell - x + (\overline{u} + \overline{c})t\right)\right)$$

на отрезке $t_2 \le t < t_3$. Это линейная, убывающая по переменной t функция, имеющая значение $\dfrac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \dfrac{t_2}{\overline{s}}\right) + \Delta p_1 \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \dfrac{t_2}{2\overline{s}}\right)\right)$ в момент времени $t = t_2$ и значение $\dfrac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \dfrac{t_3}{\overline{s}}\right) + \Delta p_1 \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \dfrac{t_3}{2\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \dfrac{\Delta p_1}{2\overline{s}} \cdot t_1\right)$ в момент времени $t = t_3$;

$$U(x,t)=\frac{1}{\rho_*\bar{c}}\cdot\left(\bar{p}\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{\bar{s}}\right)-\varepsilon\cdot\frac{\bar{\varphi}}{2\bar{s}}\cdot t_1\right)$$ на полуоси $t_3 \le t < +\infty$. (26)

Здесь $\bar{\varphi}=\Delta p_1$;

Зависимость скорости от времени, определяемая формулами (26), представлена графически на Рис.11.

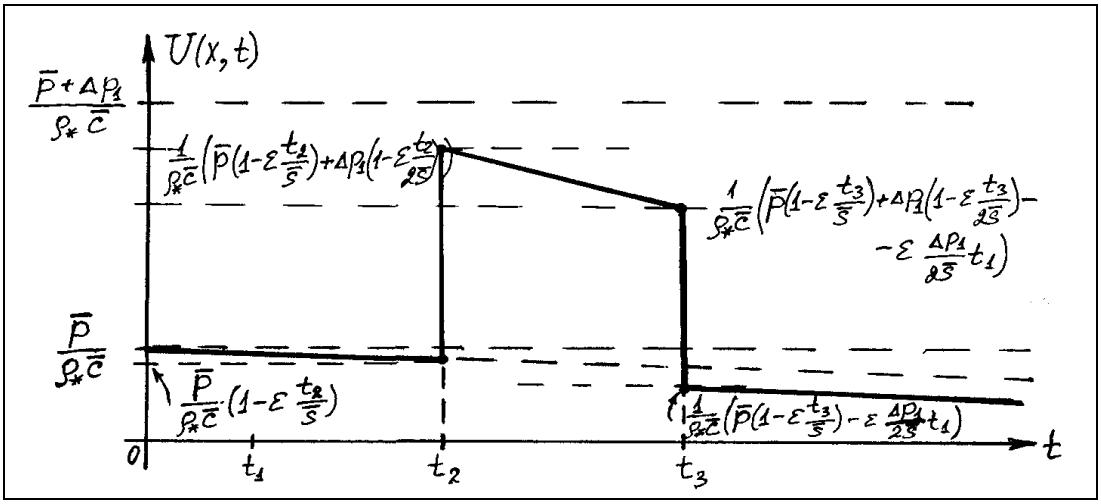


Рис. 11

Кусочно-линейное начальное возмущение.

Пусть функция $\varphi_0(x)=\bar{p}+\Delta p_2\cdot(x-x_0)/(x_1-x_0)$ в случае $x_0 \le x < x_1$ и $\varphi_0(x)=\bar{p}+\Delta p_2\cdot(x_0+\ell-x)/(x_0+\ell-x_1)$ в случае $x_1 \le x \le x_0+\ell$. Здесь x_1 фиксированное значение из отрезка $[x_0, x_0+\ell]$ и $\Delta p_2 = const$. При этом, начальные профили давления и скорости имеют вид, представленный на Рис.6. Вычислив для данной функции $\varphi_0(x)$ интегралы в формулах (23) и (24), получаем выражения для давления и скорости в фиксированном сечении $x > x_0+\ell$.

Изменение во времени давления в фиксированном сечении сосуда определяется следующей группой формул:

$P(x,t)=\bar{p}$ на отрезке $0 \le t < t_2$;

$$P(x,t)=\bar{p}+$$
$$+\frac{\Delta p_2}{(x_0+\ell-x_1)}\cdot\left(\left(x_0+\ell-x+(\bar{u}+\bar{c})t\right)\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\bar{s}}\right)+\varepsilon\cdot\frac{1}{8\bar{s}\bar{c}}\cdot\left(x_0+\ell-x+(\bar{u}+\bar{c})t\right)^2\right)$$

на отрезке $t_2 \le t < \dfrac{x-x_1}{\bar{u}+\bar{c}}$. Это квадратичная по переменной t функция. Монотонно возрастает на данном участке. Имеет выпуклость направленную вверх. Принимает значение $\bar{p}$ в момент времени $t=t_2$ и значение $\bar{p}+\Delta p_2-\varepsilon\cdot\dfrac{\Delta p_2}{2\bar{s}}\cdot\left(\dfrac{x-x_1}{\bar{u}+\bar{c}}-\dfrac{x_0+\ell-x_1}{4\bar{c}}\right)$ в момент времени $t=\dfrac{x-x_1}{\bar{u}+\bar{c}}$;

$$P(x,t)=\bar{p}+\varepsilon\cdot\frac{\Delta p_2}{4\bar{s}}\cdot t_1+$$

$$+\frac{\Delta p_2}{(x_1-x_0)}\cdot\left(\left(x-(\bar{u}+\bar{c})t-x_0\right)\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\bar{s}}\right)-\varepsilon\cdot\frac{1}{8\bar{s}\bar{c}}\cdot\left(x-(\bar{u}+\bar{c})t-x_0\right)^2\right)$$

на отрезке $\frac{x-x_1}{\bar{u}+\bar{c}}\le t<t_3$. Это квадратичная по переменной t функция. Монотонно убывает на данном участке. Имеет выпуклость направленную вниз. Принимает значение $\bar{p}+\Delta p_2-\varepsilon\cdot\frac{\Delta p_2}{2\bar{s}}\cdot\left(\frac{x-x_1}{\bar{u}+\bar{c}}-\frac{x_0+\ell-x_1}{4\bar{c}}\right)$ в момент времени $t=\frac{x-x_1}{\bar{u}+\bar{c}}$ и значение $\bar{p}+\varepsilon\cdot\frac{\Delta p_2}{4\bar{s}}\cdot t_1$ в момент времени $t=t_3$;

$$P(x,t)=\bar{p}+\varepsilon\cdot\frac{\bar{\varphi}}{2\bar{s}}\cdot t_1 \text{ на полуоси } t_3\le t<+\infty. \qquad (27)$$

Здесь $\bar{\varphi}=\frac{\Delta p_2}{2}$;

Зависимость давления от времени, определяемая формулами (27), представлена графически на Рис.12.

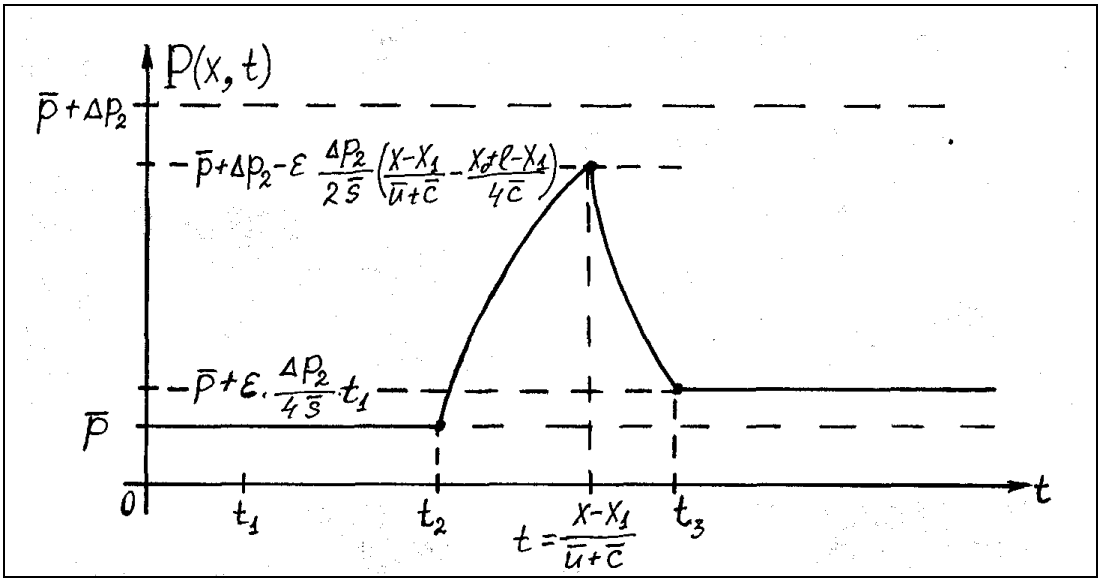


Рис. 12

Изменение во времени скорости в фиксированном сечении сосуда определяется следующей группой формул:

$$U(x,t)=\frac{\bar{p}}{\rho_*\bar{c}}\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{\bar{s}}\right) \text{ на отрезке } 0\le t<t_2;$$

$$U(x,t)=\frac{1}{\rho_*\bar{c}}\cdot\left(\bar{p}\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{\bar{s}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\Delta p_2}{(x_0+\ell-x_1)}\cdot\left(\left(x_0+\ell-x+(\bar{u}+\bar{c})t\right)\cdot\left(1-\varepsilon\cdot\frac{t}{2\bar{s}}\right)-\varepsilon\cdot\frac{1}{8\bar{s}\bar{c}}\cdot\left(x_0+\ell-x+(\bar{u}+\bar{c})t\right)^2\right)\right)$$

на отрезке $t_2\le t<\frac{x-x_1}{\bar{u}+\bar{c}}$. Это квадратичная по переменной t функция. Монотонно возрастает на данном участке. Имеет выпуклость направленную

вверх. Принимает значение $\frac{\overline{p}}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t_2}{\overline{s}}\right)$ в момент времени $t = t_2$ и значение $\frac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{x - x_1}{\overline{s}(\overline{u} + \overline{c})}\right) + \Delta p_2 - \varepsilon \cdot \frac{\Delta p_2}{2\overline{s}} \cdot \left(\frac{x - x_1}{\overline{u} + \overline{c}} + \frac{x_0 + \ell - x_1}{4\overline{c}}\right)\right)$ в момент времени $t = \frac{x - x_1}{\overline{u} + \overline{c}}$;

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{\Delta p_2}{4\overline{s}} \cdot t_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta p_2}{(x_1 - x_0)} \cdot \left(\left(x - (\overline{u} + \overline{c})t - x_0\right) \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{2\overline{s}}\right) + \varepsilon \cdot \frac{1}{8\overline{s}\overline{c}} \cdot \left(x - (\overline{u} + \overline{c})t - x_0\right)^2\right)\right)$$

на отрезке $\frac{x - x_1}{\overline{u} + \overline{c}} \le t < t_3$. Это квадратичная по переменной t функция. Монотонно убывает на данном участке. Имеет выпуклость направленную вниз. Принимает значение $\frac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{x - x_1}{\overline{s}(\overline{u} + \overline{c})}\right) + \Delta p_2 - \varepsilon \cdot \frac{\Delta p_2}{2\overline{s}} \cdot \left(\frac{x - x_1}{\overline{u} + \overline{c}} + \frac{x_0 + \ell - x_1}{4\overline{c}}\right)\right)$ в момент времени $t = \frac{x - x_1}{\overline{u} + \overline{c}}$ и значение $\frac{1}{\rho_* \overline{c}}\left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t_3}{\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{\Delta p_2}{4\overline{s}} \cdot t_1\right)$ в момент времени $t = t_3$;

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho_* \overline{c}} \cdot \left(\overline{p} \cdot \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{t}{\overline{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{\Delta p_2}{4\overline{s}} \cdot t_1\right) \text{ на полуоси } t_3 \le t < +\infty. \quad (28)$$

Зависимость скорости от времени, определяемая формулами (28), представлена графически на Рис.13.

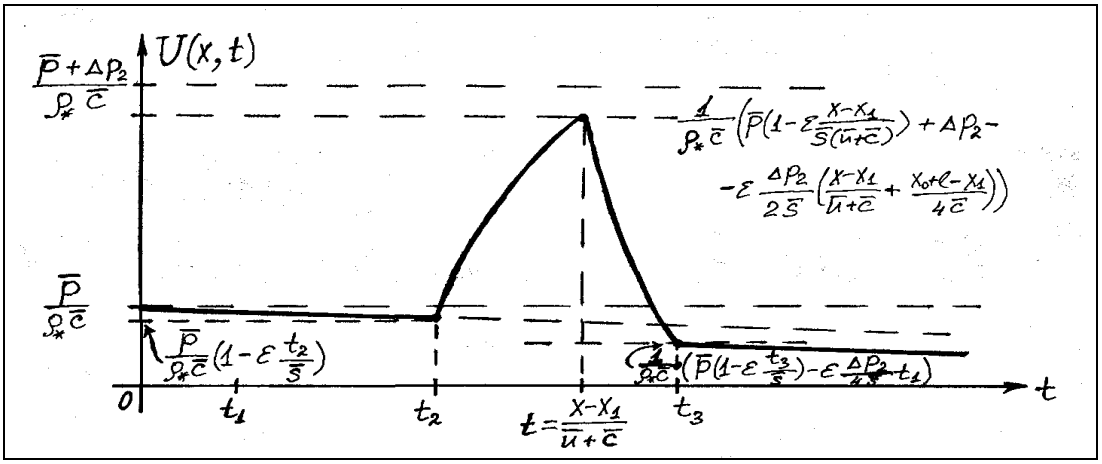


Рис. 13

5. Сравнение аналитических и численных решений задачи Коши для уравнений гемодинамики с трением. Проведем сравнение построенных в предыдущих параграфах аналитических решений уравнений гемодинамики как друг с другом, так и с соответствующими численными решениями, полученными с использованием программного комплекса CVSS.

Сравнение аналитических решений. Пусть сосуд и протекающая по нему жидкость характеризуются следующими значениями параметров. Фоновое стационарное значение давления равно $\overline{p} = 100$ мм.рт.ст., а скорости $\overline{u} = 100$ см/с. Сечение сосуда, соответствующее фоновому давлению равно $\overline{s} = 1\,см^2$. Плотность жидкости $\rho = 1\,г/см^3$ и коэффициент кинематической вязкости $\nu = 0{,}04\,см^2/с$. Тогда, скорость распространения малых возмущений $\overline{c}$, соответствующая этим данным, равна $\overline{c} = 1333$ см/с, а параметр $\overline{m} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{c}} = 0{,}075$.

Рассмотрим кусочно-постоянное начальное возмущение. Пусть функция $\varphi_0(x) = \overline{p} + \Delta p_1$, где $8\,см \le x \le 10{,}5\,см$ и $\Delta p_1 = 10$ мм.рт.ст. На Рис.14, Рис.15 приведены профили давления и скорости, определяемые формулами (18), (19) на момент времени $t = 0{,}003$ с. За это время начальное возмущение смещается почти на два своих начальных продольных размера.

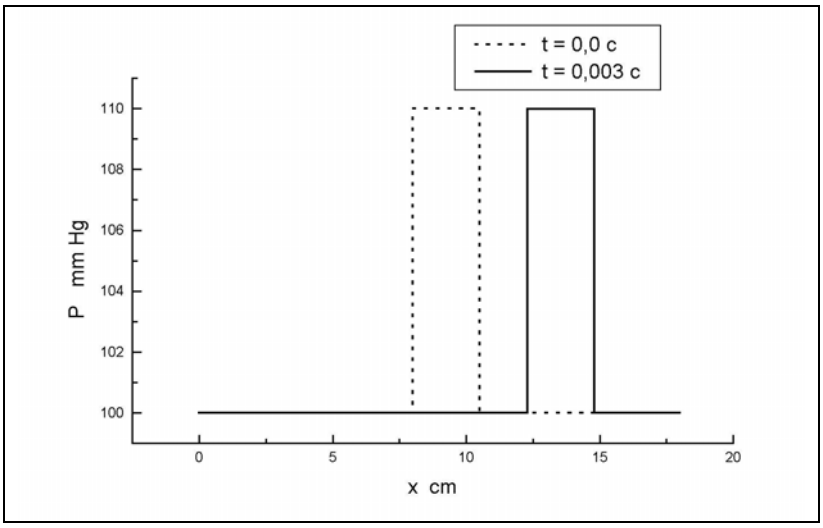


Рис. 14

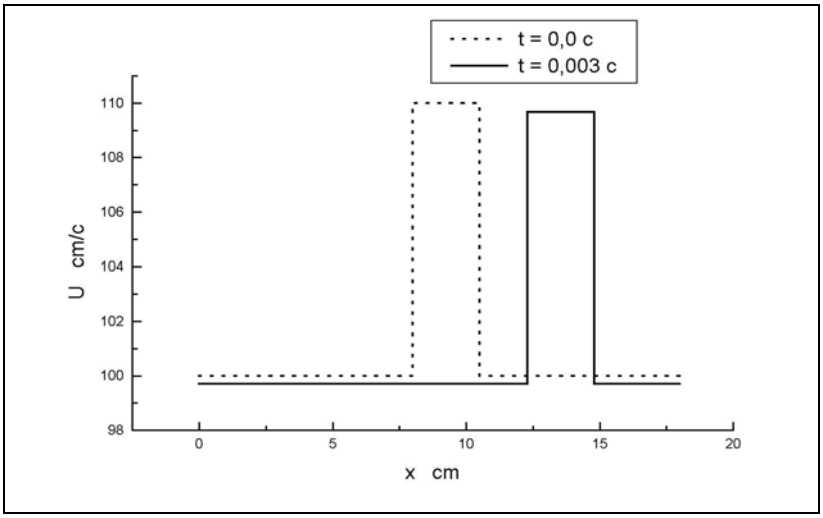


Рис. 15

На данный момент времени в выбранных на рисунках масштабах нет заметных различий в профилях, описываемых формулами (18), (19) при $\overline{m} = 0{,}075$ и $\overline{m} = 0$. Влияние на профиль давления и скорости, слагаемых пропорциональных произведению $\varepsilon\overline{m}$, проявляется на более поздние моменты времени. Так, например, на Рис.16 и Рис.17 представлены профиль давления и профиль скорости на момент времени равный $t = 0{,}8\ c$.

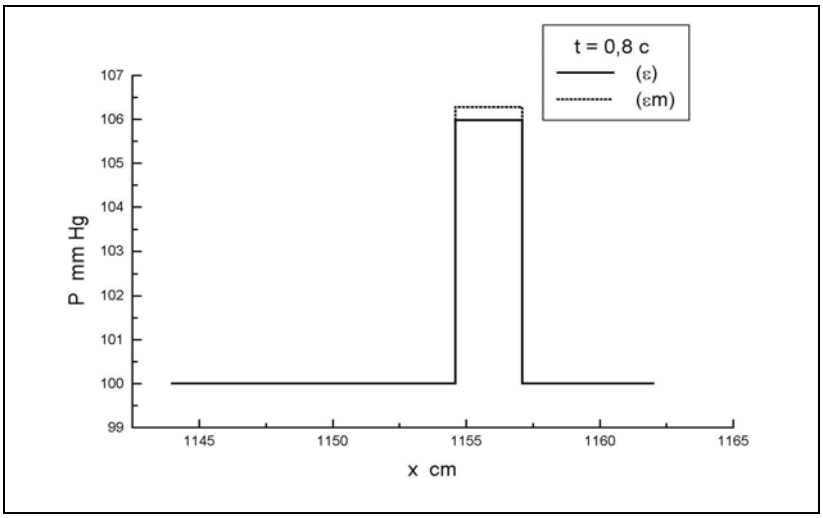


Рис. 16

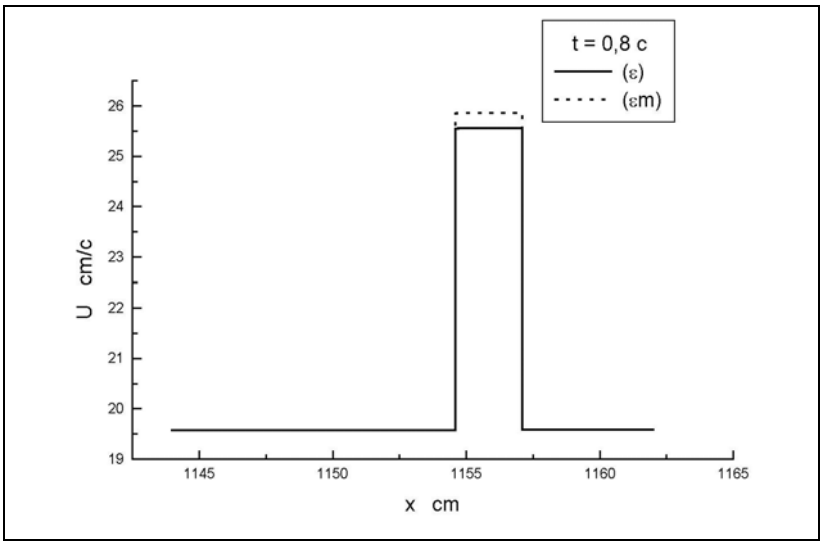


Рис. 17

На Рис.16 и Рис.17 видно, что амплитуда возмущений фоновых значений давления и скорости уменьшается с ростом времени. На текущий момент времени ($t = 0{,}8\ c$) заметно отличие амплитуды возмущения для профилей соответствующих значению $\overline{m} = 0$ и $\overline{m} = 0{,}075$.

В формулах (18), (19) присутствуют выражения, описывающие изменение фоновых значений давления и скорости в областях лежащих за распространяющейся волной (Рис.4 и Рис.5). Однако, на Рис.16 и Рис.17 изменений в фоновых значениях давления и скорости практически не видно. Это связано с тем, что в случае используемых в данном параграфе числовых значений параметров сосуда, фонового течения и параметров внесенных

возмущений изменения фоновых значений давления и скорости малы и в масштабе Рис.16 и Рис.17 не заметны.

Отметим также, что анализ формул $(9')$ позволяет сделать следующее заключение, которое строго обосновывается в §2. Уменьшение амплитуды возмущений давления и скорости во времени пропорционально множителю вида $Exp\left(-\frac{\varepsilon}{2\bar{s}}\cdot t\right)$ при использовании безразмерных переменных. В случае использования исходных размерных переменных этот множитель принимает вид $Exp\left(-\frac{4\pi\nu}{\bar{s}}\cdot t\right)$. Фоновое значение скорости уменьшается заметно быстрее.

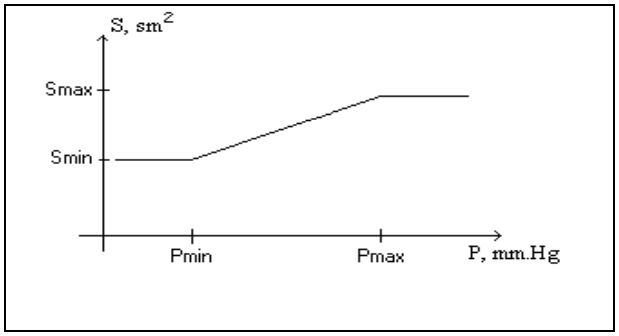
Постановка расчетной задачи и результаты численного решения. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнений гемодинамики с трением в одном сосуде:

$$S_t + (SU)_x = 0, \qquad U_t + \left(\frac{U^2}{2} + \frac{P}{\rho}\right)_x = -8\pi\nu\cdot\frac{U}{S}, \qquad 0 < x < 80, \quad t > 0,$$

$$S = S(P), \quad P(x,0) = \bar{p} + \varphi(x), \quad U(x,0) = \bar{u} + \psi(x), \quad 0 \le x \le 80,$$

$$P(0,t) = \bar{p}, \quad P(80,t) = \bar{p}, \quad t \ge 0.$$

Здесь $\varphi(x) = \begin{cases} 0\ , \textit{если}\ x \in [0\ ,\ 8] \cup [10.5\ ,\ 80] \\ A\ , \textit{если}\ x \in (8\ ,\ 10.5) \end{cases}$ и $\psi(x) = \frac{1}{\rho\bar{c}}\left(\varphi(x) + \bar{p}\right) - \bar{u}$. В качестве $S(P)$ использовалась кусочно-линейная функция, график которой имеет вид:



Эта задача решалась численно с помощью комплекса программ CVSS. В расчетах использованы следующие числовые значения параметров задачи: $\bar{p} = 100$ мм.рт.ст., $\bar{u} = 100$ см/с, $\rho = 1\ г/см^3$, $\nu = 0{,}04\ см^2/с$, $A = 10$ мм.рт.ст., Pmin=50мм.рт.ст., Pmax=150мм.рт.ст., Smin=0,9625 см^2, Smax=1,0375 см^2. Шаг разностной сетки по пространству равен 0,1 см, а шаг сетки по времени равен $2\cdot 10^{-5}$ с.

Графики на Рис.18 и Рис.19 иллюстрируют влияние гладкости профиля начального условия на результаты расчетов. На Рис.18 показаны три вида профилей начального давления. Профиль типа "A" - это возмущение фонового давления на одинаковое значение на конечном отрезке. Профиль типа "B" - это возмущение в форме трапеции на том же конечном отрезке. Профиль "C" - возмущение в форме треугольника. На Рис.19 представлены результаты численных расчетов эволюции начальных возмущений типа "A", "B" и "C". Расчеты выполнены с использованием программного комплекса CVSS. В численном решении наблюдается появление "паразитных" осцилляций,

связанных с разрывным характером начальных профилей давления и скорости. Амплитуда осцилляций в численном решении уменьшается по мере уменьшения максимума модуля производной по пространственной переменной x от функции, определяющей профиль начального возмущения.

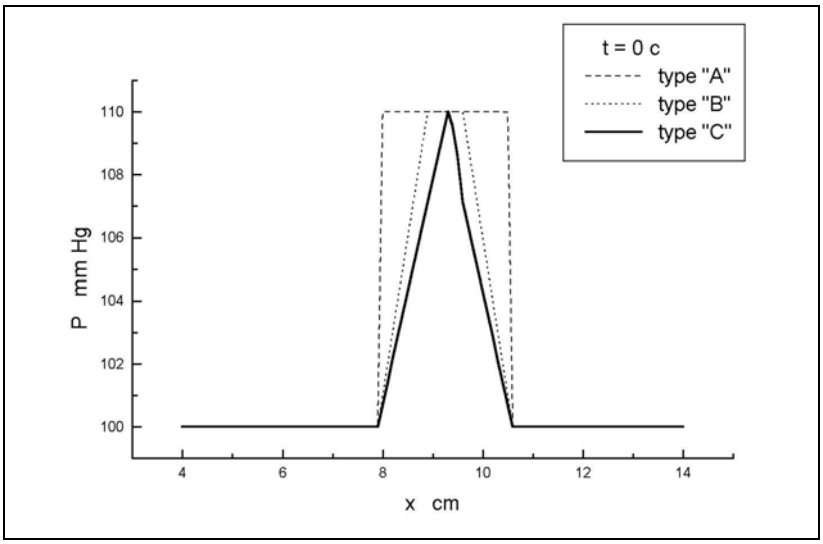


Рис. 18

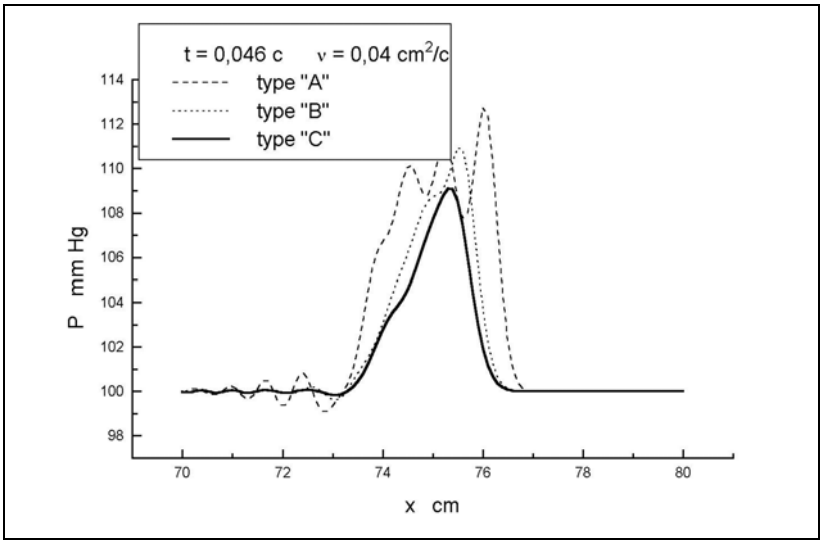


Рис. 19

Подбор оптимального (см. [5]) набора значений параметров разностной схемы, реализованной в программном комплексе CVSS, позволяет избавиться от осцилляций.

§2. Решение задачи Коши для системы двух неоднородных линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа с постоянными коэффициентами.

§2. Решение задачи Коши для системы двух неоднородных линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа с постоянными коэффициентами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу Коши для системы двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial \vec{Y}}{\partial t} + A\frac{\partial \vec{Y}}{\partial x} + B\vec{Y} = \vec{W}, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad 0 < t, \qquad (29)$$

$$\vec{Y}\big|_{t=0} = \vec{Y}_0(x), \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Здесь векторы столбцы $\vec{Y} = \left(y_1(x,t), y_2(x,t)\right)^T$, $\vec{Y}_0 = \left(y_1^0(x), y_2^0(x)\right)^T$,

$\vec{W} = \left(w_1(x,t), w_2(x,t)\right)^T$ и матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

Пусть оба собственных значения матрицы A вещественны и существуют два линейно независимых левых собственных вектора матрицы A, образующие базис на плоскости При этом система уравнений (29) является системой гиперболического типа [6].

Данные предположения выполнены, например, в случае, когда $a_{i,j}$ $(i, j = 1, 2)$ вещественные числа и для них выполнено неравенство $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} > 0$. При этом матрица A имеет два действительных различных собственных значения $\lambda^+ = \dfrac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}$,

$$\lambda^- = \frac{a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2} \qquad (30)$$

и соответствующие им линейно независимые левые собственные векторы строки $\vec{\ell}^+ = \left(\dfrac{a_{21}}{\lambda^+ - a_{11}} l_2^+, l_2^+\right) = \left(\dfrac{\lambda^+ - a_{22}}{a_{12}} l_2^+, l_2^+\right)$ и

$\vec{\ell}^- = \left(\dfrac{a_{21}}{\lambda^- - a_{11}} l_2^-, l_2^-\right) = \left(\dfrac{\lambda^- - a_{22}}{a_{12}} l_2^-, l_2^-\right)$, где $l_2^{\pm} \neq 0$ и $a_{12}, a_{21} \neq 0$.

Введем в рассмотрение матрицы $L = \begin{pmatrix} \vec{\ell}^+ \\ \vec{\ell}^- \end{pmatrix}$ и $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda^+ & 0 \\ 0 & \lambda^- \end{pmatrix}$, для которых справедливо равенство

$$L\,A = \Lambda\,L. \qquad (31)$$

В силу линейной независимости векторов $\vec{l}^{\,+}$ и $\vec{l}^{\,-}$ выполнено условие $\det L \neq 0$.

2. Преобразование уравнений к инвариантной форме. Умножим векторное уравнение (29) слева на матрицу L. В силу (31) получим

$$L\frac{\partial \vec{Y}}{\partial t} + \Lambda L\frac{\partial \vec{Y}}{\partial x} + LB\vec{Y} = L\vec{W}. \qquad (32)$$

Из вида формул (30) для элементов матрицы L следует, что во все слагаемые первой скалярной компоненты векторного уравнения (32) входит одинаковый числовой множитель l_2^+. Все слагаемые второй компоненты векторного уравнения (32) содержат одинаковый числовой множитель l_2^-. На эти числовые множители каждое из скалярных уравнений можно разделить. Этот факт означает, что без ограничения общности рассмотрения, в целях упрощения форм записи формул, всюду в дальнейшем для параметров $l_2^\pm$ можно выбрать значения $l_2^+ = l_2^- = 1$.

Введем обозначение $L\vec{Y} = \vec{F}$, где вектор $\vec{F}$ имеет компоненты $\vec{F} = \left(F^+, F^-\right)^T$. Тогда, подставляя в (32) $\vec{Y} = L^{-1}\vec{F}$, имеем исходную систему уравнений, записанную в инвариантах

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + LBL^{-1}\vec{F} = L\vec{W}. \qquad (33)$$

Умножая начальное условие в задаче (29) на матрицу L слева, получаем начальное условие для системы уравнений (33) $\vec{F}\big|_{t=0} = \vec{F}_0(x)$, где $\vec{F}_0(x) = L\vec{Y}_0(x)$.

<u>*Частный случай.*</u> *Пусть произведение матриц* $LBL^{-1} = D$, *где матрица* $D = \begin{pmatrix} d^+ & 0 \\ 0 & d^- \end{pmatrix}$ *- диагональная матрица, а вектор* $\vec{W} = 0$.

Тогда, в соответствие с (33), для функций F^+ *и* F^-, *являющихся компонентами вектора* $\vec{F}$, *выполнено уравнение* $\frac{\partial F^\pm}{\partial t} + \lambda^\pm \frac{\partial F^\pm}{\partial x} + d^\pm F^\pm = 0$. *Проведем замену искомых функций* $F^\pm$ *на функции* $f^\pm$ *в соответствие с уравнениями связи вида* $F^\pm = f^\pm \cdot e^{-d^\pm \cdot t}$. *В этом случае для функций* $f^\pm$ *получаем уравнение* $\frac{\partial f^\pm}{\partial t} + \lambda^\pm \frac{\partial f^\pm}{\partial x} = 0$. *Общим решением данного уравнения являются бегущие волны, то есть* $f^+ = f^+(x - \lambda^+ t)$ *и* $f^- = f^-(x - \lambda^- t)$.

Таким образом, в рассматриваемом частном случае, общим решением уравнения (33) является вектор с компонентами $F^+ = f^+(x - \lambda^+ t) \cdot e^{-d^+ t}$ *и* $F^- = f^-(x - \lambda^- t) \cdot e^{-d^- t}$, *которые есть бегущие волны. Амплитуды этих бегущих волн меняются во времени по экспоненциальному закону.*

Рассмотрим уравнение (33) в общем случае, когда произведение матриц $LBL^{-1} = R$, где результирующая матрица $R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$.

Приведем явное выражение для элементов r_{ij} $(i, j = 1,2)$. Матрица L^{-1} имеет вид $L^{-1} = \dfrac{1}{\det L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\dfrac{a_{21}}{\lambda^- - a_{11}} & \dfrac{a_{21}}{\lambda^+ - a_{11}} \end{pmatrix}$, где $\det L = \dfrac{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{a_{12}}$.

Выполняя умножение матриц L, B и L^{-1} получаем:

$$r_{11} = \frac{b_{11} + b_{22}}{2} + \frac{(a_{22} - a_{11})(b_{22} - b_{11}) + 2a_{12}b_{21} + 2a_{21}b_{12}}{2\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}},$$

$$r_{12} = \frac{a_{12}\, a_{21}}{(\lambda^+ - a_{11})\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}} \cdot \left(b_{22} - b_{11} + \frac{a_{21}\, b_{12}}{\lambda^+ - a_{11}} - \frac{b_{21}(\lambda^+ - a_{11})}{a_{21}} \right),$$

$$r_{21} = \frac{a_{12}\, a_{21}}{(\lambda^- - a_{11})\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}} \cdot \left(b_{11} - b_{22} - \frac{a_{21}\, b_{12}}{\lambda^- - a_{11}} + \frac{b_{21}(\lambda^- - a_{11})}{a_{21}} \right),$$

$$r_{22} = \frac{b_{11} + b_{22}}{2} - \frac{(a_{22} - a_{11})(b_{22} - b_{11}) + 2a_{12}b_{21} + 2a_{21}b_{12}}{2\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}. \qquad (34)$$

Представим искомый вектор $\vec{F}$ в виде

$$\vec{F} = \vec{f} \cdot \exp(\mu t + \nu x), \qquad (35)$$

где вектор $\vec{f} = (f^+, f^-)^T$. Здесь μ и ν числовые параметры.

Подставляя (35) в (33), получаем следующее уравнение

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \widetilde{D}\, \vec{f} = \vec{G}, \qquad (36)$$

где матрица $\widetilde{D} = \mu E + \nu \Lambda + R$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и вектор $\vec{G} = (G^+, G^-)^T = \exp(-\mu t - \nu x) \cdot L\vec{W}$.

Числовые значения констант μ и ν выберем так, чтобы оба диагональных элемента матрицы $\widetilde{D}$ были равны нулю. В этом случае, как мы увидим в дальнейшем, отдельные дифференциальные уравнения второго порядка для каждой из компонент вектора $\vec{f}$ не будут содержать частных производных первого порядка.

Условие равенства нулю диагональных элементов приводит к системе из двух линейных алгебраических уравнений относительно констант μ и ν:

$$\begin{cases} \mu + \lambda^+ \nu + r_{11} = 0, \\ \mu + \lambda^- \nu + r_{22} = 0. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений с учетом формул (30) и (34) получаем:

$$\mu = \frac{(a_{11} + a_{22})(a_{12}\, b_{21} + a_{21}\, b_{12}) - (a_{11} - a_{22})(a_{11}\, b_{22} - a_{22}\, b_{11}) - 2a_{12}\, a_{21}(b_{11} + b_{22})}{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}\, a_{21}},$$

$$\nu = \frac{(a_{11} - a_{22})(b_{22} - b_{11}) - 2a_{12}\, b_{21} - 2a_{21}\, b_{12}}{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}\, a_{21}}. \qquad (37)$$

Векторное уравнение (36), записанное для компонент имеет вид:

$$\frac{\partial f^+}{\partial t} + \lambda^+ \frac{\partial f^+}{\partial x} + r_{12}\, f^- = G^+, \qquad (38)$$

$$\frac{\partial f^-}{\partial t}+\lambda^-\frac{\partial f^-}{\partial x}+r_{21}f^+=G^-, \qquad (39)$$

где $G^+=\left(\frac{a_{21}}{\lambda^+-a_{11}}w_1+w_2\right)\cdot\exp(-\mu t-\nu x)$, $G^+=\left(\frac{a_{21}}{\lambda^--a_{11}}w_1+w_2\right)\cdot\exp(-\mu t-\nu x)$.

Используя уравнения (38) и (39), получим отдельные уравнения для каждой из функций f^+ и f^-. Для этого решим (38) относительно f^- и подставим результат в (39). В результате приходим к отдельному уравнению для функции f^+

$$\frac{\partial^2 f^+}{\partial t^2}+(\lambda^++\lambda^-)\frac{\partial^2 f^+}{\partial x\partial t}+\lambda^+\lambda^-\frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2}-r_{12}r_{21}f^+=g^+. \qquad (40)$$

Здесь $g^+=\frac{\partial G^+}{\partial t}+\lambda^-\frac{\partial G^+}{\partial x}-r_{12}G^-$.

Аналогично поступаем для получения отдельного уравнения для функции f^-. Решим (39) относительно f^+ и подставим результат в (38). При этом имеем уравнение для функции f^-

$$\frac{\partial^2 f^-}{\partial t^2}+(\lambda^++\lambda^-)\frac{\partial^2 f^-}{\partial x\partial t}+\lambda^+\lambda^-\frac{\partial^2 f^-}{\partial x^2}-r_{12}r_{21}f^-=g^-, \qquad (41)$$

где $g^-=\frac{\partial G^-}{\partial t}+\lambda^+\frac{\partial G^-}{\partial x}-r_{21}G^+$.

Уравнения (40) и (41) для функций f^+ и f^-, соответственно, различаются только видом функций g^+ и g^-, которые стоят в правых частях уравнений.

Для однозначной разрешимости уравнений (40), (41) используются значения функций $\vec{f}$ и $\frac{\partial\vec{f}}{\partial t}$ в момент времени $t=0$. В соответствие с (33), (35), (36)

$$\vec{f}\big|_{t=0}=\vec{f}_0(x), \qquad \text{где } \vec{f}_0(x)=\left(f_0^+(x),\,f_0^-(x)\right)^T=\vec{F}_0(x)\cdot\exp(-\nu x),$$

и
$$\left.\frac{\partial\vec{f}}{\partial t}\right|_{t=0}=\vec{G}\big|_{t=0}-\Lambda\frac{d\vec{f}_0}{dx}-\tilde{D}\,\vec{f}_0. \qquad (42)$$

3. Каноническая форма задачи. Запишем уравнения (40) и (41) в канонической форме. Для этого совершим замену независимых переменных x, t на новые переменные α, β в соответствие с уравнениями связи

$$\alpha=x-\frac{\lambda^++\lambda^-}{2}t, \qquad \beta=\frac{\lambda^+-\lambda^-}{2}t. \qquad (43)$$

Переменные α, β принимают значения $\alpha\in(-\infty,+\infty)$, $\beta\in[0,+\infty)$. Имеют место следующие формулы, связывающие производные в исходных и новых независимых переменных:

$$\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial t^2}=\frac{(\lambda^++\lambda^-)^2}{4}\cdot\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial\alpha^2}-\frac{(\lambda^+)^2-(\lambda^-)^2}{2}\cdot\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{(\lambda^+-\lambda^-)^2}{4}\cdot\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial\beta^2},$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x\,\partial t} = -\frac{\lambda^+ + \lambda^-}{2}\cdot\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial \alpha^2} + \frac{\lambda^+ - \lambda^-}{2}\cdot\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial \alpha\,\partial \beta}, \qquad \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial \alpha^2}.$$

Тогда, в новых переменных уравнения (40), (41) принимают вид

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial \beta^2} + \gamma\,\vec{f} = \vec{g}, \tag{44}$$

где $\gamma = \dfrac{4 r_{12}\, r_{21}}{\left(\lambda^+ - \lambda^-\right)^2}$, и $\vec{g} = -\dfrac{4}{\left(\lambda^+ - \lambda^-\right)^2}\cdot\left(g^+\,,\, g^-\right)^T$.

Выполнив замену переменных и в начальных условиях (42), получаем дополнительные условия, замыкающие уравнения (44)

$$\vec{f}\Big|_{\beta=0} = \vec{f}_0(\alpha), \qquad \left.\frac{\partial \vec{f}}{\partial \beta}\right|_{\beta=0} = \frac{2}{\lambda^+ - \lambda^-}\cdot\vec{G}\Big|_{\beta=0} + I\,\frac{d\vec{f}_0(\alpha)}{d\alpha} - \frac{2}{\lambda^+ - \lambda^-}\cdot\widetilde{D}\,\vec{f}_0, \tag{45}$$

где диагональная матрица $I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Уравнение (44), рассматриваемое в полуплоскости $\beta > 0$, в совокупности с начальными условиями (45) определяют задачу Коши, записанную в независимых переменных α, β.

4. Интегральное тождество. Получим интегральное тождество, справедливое для решения рассматриваемой задачи Коши. С этой целью проинтегрируем уравнение (44), записанное для каждой из компонент, по области D (Рис.20) в плоскости независимых переменных α и β.

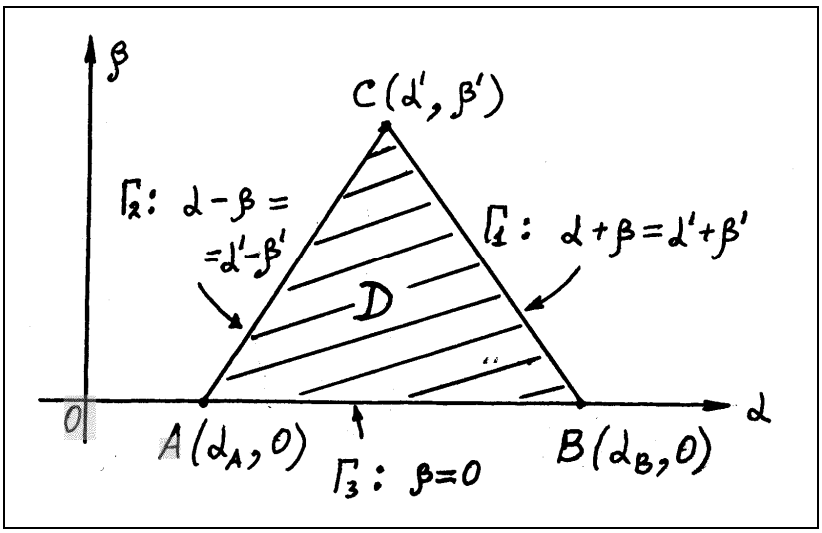


Рис. 20

Область D представляет собой характеристический треугольник с вершинами в точках $A(\alpha_A, 0)$, $B(\alpha_B, 0)$ и $C(\alpha', \beta')$. Точка $C(\alpha', \beta')$ является произвольной точкой полуплоскости $\beta > 0$. Отрезок AC принадлежит прямой $\alpha - \beta = \alpha_A$, проходящей через точку C. Следовательно, координата $\alpha_A = \alpha' - \beta'$. Отрезок BC принадлежит прямой $\alpha + \beta = \alpha_B$, также проходящей через точку C. Следовательно, координата $\alpha_B = \alpha' + \beta'$.

Интегрируя уравнение (44) для компоненты f^+, имеем:

$$-\frac{4}{\left(\lambda^+-\lambda^-\right)^2}\iint_D g^+(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta=\iint_D\left(f^+_{\alpha\alpha}-f^+_{\beta\beta}+\gamma\cdot f^+\right)d\alpha d\beta=$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial f^+}{\partial\alpha}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial f^+}{\partial\beta}\right)\right)d\alpha d\beta\quad+\gamma\iint_D f^+(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta.$$

Используя формулу Грина для сведения двойного интеграла к контурному интегралу, получаем:

$$-\frac{4}{\left(\lambda^+-\lambda^-\right)^2}\iint_D g^+(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta=\oint_\Gamma\frac{\partial f^+}{\partial\alpha}d\beta+\frac{\partial f^+}{\partial\beta}d\alpha+\gamma\iint_D f^+d\alpha d\beta=$$

$$=\left\{\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3\right\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\int_{\Gamma_i}\frac{\partial f^+}{\partial\alpha}d\beta+\frac{\partial f^+}{\partial\beta}d\alpha\ +\gamma\iint_D f^+d\alpha d\beta\cdot \tag{46}$$

Здесь, контур Γ_1 есть отрезок прямой $\alpha+\beta=\alpha_B$, контур Γ_2 - отрезок прямой $\alpha-\beta=\alpha_A$, а контур Γ_3 - это отрезок оси α $(\beta=0)$.

Вычислим по отдельности интегралы по каждому из контуров Γ_i $(i=1,2,3)$. Интегрируя вдоль линии Γ_1, которая есть отрезок прямой $\alpha+\beta=\alpha_B$, имеем:

$$\int_{\Gamma_1}\frac{\partial f^+}{\partial\alpha}d\beta+\frac{\partial f^+}{\partial\beta}d\alpha=$$

$$=\left\{\beta(\tau)=\tau,\quad\alpha(\tau)=\alpha_B-\tau,\quad\tau\in[0,\beta']\Rightarrow\quad d\beta=d\tau,\quad d\alpha=-d\tau\right\}=$$

$$=\int_0^{\beta'}\left(f^+_\alpha\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)-f^+_\beta\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)\right)d\tau=$$

$$=\left\{\frac{df^+\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)}{d\tau}=f^+_\alpha\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)\cdot\frac{d\alpha(\tau)}{d\tau}+\right.$$

$$\left.+f^+_\beta\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)\cdot\frac{d\beta(\tau)}{d\tau}=-f^+_\alpha\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)+f^+_\beta\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)\right\}=$$

$$=-\int_0^{\beta'}\frac{df^+\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)}{d\tau}d\tau=-f^+(\alpha',\beta')+f^+(\alpha_B,0)=-f^+(\alpha',\beta')+f^+_0(\alpha_B). \tag{47}$$

Аналогично, интегрируя по контуру Γ_2, который является отрезком прямой $\alpha-\beta=\alpha_A$, имеем:

$$\int_{\Gamma_2}\frac{\partial f^+}{\partial\alpha}d\beta+\frac{\partial f^+}{\partial\beta}d\alpha=$$

$$=\left\{\beta(\tau)=\tau,\quad\alpha(\tau)=\alpha_A+\tau,\quad\tau\in[0,\beta']\Rightarrow\quad d\beta=d\tau,\quad d\alpha=d\tau\right\}=$$

$$=-\int_0^{\beta'}\left(f^+_\alpha\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)+f^+_\beta\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)\right)d\tau=$$

$$=\left\{\frac{df^+\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)}{d\tau}=f^+_\alpha\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)\cdot\frac{d\alpha(\tau)}{d\tau}+\right.$$

$$\left.+f^+_\beta\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)\cdot\frac{d\beta(\tau)}{d\tau}=f^+_\alpha\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)+f^+_\beta\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)\right\}=$$

$$=-\int_0^{\beta'}\frac{df^+\big(\alpha(\tau),\beta(\tau)\big)}{d\tau}d\tau=-f^+(\alpha',\beta')+f^+(\alpha_A,0)=-f^+(\alpha',\beta')+f_0^+(\alpha_A)\,. \quad (48)$$

И, наконец, интегрируя по контуру Γ_3, который является отрезком прямой $\beta=0$, имеем:

$$\int_{\Gamma_3}\frac{\partial f^+}{\partial\alpha}d\beta+\frac{\partial f^+}{\partial\beta}d\alpha=$$

$$=\{\beta(\xi)=0\,,\quad \alpha(\xi)=\xi\,,\quad \xi\in[\alpha_A,\alpha_B]\Rightarrow\quad d\beta=0,\quad d\alpha=d\xi\}=$$

$$=\int_{\alpha_A}^{\alpha_B}f_\beta^+\big(\alpha(\xi),\beta(\xi)\big)d\,\xi=\int_{\alpha_A}^{\alpha_B}f_\beta^+\big(\xi,0\big)d\,\xi=$$

={ В соответствие с начальным условием (45) }=

$$=\int_{\alpha_A}^{\alpha_B}\left(\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot G^+(\xi\,,0)-\frac{df_0^+(\xi)}{d\xi}-\frac{2\,r_{12}}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot f_0^-(\xi)\right)d\xi=$$

$$=\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\int_{\alpha_A}^{\alpha_B}G^+(\xi\,,0)\,d\xi-f_0^+(\alpha_B)+f_0^+(\alpha_A)-\frac{2\,r_{12}}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\int_{\alpha_A}^{\alpha_B}f_0^-(\xi)\,d\xi\,. \quad (49)$$

Подставим в (46) выражения (47), (48) и (49) для контурных интегралов. Полученное соотношение разрешим относительно функции $f^+(\alpha',\beta')$. В результате получаем:

$$f^+(\alpha',\beta')=f_0^+(\alpha_A)-\frac{r_{12}}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\int_{\alpha_A}^{\alpha_B}f_0^-\big(\xi\big)d\xi+\frac{\gamma}{2}\cdot\iint_D f^+(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta+$$

$$+\frac{1}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\int_{\alpha_A}^{\alpha_B}G^+(\xi\,,0)\,d\xi+\frac{2}{\big(\lambda^+-\lambda^-\big)^2}\iint_D g^+(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta\,. \quad (50)$$

Вернемся в соотношении (50) к исходным независимым переменным x и t, которые связаны с переменными α, β уравнениями связи (43). В результате получаем искомое интегральное тождество для функции f^+:

$$f^+(x',t')=f_0^+(x'-\lambda^+t')-\frac{r_{12}}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\int_{x'-\lambda^+t'}^{x'-\lambda^-t'}f_0^-\big(\xi\big)d\xi+\frac{r_{12}\,r_{21}}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\iint_{\overline{D}}f^+(x,t)\,dxdt+$$

$$+\frac{1}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\int_{x'-\lambda^+t'}^{x'-\lambda^-t'}G^+(\xi\,,0)\,d\xi+\frac{1}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\iint_{\overline{D}}g^+(x,\,t)\,dxdt\,. \quad (51)$$

Здесь область $\overline{D}$ - это характеристический треугольник в плоскости независимых переменных x, t с вершинами в точках $C\big(x',t'\big)$, $A\big(x'-\lambda^+t',0\big)$ и $B\big(x'-\lambda^-t',0\big)$.

Теперь получим интегральное тождество для функции $f^-(x',t')$, аналогичное (51). Для этого интегрируем уравнение (44) для функции f^- по области D (Рис.22). При этом имеем:

$$-\frac{4}{\big(\lambda^+-\lambda^-\big)^2}\iint_D g^-(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta=\iint_D\big(f_{\alpha\alpha}^--f_{\beta\beta}^-+\gamma\cdot f^-\big)d\alpha d\beta=$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial f^-}{\partial\alpha}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial f^-}{\partial\beta}\right)\right)d\alpha d\beta\quad+\gamma\iint_D f^-(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta\,.$$

Используя формулу Грина для сведения двойного интеграла к контурному интегралу, получаем:

$$-\frac{4}{\left(\lambda^{+}-\lambda^{-}\right)^{2}}\iint_{D} g^{-}(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta=\oint_{\Gamma}\frac{\partial f^{-}}{\partial\alpha}d\beta+\frac{\partial f^{-}}{\partial\beta}d\alpha+\gamma\iint_{D} f^{-}d\alpha d\beta=$$

$$=\left\{\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3\right\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\int_{\Gamma_i}\frac{\partial f^{-}}{\partial\alpha}d\beta+\frac{\partial f^{-}}{\partial\beta}d\alpha+\gamma\iint_{D} f^{-}d\alpha d\beta\cdot \qquad (52)$$

Здесь, контур Γ_1 есть отрезок прямой $\alpha+\beta=\alpha_B$, контур Γ_2 - отрезок прямой $\alpha-\beta=\alpha_A$, а контур Γ_3 - это отрезок оси α $(\beta=0)$. Вычислим по отдельности интегралы по каждому из контуров Γ_i $(i=1,2,3)$.

Интегрируя вдоль линии Γ_1, которая есть отрезок прямой $\alpha+\beta=\alpha_B$, имеем:

$$\int_{\Gamma_1}\frac{\partial f^{-}}{\partial\alpha}d\beta+\frac{\partial f^{-}}{\partial\beta}d\alpha=$$

$$=\left\{\beta(\tau)=\tau,\quad \alpha(\tau)=\alpha_B-\tau,\quad \tau\in[0,\beta']\Rightarrow\quad d\beta=d\tau,\quad d\alpha=-d\tau\right\}=$$

$$=\int_{0}^{\beta'}\left(f_{\alpha}^{-}\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)-f_{\beta}^{-}\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)\right)d\tau=$$

$$=\left\{\frac{df^{-}\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)}{d\tau}=f_{\alpha}^{-}\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)\cdot\frac{d\alpha(\tau)}{d\tau}+\right.$$

$$\left.+f_{\beta}^{-}\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)\cdot\frac{d\beta(\tau)}{d\tau}=-f_{\alpha}^{-}\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)+f_{\beta}^{-}\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)\right\}=$$

$$=-\int_{0}^{\beta'}\frac{df^{+}\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)}{d\tau}d\tau=-f^{+}(\alpha',\beta')+f^{+}(\alpha_B,0)=-f^{+}(\alpha',\beta')+f_0^{+}(\alpha_B)\,. \qquad (53)$$

Аналогично, интегрируя по контуру Γ_2, который является отрезком прямой $\alpha-\beta=\alpha_A$, имеем:

$$\int_{\Gamma_2}\frac{\partial f^{-}}{\partial\alpha}d\beta+\frac{\partial f^{-}}{\partial\beta}d\alpha=$$

$$=\left\{\beta(\tau)=\tau,\quad \alpha(\tau)=\alpha_A+\tau,\quad \tau\in[0,\beta']\Rightarrow\quad d\beta=d\tau,\quad d\alpha=d\tau\right\}=$$

$$=-\int_{0}^{\beta'}\left(f_{\alpha}^{-}\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)+f_{\beta}^{-}\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)\right)d\tau=$$

$$=\left\{\frac{df^{-}\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)}{d\tau}=f_{\alpha}^{-}\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)\cdot\frac{d\alpha(\tau)}{d\tau}+\right.$$

$$\left.+f_{\beta}^{-}\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)\cdot\frac{d\beta(\tau)}{d\tau}=f_{\alpha}^{-}\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)+f_{\beta}^{-}\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)\right\}=$$

$$=-\int_{0}^{\beta'}\frac{df^{-}\left(\alpha(\tau),\beta(\tau)\right)}{d\tau}d\tau=-f^{-}(\alpha',\beta')+f^{-}(\alpha_A,0)=-f^{-}(\alpha',\beta')+f_0^{-}(\alpha_A)\,. \qquad (54)$$

Интегрируя по контуру Γ_3, который является отрезком прямой $\beta=0$, имеем:

$$\int_{\Gamma_3}\frac{\partial f^{-}}{\partial\alpha}d\beta+\frac{\partial f^{-}}{\partial\beta}d\alpha=$$

$$=\left\{\beta(\xi)=0,\quad \alpha(\xi)=\xi,\quad \xi\in[\alpha_A,\alpha_B]\Rightarrow\quad d\beta=0,\quad d\alpha=d\xi\right\}=$$

$$= \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} f_\beta^-\big(\alpha(\xi),\beta(\xi)\big)d\,\xi = \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} f_\beta^-\big(\xi,0\big)d\,\xi =$$

={ В соответствие с начальным условием (45) }=

$$= \int_{\alpha_A}^{\alpha_B}\left(\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot G^-(\xi\,,0)+\frac{df_0^-(\xi)}{d\xi}-\frac{2r_{21}}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot f_0^+(\xi)\right)d\xi =$$

$$= \frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\int_{\alpha_A}^{\alpha_B} G^-(\xi\,,0)\,d\xi + f_0^-(\alpha_B)-f_0^-(\alpha_A)-\frac{2r_{21}}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\int_{\alpha_A}^{\alpha_B} f_0^+(\xi)\,d\xi\,. \quad (55)$$

Подставим в (52) выражения (53), (54) и (55) для контурных интегралов. Полученное соотношение разрешим относительно функции $f^-(\alpha',\beta')$. В результате приходим к равенству:

$$f^-(\alpha',\beta') = f_0^-(\alpha_B)-\frac{r_{21}}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\int_{\alpha_A}^{\alpha_B} f_0^+\big(\xi\big)d\xi+\frac{\gamma}{2}\cdot\iint_D f^-(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta +$$

$$+\frac{1}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\int_{\alpha_A}^{\alpha_B} G^-(\xi\,,0)\,d\xi+\frac{2}{\big(\lambda^+-\lambda^-\big)^2}\iint_D g^-(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta\,. \quad (56)$$

Вернемся в соотношении (56) к исходным переменным x и t, которые связаны с переменными α, β уравнениями связи (43). В результате получаем искомое интегральное тождество и для функции f^-:

$$f^-(x',t') = f_0^-(x'-\lambda^-t')-\frac{r_{21}}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\int_{x'-\lambda^+t'}^{x'-\lambda^-t'} f_0^+\big(\xi\big)d\xi+\frac{r_{12}\,r_{21}}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\iint_{\overline{D}} f^-(x,t)\,dxdt +$$

$$+\frac{1}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\int_{x'-\lambda^+t'}^{x'-\lambda^-t'} G^-(\xi\,,0)\,d\xi+\frac{1}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\iint_{\overline{D}} g^-(x,\,t)\,dxdt\,. \quad (57)$$

Область $\overline{D}$ - это характеристический треугольник в плоскости независимых переменных x, t с вершинами в точках $C\big(x',t'\big)$, $A\big(x'-\lambda^+t',0\big)$ и $B\big(x'-\lambda^-t',0\big)$.

<u>Частный случай.</u> В заключение данного пункта рассмотрим полученные интегральные тождества (51) и (57) в отдельном частном случае. Пусть исходная система линейных дифференциальных уравнений имеет вид (3′). То есть, параметры и переменные, имеющиеся в задаче (29,) принимают следующие значения:

$$a_{11}=a_{22}=\overline{u}\,,\qquad a_{12}=\rho_*\,\overline{c}^{\,2},\qquad a_{21}=\frac{1}{\rho_*},$$

$$y_1(x\,,t)=\widetilde{p}(x\,,t),\quad y_2(x\,,t)=U(x\,,t),\quad b_{11}=b_{12}=0\,,\quad b_{21}=-\frac{\varepsilon\,\overline{m}}{\rho_*\overline{s}\,\overline{c}}\,,$$

$$b_{22}=\frac{\varepsilon}{\overline{s}}\,,\qquad w_1(x,t)=w_2(x,t)\equiv 0\,.$$

Тогда можно показать, что в соответствие с полученными в данном параграфе формулами (30), (34), (37)

$$\lambda^+=\overline{u}+\overline{c}\,,\quad \lambda^-=\overline{u}-\overline{c}\,,\quad \lambda^+-\lambda^-=2\overline{c}\,,$$

$$G^+(x,t)=G^-(x,t)\equiv 0\,,\qquad g^+(x,t)=g^-(x,t)\equiv 0\,,\qquad \mu=-\varepsilon\cdot\frac{1+\overline{m}^{\,2}}{2\overline{s}}\,,$$

$$\nu = \varepsilon \cdot \frac{\overline{m}}{2\overline{s}\,\overline{c}}, \qquad r_{12} = \varepsilon \cdot \frac{1+\overline{m}}{2\overline{s}}, \qquad r_{21} = \varepsilon \cdot \frac{1-\overline{m}}{2\overline{s}},$$

$L^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \rho_* \overline{c} & -\rho_* \overline{c} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *и, следовательно, интегральные тождества (51), (57) принимают вид:*

$$f^+(x',t') = f_0^+(x' - (\overline{u}+\overline{c})t') - \varepsilon \cdot \frac{1+\overline{m}}{4\overline{s}\,\overline{c}} \cdot \int\limits_{x'-(\overline{u}+\overline{c})t'}^{x'-(\overline{u}-\overline{c})t'} f_0^-(\xi)\,d\xi + \varepsilon^2 \cdot \frac{1-\overline{m}^2}{8\overline{s}^2\,\overline{c}} \cdot \iint\limits_{\overline{D}} f^+(x,t)\,dxdt,$$

$$f^-(x',t') = f_0^-(x' - (\overline{u}-\overline{c})t') - \varepsilon \cdot \frac{1-\overline{m}}{4\overline{s}\,\overline{c}} \cdot \int\limits_{x'-(\overline{u}+\overline{c})t'}^{x'-(\overline{u}-\overline{c})t'} f_0^+(\xi)\,d\xi + \varepsilon^2 \cdot \frac{1-\overline{m}^2}{8\overline{s}^2\,\overline{c}} \cdot \iint\limits_{\overline{D}} f^-(x,t)\,dxdt. \qquad (58)$$

Пусть числовой параметр $\varepsilon << 1$. *Тогда из (58) следует, что с точностью до величин пропорциональных* ε^2

$$f^+(x',t') = f_0^+(x' - (\overline{u}+\overline{c})t') - \varepsilon \cdot \frac{1+\overline{m}}{4\overline{s}\,\overline{c}} \cdot \int\limits_{x'-(\overline{u}+\overline{c})t'}^{x'-(\overline{u}-\overline{c})t'} f_0^-(\xi)\,d\xi$$

и

$$f^-(x',t') = f_0^-(x' - (\overline{u}-\overline{c})t') - \varepsilon \cdot \frac{1-\overline{m}}{4\overline{s}\,\overline{c}} \cdot \int\limits_{x'-(\overline{u}+\overline{c})t'}^{x'-(\overline{u}-\overline{c})t'} f_0^+(\xi)\,d\xi.$$

Подставим эти выражения в (35). В результате получим

$$F^+(x',t') = \left(f_0^+(x' - (\overline{u}+\overline{c})t') - \varepsilon \cdot \frac{1+\overline{m}}{4\overline{s}\,\overline{c}} \cdot \int\limits_{x'-(\overline{u}+\overline{c})t'}^{x'-(\overline{u}-\overline{c})t'} f_0^-(\xi)\,d\xi \right) \cdot \exp\left(-\varepsilon \cdot \frac{1+\overline{m}^2}{2\overline{s}} t' + \varepsilon \cdot \frac{\overline{m}}{2\overline{s}\,\overline{c}} x' \right),$$

$$(59)$$

$$F^-(x',t') = \left(f_0^-(x' - (\overline{u}-\overline{c})t') - \varepsilon \cdot \frac{1-\overline{m}}{4\overline{s}\,\overline{c}} \cdot \int\limits_{x'-(\overline{u}+\overline{c})t'}^{x'-(\overline{u}-\overline{c})t'} f_0^+(\xi)\,d\xi \right) \cdot \exp\left(-\varepsilon \cdot \frac{1+\overline{m}^2}{2\overline{s}} t' + \varepsilon \cdot \frac{\overline{m}}{2\overline{s}\,\overline{c}} x' \right).$$

В силу того, что $\vec{Y} = L^{-1}\vec{F}$, *имеем*

$$\widetilde{p}(x',t') = \frac{\rho_* \overline{c}}{2}\left(F^+ - F^-\right) \quad \text{и} \qquad U(x',t') = \frac{1}{2}\left(F^+ + F^-\right). \qquad (60)$$

В соответствие с (42) $f_0^{\pm}(x) = F_0^{\pm}(x) \cdot \exp\left(-\varepsilon \cdot \frac{\overline{m}}{2\overline{s}\,\overline{c}} x \right)$, *где, как следует из (33) и (3′),* $F_0^{\pm}(x) = \pm \frac{\varphi(x)}{\rho_* \overline{c}} + \overline{u} + \psi(x)$. *Используем условие* $\varepsilon << 1$ *для представления*

$$\exp\left(-\varepsilon \cdot \frac{\overline{m}}{2\overline{s}\,\overline{c}} x' \right) = 1 - \varepsilon \cdot \frac{\overline{m}}{2\overline{s}\,\overline{c}} x' + O(\varepsilon^2) \qquad (61)$$

в интегральных выражениях.

Подставим выражения (59) и (61) в (60). В результате получим для функций $U(x',t')$ *и* $P(x',t') = \overline{p} + \widetilde{p}(x',t')$ *следующие соотношения, верные с точностью до величин пропорциональных* ε^2:

$$P(x',t') = \overline{p} + \exp\left(-\varepsilon \cdot \frac{t'}{2\overline{s}} \right) \cdot p(x',t') + \frac{\varepsilon}{4\overline{s}\,\overline{c}} \cdot \int\limits_{x'-(\overline{u}+\overline{c})t'}^{x'-(\overline{u}-\overline{c})t'} \varphi(\alpha)\,d\alpha +$$

$$+ \varepsilon \cdot \overline{m} \cdot \rho_* \overline{c} \cdot \left(\frac{t'}{2\overline{s}} \cdot u(x',t') - \frac{1}{4\overline{s}\,\overline{c}} \cdot \int\limits_{x'-(\overline{u}+\overline{c})t'}^{x'-(\overline{u}-\overline{c})t'} \psi(\alpha)\,d\alpha \right) + O(\varepsilon^2),$$

$$U(x',t')=\left(\exp\left(-\varepsilon\cdot\frac{t'}{2\bar{s}}\right)-\varepsilon\cdot\frac{t'}{2\bar{s}}\right)\cdot\bar{u}+\exp\left(-\varepsilon\cdot\frac{t'}{2\bar{s}}\right)\cdot u(x',t')-\frac{\varepsilon}{4\bar{s}\bar{c}}\cdot\int\limits_{x'-(\bar{u}+\bar{c})t'}^{x'-(\bar{u}-\bar{c})t'}\psi(\alpha)d\alpha+$$

$$+\varepsilon\cdot\bar{m}\cdot\frac{1}{\rho_*\bar{c}}\cdot\left(\frac{t'}{2\bar{s}}\cdot p(x',t')+\frac{1}{4\bar{s}\bar{c}}\cdot\int\limits_{x'-(\bar{u}+\bar{c})t'}^{x'-(\bar{u}-\bar{c})t'}\varphi(\alpha)d\alpha\right)+O(\varepsilon^2),\qquad (62)$$

где

$$p(x',t')=\frac{\varphi\big(x'-(\bar{u}+\bar{c})t'\big)+\varphi\big(x'-(\bar{u}-\bar{c})t'\big)}{2}+\rho_*\bar{c}\cdot\frac{\psi\big(x'-(\bar{u}+\bar{c})t'\big)-\psi\big(x'-(\bar{u}-\bar{c})t'\big)}{2},$$

$$u(x',t')=\frac{\varphi\big(x'-(\bar{u}+\bar{c})t'\big)-\varphi\big(x'-(\bar{u}-\bar{c})t'\big)}{2\rho_*\bar{c}}+\frac{\psi\big(x'-(\bar{u}+\bar{c})t'\big)+\psi\big(x'-(\bar{u}-\bar{c})t'\big)}{2}.$$

Заметим, что если в формулах (62) представить экспоненциальную зависимость в виде степенных рядов, а именно $\exp\left(-\varepsilon\cdot\frac{t'}{2\bar{s}}\right)=1-\varepsilon\cdot\frac{t'}{2\bar{s}}+\underline{O}(\varepsilon^2)$, *то формулы (62) совпадут с ранее полученными в §1 с использованием метода возмущения по параметру формулами (9).*

Итак, данные функции $U(x',t')$ *и* $P(x',t')$ *являются решением задачи* $(3')$.

5. Решение задачи Коши. Построим решение задачи Коши, определяемой соотношениями (44), (45):

$$\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial\beta^2}+\gamma\vec{f}=\vec{g},\qquad \alpha\in(-\infty,+\infty),\qquad \beta\in(0,+\infty),$$

$$\vec{f}\Big|_{\beta=0}=\vec{f}_0(\alpha),\qquad \left.\frac{\partial\vec{f}}{\partial\beta}\right|_{\beta=0}=\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\vec{G}\Big|_{\beta=0}+I\frac{d\vec{f}_0(\alpha)}{d\alpha}-\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot\widetilde{D}\vec{f}_0,$$

где $\gamma=\frac{4r_{12}r_{21}}{(\lambda^+-\lambda^-)^2}$, $\vec{g}=-\frac{4}{(\lambda^+-\lambda^-)^2}\cdot(g^+,g^-)^T$, $I=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Воспользуемся тем, что, как показано, например, в [7], задача Коши для уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2V}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2V}{\partial\beta^2}+\gamma V=Q,\qquad \alpha\in(-\infty,+\infty),\qquad \beta\in(0,+\infty),$$

$$V\Big|_{\beta=0}=\Phi_0(\alpha),\qquad \left.\frac{\partial V}{\partial\beta}\right|_{\beta=0}=\Phi_1(\alpha)$$

имеет решение, которое может быть представлено в виде

$$V(\alpha,\beta)=\frac{\Phi_0(\alpha-\beta)+\Phi_0(\alpha+\beta)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta}J_0\left(\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{(\alpha-\xi)^2-\beta^2}\right)\cdot\Phi_1(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\int\limits_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta}J_1\left(\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{(\alpha-\xi)^2-\beta^2}\right)\cdot\frac{\beta}{\sqrt{(\alpha-\xi)^2-\beta^2}}\cdot\Phi_0(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\beta}d\eta\int\limits_{\alpha-\beta+\eta}^{\alpha+\beta-\eta}J_0\left(\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{(\alpha-\xi)^2-(\beta-\eta)^2}\right)\cdot Q(\xi,\eta)d\xi.\ (63)$$

Здесь J_0 и J_1 функции Бесселя, соответственно, нулевого и первого порядка. Вывод формулы (63) приводится в [7] и Приложении.

Используем формулу (63) для обеих компонент вектора $\vec{f}$. В случае компоненты f^+ функции Φ_0 и Φ_1, определяющие начальные условия, имеют вид $\Phi_0(\alpha)=f_0^+(\alpha)$ и $\Phi_1(\alpha)=\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot G^+(\alpha\,,0)-\frac{df_0^+(\alpha)}{d\alpha}-\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot r_{12}\,f_0^-(\alpha)$, а правая часть уравнения есть $Q(\alpha\,,\beta)=-\frac{4}{\left(\lambda^+-\lambda^-\right)^2}\cdot g^+\left(\alpha+\frac{\lambda^++\lambda^-}{\lambda^+-\lambda^-}\beta\,,\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\beta\right)$.

Тогда, в соответствие с (63),

$$f^+(\alpha\,,\beta)=\frac{f_0^+(\alpha-\beta)+f_0^+(\alpha+\beta)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta}J_0\left(\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{(\alpha-\xi)^2-\beta^2}\right)\left(\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot G^+(\xi\,,0)-\frac{df_0^+(\xi)}{d\xi}-\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot r_{12}\,f_0^-(\xi)\right)d\xi+$$

$$+\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\int\limits_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta}J_1\left(\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{(\alpha-\xi)^2-\beta^2}\right)\cdot\frac{\beta}{\sqrt{(\alpha-\xi)^2-\beta^2}}\cdot f_0^+(\xi)d\xi+ \qquad (64)$$

$$+\frac{2}{\left(\lambda^+-\lambda^-\right)^2}\int\limits_0^{\beta}d\eta\int\limits_{\alpha-\beta+\eta}^{\alpha+\beta-\eta}J_0\left(\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{(\alpha-\xi)^2-(\beta-\eta)^2}\right)\cdot g^+\left(\xi+\frac{\lambda^++\lambda^-}{\lambda^+-\lambda^-}\eta\,,\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\eta\right)d\xi\,.$$

Для компоненты f^- функции Φ_0 и Φ_1, определяющие начальные условия, имеют вид $\Phi_0(\alpha)=f_0^-(\alpha)$ и $\Phi_1(\alpha)=\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot G^-(\alpha\,,0)-\frac{df_0^-(\alpha)}{d\alpha}-\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot r_{21}\,f_0^+(\alpha)$, а правая часть уравнения есть $Q(\alpha\,,\beta)=-\frac{4}{\left(\lambda^+-\lambda^-\right)^2}\cdot g^-\left(\alpha+\frac{\lambda^++\lambda^-}{\lambda^+-\lambda^-}\beta\,,\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\beta\right)$.

При этом, в соответствие с (63),

$$f^-(\alpha\,,\beta)=\frac{f_0^-(\alpha-\beta)+f_0^-(\alpha+\beta)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta}J_0\left(\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{(\alpha-\xi)^2-\beta^2}\right)\left(\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot G^-(\xi\,,0)+\frac{df_0^-(\xi)}{d\xi}-\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\cdot r_{21}\,f_0^+(\xi)\right)d\xi+$$

$$+\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\int\limits_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta}J_1\left(\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{(\alpha-\xi)^2-\beta^2}\right)\cdot\frac{\beta}{\sqrt{(\alpha-\xi)^2-\beta^2}}\cdot f_0^-(\xi)d\xi+ \qquad (65)$$

$$+\frac{2}{\left(\lambda^+-\lambda^-\right)^2}\int\limits_0^{\beta}d\eta\int\limits_{\alpha-\beta+\eta}^{\alpha+\beta-\eta}J_0\left(\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{(\alpha-\xi)^2-(\beta-\eta)^2}\right)\cdot g^-\left(\xi+\frac{\lambda^++\lambda^-}{\lambda^+-\lambda^-}\eta\,,\frac{2}{\lambda^+-\lambda^-}\eta\right)d\xi\,.$$

Формулы (64) и (65) определяют решение задачи (44), (45).

Выполним в соотношениях (64) и (65) переход к исходным независимым переменным x и t в соответствии с уравнениями связи (43), имеющими вид

$$\alpha=x-\overline{\lambda}\cdot t\,,\ \beta=\Delta\lambda\cdot t \text{ где } \overline{\lambda}=\frac{\lambda^++\lambda^-}{2} \text{ и } \Delta\lambda=\frac{\lambda^+-\lambda^-}{2}\,.$$

Тогда формулы для компонент f^+ и f^- примут вид:

$$f^+(x\,,t)=\frac{f_0^+(x-\lambda^+t)+f_0^+(x-\lambda^-t)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-\lambda^+ t}^{x-\lambda^- t} J_0\left(\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\left(x-\bar{\lambda}\,t-\xi\right)^2-\left(\Delta\lambda\,t\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\Delta\lambda}\cdot G^+(\xi\,,0)-\frac{df_0^+(\xi)}{d\xi}-\frac{r_{12}}{\Delta\lambda}\cdot f_0^-(\xi)\right)d\xi$$

$$+\frac{\sqrt{\gamma}\cdot\Delta\lambda}{2}t\int\limits_{x-\lambda^+ t}^{x-\lambda^- t} J_1\left(\sqrt{\gamma}\sqrt{\left(x-\bar{\lambda}\,t-\xi\right)^2-\left(\Delta\lambda\cdot t\right)^2}\right)\frac{f_0^+(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\left(x-\bar{\lambda}\,t-\xi\right)^2-\left(\Delta\lambda\cdot t\right)^2}}+ \qquad (66)$$

$$+\frac{1}{2\Delta\lambda}\int\limits_0^t d\eta\int\limits_{x-\lambda^+ t+\lambda^+\eta}^{x-\lambda^- t+\lambda^-\eta} J_0\left(\sqrt{\gamma}\sqrt{\left(x-\xi-\bar{\lambda}\,(t-\eta)\right)^2-\left(\Delta\lambda\cdot(t-\eta)\right)^2}\right)g^+(\xi,\eta)d\xi$$

и

$$f^-(x\,,t)=\frac{f_0^-(x-\lambda^+ t)+f_0^-(x-\lambda^- t)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-\lambda^+ t}^{x-\lambda^- t} J_0\left(\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\left(x-\bar{\lambda}\,t-\xi\right)^2-\left(\Delta\lambda\,t\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\Delta\lambda}\cdot G^-(\xi\,,0)+\frac{df_0^-(\xi)}{d\xi}-\frac{r_{21}}{\Delta\lambda}\cdot f_0^+(\xi)\right)d\xi$$

$$+\frac{\sqrt{\gamma}\cdot\Delta\lambda}{2}t\int\limits_{x-\lambda^+ t}^{x-\lambda^- t} J_1\left(\sqrt{\gamma}\sqrt{\left(x-\bar{\lambda}\,t-\xi\right)^2-\left(\Delta\lambda\cdot t\right)^2}\right)\frac{f_0^-(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\left(x-\bar{\lambda}\,t-\xi\right)^2-\left(\Delta\lambda\cdot t\right)^2}}+ \qquad (67).$$

$$+\frac{1}{2\Delta\lambda}\int\limits_0^t d\eta\int\limits_{x-\lambda^+ t+\lambda^+\eta}^{x-\lambda^- t+\lambda^-\eta} J_0\left(\sqrt{\gamma}\sqrt{\left(x-\xi-\bar{\lambda}\,(t-\eta)\right)^2-\left(\Delta\lambda\cdot(t-\eta)\right)^2}\right)g^-(\xi,\eta)d\xi$$

После того, как получены выражения для функций $f^+(x\,,t)$ и $f^-(x\,,t)$, в соответствии с ранее установленными формулами (33), (35)-(37), (40) и (41), можем выписать решение исходной задачи Коши (29) в следующем виде:

$$\vec{Y}=L^{-1}\vec{F}\,, \qquad (68)$$

где $\vec{F}=\vec{f}\cdot\exp(\mu\,t+\nu\,x)$.

<u>Частный случай.</u> В заключение данного параграфа рассмотрим решение задачи (29) в отдельном частном случае. Пусть параметры, имеющиеся в задаче (29,) принимают следующие значения:

$$a_{11}=a_{22}=\bar{u}\,,\qquad a_{12}=\rho_*\,\bar{c}^{\,2},\qquad a_{21}=\frac{1}{\rho_*},$$

$$y_1(x\,,t)=\tilde{p}(x\,,t),\quad y_2(x\,,t)=U(x\,,t),\quad b_{11}=b_{12}=0,\quad b_{21}=-\frac{\varepsilon\,\bar{m}}{\rho_*\bar{s}\bar{c}},$$

$$b_{22}=\frac{\varepsilon}{\bar{s}},\qquad w_1(x,t)\equiv 0,\quad w_2(x,t)=\overline{GR}\,.$$

Эти выражения соответствуют дифференциальным уравнениям ($3'$) в случае наличия внешнего стационарного гравитационного поля, описываемого параметром $\overline{GR}=\frac{t_M}{U_M}\cdot g\cdot\cos\varphi$.

Тогда можно показать, что в соответствие с полученными в данном параграфе формулами (30), (34), (37) в случае $\varepsilon<<1$ *имеют место равенства*

$$\lambda^+ = \bar{u} + \bar{c}\,, \quad \lambda^- = \bar{u} - \bar{c}\,, \quad \lambda^+ - \lambda^- = 2\bar{c}\,,$$

$$g^+(x,t) = g^-(x,t) = \underline{O}(\varepsilon^2)\,,\ \mu = -\varepsilon \cdot \frac{1+\bar{m}^2}{2\bar{s}}, \qquad \nu = \varepsilon \cdot \frac{\bar{m}}{2\bar{s}\,\bar{c}}\,,$$

$$G^+(x,t) = G^-(x,t) = \overline{GR} \cdot \exp\left(\varepsilon \frac{1+\bar{m}^2}{2\bar{s}} t\right) \cdot \exp\left(-\varepsilon \cdot \frac{\bar{m}}{2\bar{s}\,\bar{c}} x\right) \qquad r_{12} = \varepsilon \cdot \frac{1+\bar{m}}{2\bar{s}}\,,$$

$$r_{21} = \varepsilon \cdot \frac{1-\bar{m}}{2\bar{s}}, \qquad \sqrt{\gamma} = \varepsilon \frac{\sqrt{1-\bar{m}^2}}{2\bar{s}\bar{c}} \qquad L^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \rho_* \bar{c} & -\rho_* \bar{c} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, используя для функций Бесселя представление $J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots$ *и* $J_1(x) = \frac{x}{2} + \ldots$, *приводим выражения (66) и (67) к следующему виду:*

$$f^+(x,t) = f_0^+(x - (\bar{u} + \bar{c})t) - \varepsilon \cdot \frac{1+\bar{m}}{4\bar{s}\,\bar{c}} \cdot \int\limits_{x'-(\bar{u}+\bar{c})t'}^{x'-(\bar{u}-\bar{c})t'} f_0^-(\xi)\,d\xi + \overline{GR} \cdot t \cdot \exp\left(-\varepsilon \frac{\bar{m}}{2\bar{s}\bar{c}} x\right) + \underline{O}(\varepsilon^2)$$

и

$$f^-(x,t) = f_0^-(x - (\bar{u} - \bar{c})t) - \varepsilon \cdot \frac{1-\bar{m}}{4\bar{s}\,\bar{c}} \cdot \int\limits_{x'-(\bar{u}+\bar{c})t'}^{x'-(\bar{u}-\bar{c})t'} f_0^+(\xi)\,d\xi + \overline{GR} \cdot t \cdot \exp\left(-\varepsilon \frac{\bar{m}}{2\bar{s}\bar{c}} x\right) + \underline{O}(\varepsilon^2)\,. \quad (69)$$

Подставим выражения (69) в (68). При этом воспользуемся тем, что в соответствие с (42) и (33) $\quad f_0^{\pm}(x) = \left(\pm \frac{\varphi(x)}{\rho_* \bar{c}} + \bar{u} + \psi(x)\right) \cdot \exp\left(-\varepsilon \cdot \frac{\bar{m}}{2\bar{s}\,\bar{c}} x\right)$.

В результате получим для функций $U(x,t)$ *и* $P(x,t) = \bar{p} + \tilde{p}(x,t)$ *следующие соотношения, верные с точностью до величин пропорциональных* ε^2:

$$P(x,t) = \bar{p} + \exp\left(-\varepsilon \cdot \frac{t}{2\bar{s}}\right) \cdot p(x,t) + \frac{\varepsilon}{4\bar{s}\bar{c}} \cdot \int\limits_{x-(\bar{u}+\bar{c})t}^{x-(\bar{u}-\bar{c})t} \varphi(\alpha)\,d\alpha +$$

$$+ \varepsilon \cdot \bar{m} \cdot \rho_* \bar{c} \cdot \left(\frac{t}{2\bar{s}} \cdot u(x,t) - \frac{1}{4\bar{s}\bar{c}} \cdot \int\limits_{x-(\bar{u}+\bar{c})t}^{x-(\bar{u}-\bar{c})t} \psi(\alpha)\,d\alpha\right) + O(\varepsilon^2)\,,$$

$$U(x,t) = \left(\exp\left(-\varepsilon \cdot \frac{t}{2\bar{s}}\right) - \varepsilon \cdot \frac{t}{2\bar{s}}\right) \cdot \bar{u} + \exp\left(-\varepsilon \cdot \frac{t}{2\bar{s}}\right) \cdot u(x,t) - \frac{\varepsilon}{4\bar{s}\bar{c}} \cdot \int\limits_{x-(\bar{u}+\bar{c})t}^{x-(\bar{u}-\bar{c})t} \psi(\alpha)\,d\alpha +$$

$$+ \varepsilon \bar{m} \cdot \frac{1}{\rho_* \bar{c}} \left(\frac{t}{2\bar{s}} \cdot p(x,t) + \frac{1}{4\bar{s}\bar{c}} \int\limits_{x-(\bar{u}+\bar{c})t}^{x-(\bar{u}-\bar{c})t} \varphi(\alpha)\,d\alpha\right) + \overline{GR} \cdot t \cdot \exp\left(-\varepsilon \cdot \frac{1+\bar{m}^2}{2\bar{s}} t\right) + O(\varepsilon^2)\,, \quad (70)$$

где

$$p(x,t) = \frac{\varphi\big(x - (\bar{u} + \bar{c})t\big) + \varphi\big(x - (\bar{u} - \bar{c})t\big)}{2} + \rho_* \bar{c} \cdot \frac{\psi\big(x - (\bar{u} + \bar{c})t\big) - \psi\big(x - (\bar{u} - \bar{c})t\big)}{2}\,,$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi\big(x - (\bar{u} + \bar{c})t\big) - \varphi\big(x - (\bar{u} - \bar{c})t\big)}{2\rho_* \bar{c}} + \frac{\psi\big(x - (\bar{u} + \bar{c})t\big) + \psi\big(x - (\bar{u} - \bar{c})t\big)}{2}\,.$$

Данные функции $U(x,t)$ *и* $P(x,t)$ *являются решением задачи* $(3')$ *в случае наличия постоянного гравитационного поля. Отметим, что формулы (70) в случае отсутствия гравитационного воздействия* ($\overline{GR} = 0$) *совпадают с ранее полученными соотношениями (62). В случае присутствия постоянного*

гравитационного поля слагаемое $\overline{GR}\cdot t\cdot\exp\left(-\varepsilon\cdot\frac{1+\overline{m}^2}{2\overline{s}}t\right)$ *в выражении для скорости* $U(x,t)$ *описывает результирующее изменение скорости, которое возникает из-за взаимодействия линейного по времени гравитационного воздействия и экспоненциального, обусловленного наличием вязкого трения.*

Приложение.

Построим, следуя [7], решение задачи Коши для уравнения гиперболического типа вида

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2}+\gamma V=Q,\qquad \alpha\in(-\infty,+\infty),\qquad \beta\in(0,+\infty),\ (71)$$

$$V\Big|_{\beta=0}=\Phi_0(\alpha),\qquad \frac{\partial V}{\partial\beta}\Big|_{\beta=0}=\Phi_1(\alpha).$$

Введем дополнительное обозначение $L[V]=\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2}+\gamma V$. Тогда уравнение (71) примет форму $L[V]=Q$. Пусть $U(\alpha,\beta)$ пока произвольная достаточно гладкая функция. Рассмотрим произведение $U\cdot L[V]=U\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}-U\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2}+\gamma U\cdot V$. Воспользуемся тем, что

$$U\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(U\cdot\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(V\cdot\frac{\partial U}{\partial\alpha}\right)+V\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2}$$ и

$$U\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2}=\frac{\partial}{\partial\beta}\left(U\cdot\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(V\cdot\frac{\partial U}{\partial\beta}\right)+V\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\beta^2}.$$

Тогда $U\cdot L[V]=V\cdot L[U]+\frac{\partial H}{\partial\alpha}+\frac{\partial K}{\partial\beta}$, (72)

где $H=U\frac{\partial V}{\partial\alpha}-V\frac{\partial U}{\partial\alpha}$ и $K=V\frac{\partial U}{\partial\beta}-U\frac{\partial V}{\partial\beta}$. То есть оператор $L[V]$ является самосопряженным. Запишем соотношение (72) в следующей форме

$$U\cdot L[V]-V\cdot L[U]=\frac{\partial H}{\partial\alpha}+\frac{\partial K}{\partial\beta}.\qquad (73)$$

Проинтегрируем равенство (73) по характеристическому треугольнику D (Рис.20). Используя Формулу Грина , сведем двойной интеграл от правой части в равенстве (73) к контурным интегралам по границе области D. В результате получим $\iint\limits_D\big(U\cdot L[V]-V\cdot L[U]\big)\,d\alpha\,d\beta=$

$$=\sum_{i=1}^{3}\int\limits_{\Gamma_i}\frac{\partial UV}{\partial\beta}\,d\alpha+\frac{\partial UV}{\partial\alpha}\,d\beta-2V\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}\,d\alpha+\frac{\partial U}{\partial\alpha}\,d\beta\right).\qquad (74)$$

Вычисляя криволинейные интегралы в правой части равенства (74), имеем:

$$\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\partial UV}{\partial\beta}\,d\alpha+\frac{\partial UV}{\partial\alpha}\,d\beta-2V\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}\,d\alpha+\frac{\partial U}{\partial\alpha}\,d\beta\right)=$$

$$=U(\alpha'+\beta',0)\cdot V(\alpha'+\beta',0)-U(\alpha',\beta')\cdot V(\alpha',\beta')+2\int\limits_0^{\beta'}V(-\xi+\alpha'+\beta',\xi)\cdot\frac{dU}{d\xi}\,d\xi,$$

$$\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\partial UV}{\partial\beta}\,d\alpha+\frac{\partial UV}{\partial\alpha}\,d\beta-2V\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}\,d\alpha+\frac{\partial U}{\partial\alpha}\,d\beta\right)=$$

$$=U(\alpha'-\beta',0)\cdot V(\alpha'-\beta',0)-U(\alpha',\beta')\cdot V(\alpha',\beta')+2\int\limits_0^{\beta'}V(\xi+\alpha'-\beta',\xi)\cdot\frac{dU}{d\xi}\,d\xi$$

и

$$\int\limits_{\Gamma_3}\frac{\partial UV}{\partial\beta}\,d\alpha+\frac{\partial UV}{\partial\alpha}\,d\beta-2V\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}\,d\alpha+\frac{\partial U}{\partial\alpha}\,d\beta\right)=$$

$$=\int\limits_{\alpha'-\beta'}^{\alpha'+\beta'}\left(U(\xi,0)\cdot\frac{\partial V(\xi,0)}{\partial\beta}-V(\xi,0)\cdot\frac{\partial U(\xi,0)}{\partial\beta}\right)d\xi.$$

Тогда (74) принимает вид $\iint\limits_D\left(U\cdot L[V]-V\cdot L[U]\right)d\alpha\,d\beta=$

$$=U(\alpha'+\beta',0)V(\alpha'+\beta',0)-2U(\alpha',\beta')\cdot V(\alpha',\beta')+2\int\limits_0^{\beta'}V(-\xi+\alpha'+\beta',\xi)\frac{dU}{d\xi}\,d\xi+$$

$$+U(\alpha'-\beta',0)V(\alpha'-\beta',0)+2\int\limits_0^{\beta'}V(\xi+\alpha'-\beta',\xi)\cdot\frac{dU}{d\xi}\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{\alpha'-\beta'}^{\alpha'+\beta'}\left(U(\xi,0)\cdot\frac{\partial V(\xi,0)}{\partial\beta}-V(\xi,0)\cdot\frac{\partial U(\xi,0)}{\partial\beta}\right)d\xi. \qquad (75)$$

Пусть функция V является решением задачи (71), то есть $L[V]=Q$, $V\big|_{\beta=0}=\Phi_0(\alpha)$, $\left.\frac{\partial V}{\partial\beta}\right|_{\beta=0}=\Phi_1(\alpha)$. Пусть, дополнительно, функция U удовлетворяет условиям $L[U]=0$ в области D и $U\big|_{\Gamma_1}=U\big|_{\Gamma_2}=1$. В этом случае (75) преобразуется к виду

$$\iint\limits_D U\cdot Q\,d\alpha\,d\beta=\Phi_0(\alpha'+\beta')+\Phi_0(\alpha'-\beta')-2\cdot V(\alpha',\beta')+$$

$$+\int\limits_{\alpha'-\beta'}^{\alpha'+\beta'}\left(U(\xi,0)\cdot\Phi_1(\xi)-\Phi_0(\xi)\cdot\frac{\partial U(\xi,0)}{\partial\beta}\right)d\xi.$$

Отсюда следует, что

$$V(\alpha',\beta')=\frac{\Phi_0(\alpha'+\beta')+\Phi_0(\alpha'-\beta')}{2}-\frac{1}{2}\iint\limits_D U\cdot Q\,d\alpha\,d\beta+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha'-\beta'}^{\alpha'+\beta'}\left(U(\xi,0)\cdot\Phi_1(\xi)-\Phi_0(\xi)\cdot\frac{\partial U(\xi,0)}{\partial\beta}\right)d\xi. \qquad (76)$$

Получим явное выражение для функции U, которая должна удовлетворять уравнению $L[U]=\frac{\partial^2U}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2U}{\partial\beta^2}+\gamma U=0$ в области D и двум

дополнительным условиям $U\Big|_{\alpha-\beta=\alpha'-\beta'} = U\Big|_{\alpha+\beta=\alpha'+\beta'} = 1$. Пусть $U = U(\sqrt{\gamma}\cdot z)$, где $z = \sqrt{(\alpha'-\alpha)^2 - (\beta'-\beta)^2}$. Тогда уравнение и дополнительные условия для функции U принимают форму $U''(\sqrt{\gamma}\cdot z) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}z}U'(\sqrt{\gamma}\cdot z) + U(\sqrt{\gamma}\cdot z) = 0$ и $U(0) = 1$. Решением этой дифференциальной задачи является функция Бесселя нулевого порядка, то есть

$$U(\alpha\,,\beta) = J_0(\sqrt{\gamma}\cdot z)\,. \qquad (77)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial U(\alpha\,,\beta)}{\partial\beta} = \sqrt{\gamma}\cdot J_0{}'(\sqrt{\gamma}z)\cdot\frac{\beta'-\beta}{z} = \left\{J_0{}'(\sqrt{\gamma}z) = -J_1(\sqrt{\gamma}z)\right\} = \sqrt{\gamma}\cdot J_1(\sqrt{\gamma}z)\cdot\frac{\beta-\beta'}{z}\,.$$

Подставляя (77) в (76), приходим к искомой формуле, определяющей решение задачи (71)

$$V(\alpha'\,,\beta') = \frac{\Phi_0(\alpha'-\beta') + \Phi_0(\alpha'+\beta')}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha'-\beta'}^{\alpha'+\beta'} J_0\left(\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{(\alpha'-\xi)^2 - \beta'^2}\right)\cdot\Phi_1(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\int\limits_{\alpha-\beta'}^{\alpha'+\beta'} J_1\left(\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{(\alpha'-\xi)^2 - \beta'^2}\right)\cdot\frac{\beta'}{\sqrt{(\alpha'-\xi)^2 - \beta'^2}}\cdot\Phi_0(\xi)d\xi -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\beta'} d\eta\int\limits_{\alpha-\beta'+\eta}^{\alpha'+\beta'-\eta} J_0\left(\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{(\alpha'-\xi)^2 - (\beta'-\eta)^2}\right)\cdot Q(\xi\,,\eta)d\xi\,. \qquad (78)$$

Литература.

1. М.В.Абакумов, К.В.Гаврилюк, Н.Б.Есикова, В.Б.Кошелев, А.В.Лукшин, С.И.Мухин, Н.В.Соснин, В.Ф.Тишкин, А.П.Фаворский. Математическая модель гемодинамики сердечно-сосудистой системы. Дифференциальные уравнения. 1997. Т.33, №7, с.892-898.
2. А.Х.Найфэ. Методы возмущений. Мир, М., 1976, с.9-66.
3. И.В.Ашметков, С.И.Мухин, Н.В.Соснин, А.П.Фаворский, А.Б.Хруленко. Частные решения уравнений гемодинамики. Препринт. М., Диалог-МГУ, 1999, с.43.
4. И.В.Ашметков, С.И.Мухин, Н.В.Соснин, А.П.Фаворский, А.Б.Хруленко. Анализ и сравнение некоторых аналитических и численных решений задач гемодинамики. Дифференциальные уравнения. 2000. Т.36, №7, с.919-924.
5. И.В.Ашметков, С.И.Мухин, Н.В.Соснин, А.П.Фаворский, А.Б.Хруленко. Численное исследование свойств разностной схемы для уравнений гемодинамики. Препринт. М., Диалог-МГУ, 1999, с.14.
6. Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко. Системы квазилинейных уравнений. Наука, М., 1978, с.16-132.
7. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. Наука, М., 1972, с.128-140.