С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский,
А.Б. Хруленко

ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ И СКОРОСТИ В СИСТЕМЕ ЭЛАСТИЧНЫХ СОСУДОВ

Препринт

Москва
МАКС Пресс
2001

УДК 519.63

С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский, А.Б. Хруленко

Линейный анализ волн давления и скорости в системе эластичных сосудов: Препринт. – М: МАКС Пресс, 2001. – 37с.

В данной работе для линеаризованных гемодинамических уравнений аналитически решена краевая задача на произвольном графе сосудов. Получены формулы для транспортных коэффициентов и исследованы их свойства. Приведены результаты верификации программного комплекса CVSS.

E-mail: vmmus@hpvm.cs.msu.su
Тел.: 939-2195

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.

Движение жидкости по системе эластичных сосудов представляет собой актуальную задачу с технологической и физиологической областью применения. Медико-физиологическое применение связано с математическим моделированием течения крови по сердечно-сосудистой системе. Большое внимание при этом уделяется такому гидродинамическому явлению, как распространение пульсовой волны, скорость которой значительно больше скорости движения самой жидкости [1, 2, 8].

В данной работе для линеаризованных гемодинамических (ЛГД) уравнений [5] в случае дозвукового стационарного течения поставлена и аналитически решена смешанная задача на произвольном графе сосудов [3]. Установлено, что в вершинах графа, где происходит скачкообразное изменение свойств ребер (например, сечения сосуда, его эластичности) наблюдается эффект частичного прохождения и отражения распространяющейся волны давления и скорости с изменением ее амплитуды. Получены выражения общего вида для транспортных коэффициентов, связывающие амплитуды волн до и после момента прохождения вершины графа. Аналогичные формулы для транспортных коэффициентов известны из работ [1, 8].

В работе исследуется ряд свойств транспортных коэффициентов. Обсуждаются вопросы, связанные с программной реализацией алгоритма расчета решений ЛГД уравнений на произвольном графе сосудов.

Приведены результаты верификации программного комплекса CVSS [4], реализующего численное решение уравнений гемодинамики на произвольном графе сосудов. Проведено сравнение результатов численного решения типовых задач на графе сосудов с построенными аналитическими решениями ЛГД уравнений.

Работа выполнена при поддержке программы “Университеты России – фундаментальные исследования” (проект 015.03.02.09).

§1. Вспомогательная задача для линеаризованных гемодинамических (ЛГД) уравнений.

1. Математическая постановка вспомогательной задачи.

Будем формально описывать систему кровообращения графом, состоящим из ребер и вершин. Пусть ребра графа соответствуют отдельным крупным сосудам кровеносной системы или жгутам мелких сосудов. Вершинам графа сопоставлены функционально либо участки ветвления кровеносных сосудов, либо мышечные ткани, либо отдельные органы организма.

Сначала рассмотрим граф состоящий из одной вершины и n направленных ребер ($n>1$), соединяющихся в вершине. Занумеруем ребра числами от 1 до n. Ребра будем считать полуограниченными. На каждом из ребер введем свою систему координат. Направление координатной оси на ребре примем за направление этого ребра. Не ограничивая общности, начало координат на каждом ребре совместим с вершиной. Тогда на ребрах, направленных к вершине, координаты точек будут иметь отрицательные значения, а на ребрах, направленных от вершины, координаты точек имеют положительные значения (см. рис. 1).

Введем для каждого ребра параметр z_i ($i=1,\ldots,n$), который принимает значение арифметического знака “+” для ребер входящих в вершину и значение знака “–” для ребер выходящих из вершины.

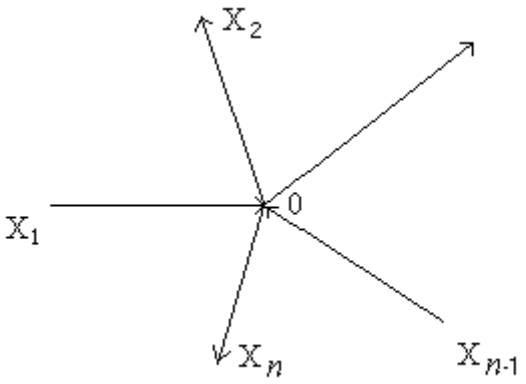


Рис. 1.

Пусть на каждом ребре справедливы ЛГД уравнения [5]

$$p_{i\,t} + \bar{u}_i p_{i\,x_i} + \rho \bar{c}_i^2 u_{i\,x_i} = 0\ ,$$
$$u_{i\,t} + \frac{1}{\rho} p_{i\,x_i} + \bar{u}_i u_{i\,x_i} = 0\ ,\ z_i x_i < 0,\ t > 0\ ,\ i = 1,...,n, \tag{1.1}$$

а в начальный момент времени выполняются начальные условия

$$p_i(x_i,0) = \varphi_i(x_i)\ ,$$
$$u_i(x_i,0) = \psi_i(x_i)\ ,\ z_i x_i \le 0,\ i = 1,...,n. \tag{1.2}$$

Здесь

t – время;

x_i – пространственная координата, в качестве которой выбрана длина дуги вдоль оси сосуда с номером i;

$p_i(x_i,t)$ – отклонение давления в сосуде с номером i от стационарного значения давления $\bar{p}_i = const$ (см. [5]);

$u_i(x_i,t)$ – отклонение скорости течения от стационарного значения $\bar{u}_i = const$;

$\bar{c}_i = \sqrt{\dfrac{\bar{s}_i}{\rho\bar{\theta}_i}}$, $\bar{s}_i = S_i(\bar{p}_i)$, $\bar{\theta}_i = \left.\dfrac{dS_i(P_i)}{dP_i}\right|_{P_i=\bar{p}_i}$, $(\bar{\theta}_i > 0)$, $S_i(\bar{p}_i + p_i(x_i,t))$ - заданная функция, определяющая зависимость площади поперечного сечения сосуда от давления в сосуде.

Функции $\varphi_i(x_i)$ и $\psi_i(x_i)$ – заданные начальные возмущения стационарного значения давления и скорости, соответственно.

Стационарное течение будем считать дозвуковым, т.е. $|\bar{u}_i| < \bar{c}_i$.

В вершине графа, являющейся граничной точкой $x_i = 0$, для каждого из ребер пусть выполнены дополнительные условия вида:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i(\bar{s}_i u_i(0,t) + \bar{\theta}_i \bar{u}_i p_i(0,t)) = 0, \tag{1.3}$$

$$\bar{\alpha}_1 p_1(0,t) + \bar{\beta}_1 u_1(0,t) = \bar{\alpha}_i p_i(0,t) + \bar{\beta}_i u_i(0,t),\quad t \ge 0,\quad i = 2,...,n. \tag{1.4}$$

Соотношение (1.3) является результатом линеаризации условия сохранения массы вещества в вершине графа [3], которое, в рассматриваем случае, имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i S_i\left(\overline{p}_i + p_i(0,t)\right)(\overline{u}_i + u_i(0,t)) = 0.$$

Соотношения (1.4) появляются при линеаризации условий вида

$$g_1(\overline{p}_1 + p_1(0,t), \overline{u}_1 + u_1(0,t)) = g_i(\overline{p}_i + p_i(0,t), \overline{u}_i + u_i(0,t)),\ i = 2,...,n,$$

где g_i - заданные функции.

Так, например, если на границах сосудов, входящих в вершину графа, выполняется условие равенства давлений [3], то функции $g_i = \overline{p}_i + p_i(0,t)$, $i = 1,...,n$. Тогда коэффициенты $\overline{\alpha}_i$, $\overline{\beta}_i$ в (1.4) имеют следующие значения

$$\overline{\alpha}_i = 1, \quad \overline{\beta}_i = 0, \quad i = 1,...,n. \tag{1.5}$$

Если на границах сосудов, входящих в вершину графа, выполняется условие равенства интеграла Бернулли [3], то $g_i = \dfrac{(\overline{u}_i + u_i(0,t))^2}{2} + \dfrac{\overline{p}_i + p_i(0,t)}{\rho}$, $i = 1,...,n$ и тогда коэффициенты в (1.4) имеют вид

$$\overline{\alpha}_i = \frac{1}{\rho}, \quad \overline{\beta}_i = \overline{u}_i, \quad i = 1,...,n. \tag{1.6}$$

В случае, если вершина графа соответствует участку фильтрации через ткань [3], то $n = 2$ и

$$\begin{cases} g_1 = -z_1 S_1\left(\overline{p}_1 + p_1(0,t)\right)(\overline{u}_1 + u_1(0,t)) + k_D(\overline{p}_1 + p_1(0,t)), \\ g_2 = k_D(\overline{p}_2 + p_2(0,t)), \end{cases}$$

где k_D - коэффициент тканевой фильтрации.

При этом коэффициенты $\overline{\alpha}_i$, $\overline{\beta}_i$ в (1.4) равны:

$$\overline{\alpha}_1 = k_D - z_1\overline{\theta}_1\overline{u}_1, \quad \overline{\beta}_1 = -z_1\overline{s}_1, \quad \overline{\alpha}_2 = k_D, \quad \overline{\beta}_2 = 0. \tag{1.7}$$

Совокупность соотношений (1.1), (1.2), (1.3) и (1.4) представляют собой рассматриваемую вспомогательную задачу.

2. Решение задачи.

Общим решением дифференциальных уравнений (1.1) на каждом ребре графа является суперпозиция двух бегущих волн произвольного вида [5], одна из которых f_i^+ распространяется по направлению ребра, а вторая f_i^- в противоположном направлении.

Введем обозначения

$$f_i^{z_i} = \begin{cases} f_i^+, \text{ если } z_i = "+", \\ f_i^-, \text{ если } z_i = "-", \end{cases} \quad \text{и} \quad f_i^{-z_i} = \begin{cases} f_i^-, \text{ если } z_i = "+", \\ f_i^+, \text{ если } z_i = "-". \end{cases}$$

Тогда решение уравнений (1.1) имеет вид:

$$p_i(x_i,t) = z_i \frac{\rho\overline{c}_i}{2}\left(f_i^{z_i}(x_i - \overline{\lambda}_i^{z_i}t) - f_i^{-z_i}(x_i - \overline{\lambda}_i^{-z_i}t)\right),$$

$$u_i(x_i,t) = \frac{1}{2}\left(f_i^{z_i}(x_i - \overline{\lambda}_i^{z_i}t) + f_i^{-z_i}(x_i - \overline{\lambda}_i^{-z_i}t)\right), \tag{1.8}$$

где $\overline{\lambda}_i^{z_i} = \overline{u}_i + z_i\overline{c}_i$, $\overline{\lambda}_i^{-z_i} = \overline{u}_i - z_i\overline{c}_i$, $i = 1,...,n$.

Отметим, что для рассматриваемой задачи $z_i x_i \le 0$, $t \ge 0$. Тогда, в случае дозвукового стационарного течения (т.е. при $|\overline{u}_i| < \overline{c}_i$) комбинация $y_i = x_i - \overline{\lambda}_i^{z_i}t$, являющаяся аргумент функции $f_i^{z_i}$ в соотношениях (1.8), принимает значения

удовлетворяющие условию $z_i y_i \le 0$, а комбинация $y_i = x_i - \overline{\lambda}_i^{-z_i} t$, являющаяся аргументом функции $f_i^{-z_i}$, может принимать любые значения из интервала $(-\infty, +\infty)$.

Подберем вид функций $f_i^{z_i}$ и $f_i^{-z_i}$ на всей области их определения так, чтобы для $p_i(x_i,t)$, $u_i(x_i,t)$ из (1.8) были бы выполнены начальные условия (1.2) и дополнительные условия (1.3), (1.4).

Из начальных условий (1.1) и соотношений (1.8) следует, что

$$p_i(x_i,0) = \varphi_i(x_i) = z_i \frac{\rho \overline{c}_i}{2}(f_i^{z_i}(x_i) - f_i^{-z_i}(x_i)),$$

$$u(x_i,0) = \psi_i(x_i) = \frac{1}{2}(f_i^{z_i}(x_i) + f_i^{-z_i}(x_i)), \text{ при } z_i x_i \le 0.$$

Отсюда получаем, что при значениях своего аргумента y_i, удовлетворяющих условию, $z_i y_i \le 0$ функции $f_i^{z_i}(y_i)$ и $f_i^{-z_i}(y_i)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} f_i^{z_i}(y_i) &= z_i \frac{\varphi_i(y_i)}{\rho \overline{c}_i} + \psi_i(y_i), \\ f_i^{-z_i}(y_i) &= -z_i \frac{\varphi_i(y_i)}{\rho \overline{c}_i} + \psi_i(y_i), \quad i = 1,...,n. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Таким образом, функция $f_i^{z_i}$ соотношения (1.8) определена на всей своей области определения, а функция $f_i^{-z_i}$ определена только на половине своей области определения.

Доопределим функцию $f_i^{-z_i}(y_i)$ в области $z_i y_i > 0$ так, чтобы были выполнены дополнительные условия (1.3) и (1.4). Для этого подставим представление для скорости и давления (1.8) в уравнения (1.3) и (1.4):

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \left(\frac{\overline{s}_i}{2}(f_i^{z_i}(-\overline{\lambda}_i^{z_i} t) + f_i^{-z_i}(-\overline{\lambda}_i^{-z_i} t)) + z_i \frac{\rho \overline{c}_i \overline{\theta}_i \overline{u}_i}{2}(f_i^{z_i}(-\overline{\lambda}_i^{z_i} t) - f_i^{-z_i}(-\overline{\lambda}_i^{-z_i} t)) \right) = 0,$$

$$\overline{\alpha}_1 z_1 \frac{\rho \overline{c}_1}{2}(f_1^{z_1}(-\overline{\lambda}_1^{z_1} t) - f_1^{-z_1}(-\overline{\lambda}_1^{-z_1} t)) + \overline{\beta}_1 \frac{1}{2}(f_1^{z_1}(-\overline{\lambda}_1^{z_1} t) + f_1^{-z_1}(-\overline{\lambda}_1^{-z_1} t)) =$$

$$= \overline{\alpha}_i z_i \frac{\rho \overline{c}_i}{2}(f_i^{z_i}(-\overline{\lambda}_i^{z_i} t) - f_i^{-z_i}(-\overline{\lambda}_i^{-z_i} t)) + \overline{\beta}_i \frac{1}{2}(f_i^{z_i}(-\overline{\lambda}_i^{z_i} t) + f_i^{-z_i}(-\overline{\lambda}_i^{-z_i} t)), \quad i = 2,...,n.$$

Отсюда, вводя обозначение $\overline{m}_i = \dfrac{\overline{u}_i}{\overline{c}_i}$ и группируя слагаемые при 0функциях $f_i^{z_i}$ и $f_i^{-z_i}$, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \overline{s}_i (1 - z_i \overline{m}_i) f_i^{-z_i}(-\overline{\lambda}_i^{-z_i} t) = -\sum_{i=1}^{n} z_i \overline{s}_i (1 + z_i \overline{m}_i) f_i^{z_i}(-\overline{\lambda}_i^{z_i} t), \tag{1.10}$$

$$(-z_i \rho \overline{\alpha}_i \overline{c}_i + \overline{\beta}_i) f_i^{-z_i}(-\overline{\lambda}_i^{-z_i} t) - (-z_1 \rho \overline{\alpha}_1 \overline{c}_1 + \overline{\beta}_1) f_1^{-z_1}(-\overline{\lambda}_1^{-z_1} t) =$$

$$= (-z_i \rho \overline{\alpha}_i \overline{c}_i - \overline{\beta}_i) f_i^{z_i}(-\overline{\lambda}_i^{z_i} t) - (-z_1 \rho \overline{\alpha}_1 \overline{c}_1 - \overline{\beta}_1) f_1^{z_1}(-\overline{\lambda}_1^{z_1} t), \quad i = 2,...,n. \tag{1.11}$$

Выражая из соотношения (1.11) функцию $f_i^{-z_i}$ через функции $f_i^{z_i}$, $f_1^{z_1}$, $f_1^{-z_1}$ приходим к следующей формуле:

$$f_i^{-z_i}(-\overline{\lambda}_i^{-z_i}t)=\frac{\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i+z_i\overline{\beta}_i}{\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i-z_i\overline{\beta}_i}f_i^{z_i}(-\overline{\lambda}_i^{z_i}t)+\frac{z_1\rho\overline{\alpha}_1\overline{c}_1-\overline{\beta}_1}{z_i\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i-\overline{\beta}_i}f_1^{-z_1}(-\overline{\lambda}_1^{-z_1}t)-$$

$$-\frac{z_1\rho\overline{\alpha}_1\overline{c}_1+\overline{\beta}_1}{z_i\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i-\overline{\beta}_i}f_1^{z_1}(-\overline{\lambda}_1^{z_1}t),\quad i=2,...,n. \qquad (1.12)$$

Подставляя полученное выражение для функции $f_i^{-z_i}$ (1.12) в соотношение (1.10) приходим к формуле определяющей функцию $f_1^{-z_1}$ через функции $f_i^{z_i}$, $i=1,...,n$:

$$f_1^{-z_1}(-\overline{\lambda}_1^{-z_1}t)=\frac{\rho\overline{\alpha}_1\overline{c}_1+z_1\overline{\beta}_1}{\rho\overline{\alpha}_1\overline{c}_1-z_1\overline{\beta}_1}f_1^{z_1}(-\overline{\lambda}_1^{z_1}t)-\frac{2z_1}{(\rho\overline{\alpha}_1\overline{c}_1-z_1\overline{\beta}_1)\sum_{l=1}^{n}\frac{\overline{s}_l(1-z_l\overline{m}_l)}{\rho\overline{\alpha}_l\overline{c}_l-z_l\overline{\beta}_l}}*$$

$$*\sum_{j=1}^{n}z_j\overline{s}_j\frac{\rho\overline{\alpha}_j\overline{c}_j-\overline{\beta}_j\overline{m}_j}{\rho\overline{\alpha}_j\overline{c}_j-z_j\overline{\beta}_j}f_j^{z_j}(-\overline{\lambda}_i^{-z_i}t). \qquad (1.13)$$

После подстановки выражения (1.13) для функции $f_1^{-z_1}$ в соотношение (1.11) и замены переменной $y_i=-\overline{\lambda}_i^{-z_i}t$, окончательно получаем:

$$f_i^{-z_i}(y_i)=\frac{\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i+z_i\overline{\beta}_i}{\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i-z_i\overline{\beta}_i}f_i^{z_i}\left(\frac{\overline{\lambda}_i^{z_i}}{\overline{\lambda}_i^{-z_i}}y_i\right)-\frac{2z_i}{(\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i-z_i\overline{\beta}_i)\sum_{l=1}^{n}\frac{\overline{s}_l(1-z_l\overline{m}_l)}{\rho\overline{\alpha}_l\overline{c}_l-z_l\overline{\beta}_l}}*$$

$$*\sum_{j=1}^{n}z_j\overline{s}_j\frac{\rho\overline{\alpha}_j\overline{c}_j-\overline{\beta}_j\overline{m}_j}{\rho\overline{\alpha}_j\overline{c}_j-z_j\overline{\beta}_j}f_j^{z_j}\left(\frac{\overline{\lambda}_j^{z_j}}{\overline{\lambda}_i^{-z_i}}y_i\right),\ \text{при } z_iy_i>0,\ i=1,...,n. \qquad (1.14)$$

Отметим, что при использовании для коэффициентов $\overline{\alpha}_i$, $\overline{\beta}_i$ выражений (1.5), (1.6), (1.7) комбинации $\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i-z_i\overline{\beta}_i$, $i=1,...,n$, стоящие в знаменателе дробей в формуле (1.14), отличны от нуля.

Введем обозначения:

$$\kappa_{i\to i}^{u}=\frac{\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i+z_i\overline{\beta}_i}{\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i-z_i\overline{\beta}_i}-\frac{2\overline{s}_i(\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i-\overline{\beta}_i\overline{m}_i)}{(\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i-z_i\overline{\beta}_i)^2\sum_{l=1}^{n}\frac{\overline{s}_l(1-z_l\overline{m}_l)}{\rho\overline{\alpha}_l\overline{c}_l-z_l\overline{\beta}_l}}, \qquad (1.15)$$

$$\kappa_{j\to i}^{u}=-\frac{2z_iz_j\overline{s}_j(\rho\overline{\alpha}_j\overline{c}_j-\overline{\beta}_j\overline{m}_j)}{(\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i-z_i\overline{\beta}_i)(\rho\overline{\alpha}_j\overline{c}_j-z_j\overline{\beta}_j)\sum_{l=1}^{n}\frac{\overline{s}_l(1-z_l\overline{m}_l)}{\rho\overline{\alpha}_l\overline{c}_l-z_l\overline{\beta}_l}}. \qquad (1.16)$$

Тогда формула (1.14) может быть переписана в виде:

$$f_i^{-z_i}(y_i)=\sum_{j=1}^{n}\kappa_{j\to i}^{u}\ f_j^{z_j}\left(\frac{\overline{\lambda}_j^{z_j}}{\overline{\lambda}_i^{-z_i}}y_i\right),\ \text{при } z_iy_i>0,\ i=1,...,n. \qquad (1.17)$$

Таким образом, получили, что в совокупности формулы (1.9) и (1.17) задают функции $f_i^{z_i}$ и $f_i^{-z_i}$ на всей области определения каждой из этих функций.

Введенные в рассмотрение коэффициенты $\kappa_{i\to i}^{u}$ и $\kappa_{j\to i}^{u}$ (см. (1.15), (1.16)) допускают следующую трактовку. Как видно из формулы (1.8) отклонение скорости течения $u_i(x_i,t)$ от стационарного значения $\overline{u}_i$ представляет собой

суперпозицию двух бегущих волн, одна из которых $f_i^{z_i}$ распространяется по i ребру графа по направлении к его вершине, а другая $f_i^{-z_i}$ – в противоположном направлении. Далее волны $f_i^{z_i}$ и $f_i^{-z_i}$ везде будем называть волнами скорости. Из формулы (1.17) следует, что волна скорости $f_i^{-z_i}$, распространяющаяся по i ребру графа в направлении от его вершины, представляет собой суперпозицию волн скорости $f_j^{z_j}$, распространяющихся по ребрам графа по направлению к его вершине. При этом коэффициент $\kappa_{j\to i}^u$ $(i \neq j)$ показывает во сколько раз изменилась амплитуда волны скорости при прохождении ею через вершину графа из j ребра в i ребро, а коэффициент $\kappa_{i\to i}^u$ характеризует изменение амплитуды волны скорости, распространяющейся по i ребру, после ее отражения от вершины графа.

Заметим, что согласно формуле (1.8) отклонение давления $p_i(x_i,t)$ от стационарного значения $\overline{p}_i$, также представляет собой суперпозицию двух бегущих волн (будем называть их волнами давления), одна из которых распространяется по i ребру графа в направлении от его вершины и имеет вид $-z_i\rho\overline{c}_i f_i^{-z_i}$, а другая, распространяющаяся по направлении к его вершине, имеет вид $z_i\rho\overline{c}_i f_i^{z_i}$, где $f_i^{-z_i}$ и $f_i^{z_i}$ рассмотренные ранее волны скорости. Таким образом, амплитуда волны давления, распространяющейся по i ребру, при ее отражении от вершины графа изменяется с коэффициентом $\kappa_{i\to i}^p$ равным

$$\kappa_{i\to i}^p = -\kappa_{i\to i}^u, \tag{1.18}$$

а амплитуда волны давления при ее прохождении через вершину графа из j ребра в i ребро изменяется с коэффициентом $\kappa_{j\to i}^p$ равным

$$\kappa_{j\to i}^p = -z_j z_i \frac{\overline{c}_i}{\overline{c}_j}\kappa_{j\to i}^u. \tag{1.19}$$

В дальнейшем коэффициенты $\kappa_{i\to i}^p$ и $\kappa_{i\to i}^u$ будем называть коэффициентами отражения волны давления и, соответственно, волны скорости от вершины графа в ребре с номером i, а коэффициенты $\kappa_{j\to i}^p$ и $\kappa_{j\to i}^u$ – коэффициентами прохождения волны давления и, соответственно, волны скорости через вершину графа из j ребра в i ребро. Всю совокупность коэффициентов $\kappa_{i\to i}^p$, $\kappa_{j\to i}^p$, $\kappa_{i\to i}^u$ и $\kappa_{j\to i}^u$ назовем транспортными коэффициентами.

С учетом формул (1.8), (1.9) и (1.17), решение вспомогательной задачи (1.1), (1.2), (1.3) и (1.4) может быть записано в следующем виде:

$$p_i(x_i,t)=\begin{cases}\dfrac{z_i\rho\bar{c}_i}{2}\left(\dfrac{z_i}{\rho\bar{c}_i}\Big(\varphi_i(x_i-\bar{\lambda}_i^{z_i}t)+\varphi_i(x_i-\bar{\lambda}_i^{-z_i}t)\Big)+\psi_i(x_i-\bar{\lambda}_i^{z_i}t)-\psi_i(x_i-\bar{\lambda}_i^{-z_i}t)\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } z_i(x_i-\bar{\lambda}_i^{-z_i}t)\le 0, \\ \dfrac{z_i\rho\bar{c}_i}{2}\Bigg(\dfrac{z_i}{\rho\bar{c}_i}\varphi_i(x_i-\bar{\lambda}_i^{z_i}t)+\psi_i(x_i-\bar{\lambda}_i^{z_i}t)- \\ \qquad -\sum\limits_{j=1}^{n}\kappa^{u}_{j\to i}\left(\dfrac{z_j}{\rho\bar{c}_j}\varphi_j\left(\dfrac{\bar{\lambda}_j^{z_j}}{\bar{\lambda}_i^{-z_i}}(x_i-\bar{\lambda}_i^{-z_i}t)\right)+\psi_j\left(\dfrac{\bar{\lambda}_j^{z_j}}{\bar{\lambda}_i^{-z_i}}(x_i-\bar{\lambda}_i^{-z_i}t)\right)\right)\Bigg), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } z_i(x_i-\bar{\lambda}_i^{-z_i}t)>0,\end{cases} \tag{1.20}$$

$$u_i(x_i,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z_i}{\rho\bar{c}_i}\Big(\varphi_i(x_i-\bar{\lambda}_i^{z_i}t)-\varphi_i(x_i-\bar{\lambda}_i^{-z_i}t)\Big)+\psi_i(x_i-\bar{\lambda}_i^{z_i}t)+\psi_i(x_i-\bar{\lambda}_i^{-z_i}t)\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } z_i(x_i-\bar{\lambda}_i^{-z_i}t)\le 0, \\ \dfrac{1}{2}\Bigg(\dfrac{z_i}{\rho\bar{c}_i}\varphi_i(x_i-\bar{\lambda}_i^{z_i}t)+\psi_i(x_i-\bar{\lambda}_i^{z_i}t)+ \\ \qquad +\sum\limits_{j=1}^{n}\kappa^{u}_{j\to i}\left(\dfrac{z_j}{\rho\bar{c}_j}\varphi_j\left(\dfrac{\bar{\lambda}_j^{z_j}}{\bar{\lambda}_i^{-z_i}}(x_i-\bar{\lambda}_i^{-z_i}t)\right)+\psi_j\left(\dfrac{\bar{\lambda}_j^{z_j}}{\bar{\lambda}_i^{-z_i}}(x_i-\bar{\lambda}_i^{-z_i}t)\right)\right)\Bigg), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } z_i(x_i-\bar{\lambda}_i^{-z_i}t)>0.\end{cases}$$

Отметим, что, в силу соотношений (1.18) и (1.19), решение (1.20) вспомогательной задачи можно записать и с использованием коэффициентов $\kappa^{p}_{j\to i}$.

3. Решение вспомогательной задачи для граничной вершины.

В этом пункте, рассмотрим граф, состоящий из одного ребра соединенного с граничной вершиной. Пусть на ребре графа выполняются дифференциальные уравнения (1.1) и начальные условия (1.2) (для случая $n=1$). В вершине графа, являющейся граничной точкой $x_1=0$ для ребра, пусть, например, выполнено дополнительное условие вида:

$$p_1(0,t)=\mu(t),\ t\ge 0, \tag{1.21}$$

где $\mu(t)$ – произвольная функция.

В предыдущем пункте уже обсуждалось, что дифференциальные уравнения (1.1) и начальные условия (1.2) выполнены, если функции $p_1(x_1,t)$, $u_1(x_1,t)$ имеют вид (1.8), где функция $f_1^{z_1}$ на всей своей области определения, а функция $f_1^{-z_1}(y_1)$ при значениях аргумента $z_1y_1\le 0$, заданы согласно формулам (1.9).

Подберем функцию $f_1^{-z_1}(y_1)$ в области $z_1y_1>0$ так, чтобы выполнялось дополнительное граничное условие (1.21). Для этого подставим представление для давления (1.8) в уравнения (1.21):

$$z_1 \frac{\rho\overline{c}_1}{2}\left(f_1^{z_1}(-\overline{\lambda}_1^{z_1}t) - f_1^{-z_1}(-\overline{\lambda}_1^{-z_1}t)\right) = \mu(t) \ .$$

Отсюда, делая замену переменной $y_1 = -\overline{\lambda}_1^{-z_1}t$ и вводя обозначения

$$\kappa^u_{1\to 1} = 1, \qquad F_1(t) = -\frac{2z_1}{\rho\overline{c}_1}\mu(t) \ ,$$

получаем:

$$f_1^{-z_1}(y_1) = \kappa^u_{1\to 1} f_1^{z_1}\left(\frac{\overline{\lambda}_1^{z_1}}{\overline{\lambda}_1^{-z_1}} y_1\right) + F_1\left(-\frac{1}{\overline{\lambda}_1^{-z_1}} y_1\right), \text{при } z_1 y_1 > 0. \qquad (1.22)$$

Из формулы (1.22) следует, что коэффициент $\kappa^u_{1\to 1}$ имеет смысл коэффициента отражения волны скорости от граничной вершины графа.

Таким образом, формулы (1.8), (1.9) и (1.22) определяют решение вспомогательной задачи (1.1), (1.2), (1.21).

Отметим, что при изменении вида дополнительного условия (1.21), изменяются формулы для коэффициента $\kappa^u_{1\to 1}$ и функции F_1, а сама структура решения вспомогательной задачи останется прежней. Выражения для коэффициента $\kappa^u_{1\to 1}$ и функции F_1 в зависимости от вида граничного условия приведены в таблице 1.

§2. Свойства транспортных коэффициентов.

1. Общие свойства.

Рассмотрим некоторые свойства транспортных коэффициентов. Из формул (1.15) и (1.16) следует, что коэффициент отражения волны скорости в сосуде с номером i и коэффициент прохождения волны скорости из i сосуда в j сосуд связаны между собой следующим соотношением:

$$\kappa^u_{i\to i} = \frac{\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i + z_i\overline{\beta}_i}{\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i - z_i\overline{\beta}_i} - z_i z_j \frac{\rho\overline{\alpha}_j\overline{c}_j - z_j\overline{\beta}_j}{\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i - z_i\overline{\beta}_i}\kappa^u_{i\to j} \ . \qquad (2.1)$$

Используя соотношения (1.18), (1.19), определяющие взаимосвязь транспортных коэффициентов для волны скорости с транспортными коэффициентами для волны давления, соотношение (2.1) может быть приведено к виду:

$$\overline{c}_i(\rho\overline{\alpha}_j\overline{c}_j - z_j\overline{\beta}_j)\kappa^p_{i\to j} = \overline{c}_j(\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i + z_i\overline{\beta}_i) + \overline{c}_j(\rho\overline{\alpha}_i\overline{c}_i - z_i\overline{\beta}_i)\kappa^p_{i\to i} \ . \qquad (2.2)$$

В дальнейшем, учитывая взаимосвязь (1.18), (1.19), все формулы приводятся только для транспортных коэффициентов волны давления.

Из формул (1.16) и (1.19) следует связь между коэффициентами прохождения волны давления из i сосуда в j сосуд и из i сосуда в l сосуд (для j и l отличных от i):

$$\frac{\rho\overline{\alpha}_j\overline{c}_j - z_j\overline{\beta}_j}{\overline{c}_j}\kappa^p_{i\to j} = \frac{\rho\overline{\alpha}_l\overline{c}_l - z_l\overline{\beta}_l}{\overline{c}_l}\kappa^p_{i\to l} \ .$$

Отметим еще одно свойство транспортных коэффициентов. Умножим коэффициент прохождения волны скорости из j сосуда в i сосуд на величину $z_i\overline{s}_i(1 - z_i\overline{m}_i)$ и просуммируем по всем сосудам соединяющимся в вершине графа:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i\overline{s}_i(1 - z_i\overline{m}_i)\kappa^u_{j\to i} = -z_j\overline{s}_j(1 + z_j\overline{m}_j) \ .$$

Таблица 1.

№	Граничное условие	Линеаризованное граничное условие	Коэффициент отражения $\kappa^{u}_{1\to1}$ и функция F_1
1	Задано изменение давления $\overline{p}_1 + \mu(t),\ t \ge 0$	$p_1(0,t) = \mu(t),\ t \ge 0$	$\kappa^{u}_{1\to1} = 1$, $F_1(t) = -\dfrac{2z_1}{\rho\overline{c}_1}\mu(t)$
2	Задано изменение скорости $\overline{u}_1 + \nu(t),\ t \ge 0$	$u_1(0,t) = \nu(t),\ t \ge 0$	$\kappa^{u}_{1\to1} = -1$, $F_1(t) = 2\nu(t)$
3	Задано изменение потока $\overline{s}_1\overline{u}_1 + q(t),\ t \ge 0$	$\overline{s}_1 u_1(0,t) + \overline{\theta}_1\overline{u}_1 p_1(0,t) = q(t),\ t$	$\kappa^{u}_{1\to1} = -\dfrac{1+z_1\overline{m}_1}{1-z_1\overline{m}_1}$, $F_1(t) = \dfrac{2}{\overline{s}_1(1-z_1\overline{m}_1)}q$
4 *)	$\left.\dfrac{\partial P_1(x_1,t)}{\partial x_1}\right\|_{x_1=0} = 0,\ t \ge 0$, где $P_1(x_1,t) = \overline{p}_1 + p_1(x_1,t)$	$\left.\dfrac{\partial p_1(x_1,t)}{\partial x_1}\right\|_{x_1=0} = 0,\ t \ge 0$	$\kappa^{u}_{1\to1} = -\dfrac{1-z_1\overline{m}_1}{1+z_1\overline{m}_1}$, $F_1(t) = 0$
5 *)	$\left.\dfrac{\partial U_1(x_1,t)}{\partial x_1}\right\|_{x_1=0} = 0,\ t \ge 0$, где $U_1(x_1,t) = \overline{u}_1 + u_1(x_1,t)$	$\left.\dfrac{\partial u_1(x_1,t)}{\partial x_1}\right\|_{x_1=0} = 0,\ t \ge 0$	$\kappa^{u}_{1\to1} = \dfrac{1-z_1\overline{m}_1}{1+z_1\overline{m}_1}$, $F_1(t) = 0$
6 *)	$\left.\dfrac{\partial Q_1(x_1,t)}{\partial x_1}\right\|_{x_1=0} = 0,\ t \ge 0$, где $Q_1(x_1,t) = S_1\big(\overline{p}_1 + p_1(x_1,t)\big)(\overline{u}_1 + u_1$	$\overline{s}_1\left.\dfrac{\partial u_1(x_1,t)}{\partial x_1}\right\|_{x_1=0} + \overline{\theta}_1\overline{u}_1\dfrac{\partial p_1(x_1,t)}{\partial x_1}$	$\kappa^{u}_{1\to1} = 1,\ F_1(t) = 0$

*) значения коэффициента $\kappa^{u}_{1\to1}$ и функции F_1 получены в предположении $\varphi_1(0) = \psi_1(0) = 0$ (см. (1.2))

Учитывая формулы (1.18) и (1.19) окончательно получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{c}_j}{\overline{c}_i} \frac{\overline{s}_i}{\overline{s}_j} \frac{1 - z_i \overline{m}_i}{1 + z_j \overline{m}_j} \kappa_{j \to i}^{p} = 1 . \qquad (2.3)$$

Соотношение (2.3), выражающее связь коэффициента отражения и всех коэффициентов прохождения волны давления из j сосуда, не зависит от значений коэффициентов $\overline{\alpha}_i$, $\overline{\beta}_i$ и, следовательно, справедливо для любой вершины графа.

Рассмотрим подробнее свойства транспортных коэффициентов для случаев, когда вершина графа соответствует либо участку фильтрации крови через ткань, либо участку ветвления сосудов.

2. Транспортные коэффициенты для вершины фильтрации.

Вводя обозначения: $T_i = \dfrac{\rho k_D \overline{c}_i}{\overline{s}_i}$, $i = 1,2$ и учитывая, что параметры $\overline{\alpha}_i$, $\overline{\beta}_i$, $i = 1,2$ в случае вершины фильтрации определяются формулой (1.7), выражения для коэффициентов отражения и прохождения волны давления (1.18), (1.19) можно преобразовать к виду:

$$\kappa_{1 \to 1}^{p} = \frac{(1 + z_1 \overline{m}_1) T_2 + (1 - z_2 \overline{m}_2)(1 + z_1 \overline{m}_1 - T_1)}{(1 - z_1 \overline{m}_1) T_2 + (1 - z_2 \overline{m}_2)(1 - z_1 \overline{m}_1 + T_1)} ,$$

$$\kappa_{1 \to 2}^{p} = \frac{2 T_2}{(1 - z_1 \overline{m}_1) T_2 + (1 - z_2 \overline{m}_2)(1 - z_1 \overline{m}_1 + T_1)} .$$

Так как рассматриваются только дозвуковые стационарные течения (т.е. $|\overline{m}_i| < 1$) и введенные параметры T_i, $i = 1,2$ являются положительными величинами, то $\kappa_{1 \to 2}^{p} > 0$. Таким образом, волна давления проходит участок фильтрации не изменяя своей фазы.

Соотношение (2.2), определяющее связь между коэффициентами отражения и прохождения волны давления, в случае вершины фильтрации принимает вид:

$$\kappa_{1 \to 2}^{p} = \frac{(1 - z_1 \overline{m}_1) T_2 - (1 - z_2 \overline{m}_2)(1 + z_1 \overline{m}_1 - T_1)}{(1 - z_1 \overline{m}_1) T_2 + (1 - z_2 \overline{m}_2)(1 - z_1 \overline{m}_1 + T_1)} + \kappa_{1 \to 1}^{p} .$$

3. Транспортные коэффициенты для вершины ветвления при условии равенства давлений на границе сосудов.

Введем обозначения:

$$R_{s,li} = \frac{\overline{s}_l}{\overline{s}_i}, \quad R_{\theta,li} = \frac{\overline{\theta}_l}{\overline{\theta}_i} . \qquad (2.4)$$

Параметр $R_{s,li}$ показывает во сколько раз различаются стационарные значения площадей сечений *l* сосуда и *i* сосуда.

Напомним, что величина $\overline{\theta}_i = \left. \dfrac{dS_i(P_i)}{dP_i} \right|_{P_i = \overline{p}_i}$ характеризует изменение сечения сосуда при изменении давления в нем. Чем больше значение $\overline{\theta}_i$, тем на большую величину изменится сечение сосуда при одном и том же изменении давления в нем. Величину $\overline{\theta}_i$ можно считать характеристикой эластичности сосуда.

Таким образом, параметр $R_{\theta,li}$ определяет отношение эластичностей *l* сосуда и *i* сосуда.

Используя для $\overline{\alpha}_i$, $\overline{\beta}_i$, $i=1,...,n$ формулы (1.5), а также введенные обозначения (2.4), выражения для коэффициентов отражения и прохождения волны давления (1.18), (1.19) можно преобразовать к виду:

$$\kappa^p_{i\to i} = \frac{2}{\sum\limits_{l=1}^{n}\sqrt{R_{s,li}R_{\theta,li}}(1-z_l\overline{m}_l)} - 1, \quad i=1,...,n, \tag{2.5}$$

$$\kappa^p_{i\to j} = \frac{2}{\sum\limits_{l=1}^{n}\sqrt{R_{s,li}R_{\theta,li}}(1-z_l\overline{m}_l)}, \quad i,j=1,...,n, \ \ i\neq j. \tag{2.6}$$

Из формул (2.5) и (2.6) следует, что для коэффициентов отражения и прохождения волны давления справедливы утверждения:

1. Коэффициенты $\kappa^p_{i\to j} > 0$, то есть волна давления проходит из i сосуда в j сосуд не изменяя своей фазы.

2. Коэффициенты отражения и прохождения волны давления связаны между собой следующим образом:

$$\kappa^p_{i\to j} = 1 + \kappa^p_{i\to i}.$$

3. Коэффициент прохождения волны давления из i сосуда в j сосуд равен коэффициенту прохождения из i сосуда в l сосуд (для любых j и l отличных от i), т.е. $\kappa^p_{i\to j} = \kappa^p_{i\to l}$.

4. Коэффициент прохождения волны давления из i сосуда в j сосуд связан с коэффициентом прохождения волны давления из j сосуда в i сосуд следующим образом:

$$\kappa^p_{i\to j} = \sqrt{R_{s,ij}R_{\theta,ij}}\,\kappa^p_{j\to i}.$$

Отметим, что отношение коэффициента $\kappa^p_{i\to j}$ к коэффициенту $\kappa^p_{j\to i}$ есть постоянная величина, зависящая только от свойств i и j сосуда и не зависящая от свойств других сосудов, входящих в вершину ветвления.

5. Коэффициент отражения волны давления в i сосуде связан с коэффициентом отражения волны давления в j сосуде следующим образом:

$$\kappa^p_{i\to i} = \sqrt{R_{s,ij}R_{\theta,ij}}\,\kappa^p_{j\to j} + \left(\sqrt{R_{s,ij}R_{\theta,ij}} - 1\right).$$

6. Коэффициент отражения волны давления в i сосуде $\kappa^p_{i\to i}$ больше единицы тогда и только тогда, когда выполняется неравенство:

$$\sum_{l=1}^{n}\sqrt{R_{s,li}R_{\theta,li}}(1-z_l\overline{m}_l) < 1. \tag{2.7}$$

Соотношение (2.7) является критерием, которому должны удовлетворять параметры сосудов, для того чтобы распространяющаяся в i сосуде волна давления при отражении от вершины ветвления увеличивала свою амплитуду.

7. Коэффициент прохождения волны давления из i сосуда в j сосуд $\kappa^p_{i\to j}$ больше единицы тогда и только тогда, когда выполняется неравенство:

$$\sum_{l=1}^{n}\sqrt{R_{s,li}R_{\theta,li}}(1-z_l\overline{m}_l) < 2. \tag{2.8}$$

Выполнение соотношения (2.8) гарантирует, что распространяющаяся в i сосуде волна давления проходит в j сосуд через вершину ветвления с увеличением своей амплитуды. Заметим, что согласно свойству 3, если коэффициент прохождения волны давления из i сосуда в j сосуд больше

единицы, то больше единицы и коэффициенты прохождения из i сосуда во все остальные сосуды.

Рассмотрим частные случаи. Пусть число сосудов, соединяющихся в вершине, равно двум ($n = 2$). В этом случае для параметров стационарного течения выполнено соотношение [3]:

$$\overline{m}_2 = -z_1 z_2 \frac{1}{R_{s,21}} \sqrt{\frac{R_{\theta,21}}{R_{s,21}}} \overline{m}_1 . \qquad (2.9)$$

Подставляя формулу (2.9) в (2.5) и (2.6) получаем, что коэффициенты отражения и прохождения волны давления имеют вид:

$$\kappa^p_{1\to1} = \frac{1 - \sqrt{R_{s,21}R_{\theta,21}} - z_1\overline{m}_1\left(\dfrac{R_{\theta,21}}{R_{s,21}} - 1\right)}{1 + \sqrt{R_{s,21}R_{\theta,21}} + z_1\overline{m}_1\left(\dfrac{R_{\theta,21}}{R_{s,21}} - 1\right)}, \qquad \kappa^p_{1\to2} = \frac{2}{1 + \sqrt{R_{s,21}R_{\theta,21}} + z_1\overline{m}_1\left(\dfrac{R_{\theta,21}}{R_{s,21}} - 1\right)}.$$

Отметим, что при $R_{s,21} = R_{\theta,21} = 1$, что в линейном приближении означает идентичность обоих сосудов, волна давления проходит участок соединения двух сосудов не изменяя своей амплитуды ($\kappa^p_{1\to2} = 1$). При этом отраженной волны давления не возникает ($\kappa^p_{1\to1} = 0$).

Зависимость коэффициентов отражения и прохождения волны давления от параметров двух сосудов показана на рисунках 2, 3, 4, 5. Заметим, что как видно из рисунка 3, при $R_{\theta,21} \le 1$ и $0.5 < R_{s,21} < 1$, что соответствует случаю артериальной части системы кровообращения, коэффициент прохождения волны давления из более широкого первого сосуда в более узкий второй сосуд больше единицы, а при $R_{\theta,21} \ge 1$ и $1 < R_{s,21} < 2$, что соответствует случаю венозной части системы кровообращения, коэффициент прохождения волны давления из более узкого первого сосуда в более широкий второй сосуд меньше единицы.

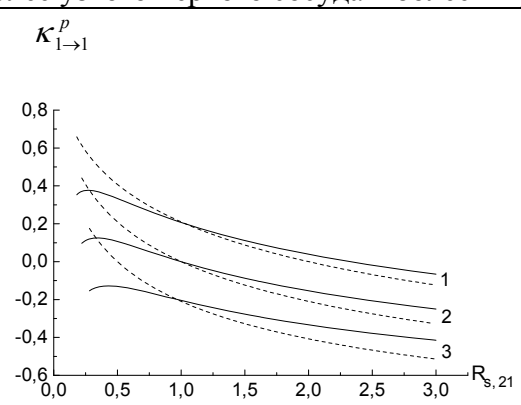


Рис. 2

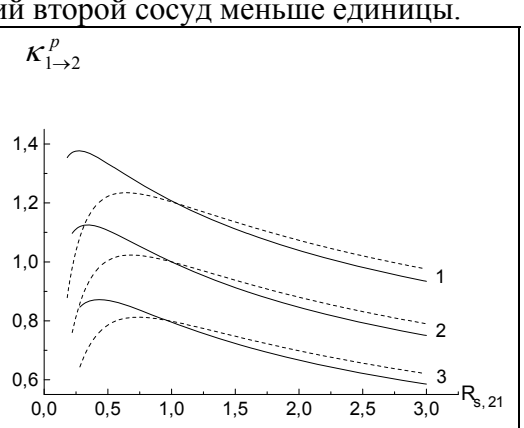


Рис. 3

На рисунках 2 и 3 приведены графики зависимости коэффициента отражения и, соответственно, коэффициента прохождения волны давления от $R_{s,21}$ при фиксированных значениях $R_{\theta,21}$ и $\overline{m}_1$. Сплошной линии соответствует случай выполнения условия равенства на границе сосудов давлений. Маркером 1 помечены графики отвечающие $R_{\theta,21} = 0.5$, маркером 2 – $R_{\theta,21} = 1$, маркером 3 – $R_{\theta,21} = 2$, при этом полагалось $\overline{m}_1 = -0.1$, $z_1 =$"–".

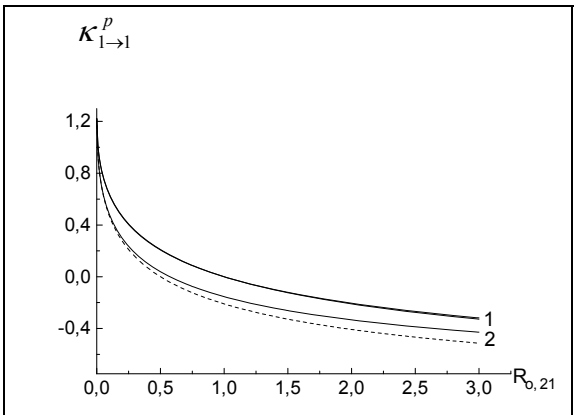


Рис. 4

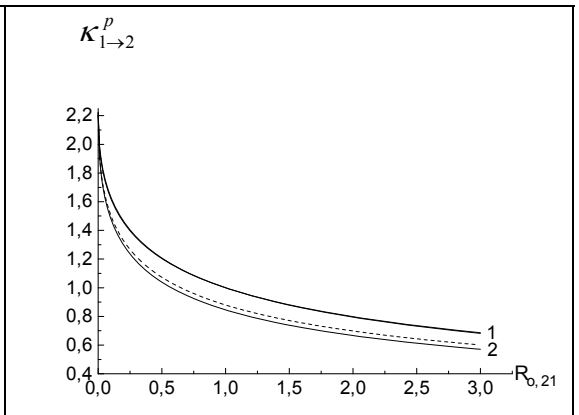


Рис. 5

На рисунках 4 и 5 приведены графики зависимости коэффициента отражения и, соответственно, коэффициента прохождения волны давления от $R_{\theta,21}$ при фиксированных значениях $R_{s,21}$ и $\overline{m}_1$. Маркером 1 помечены графики отвечающие $R_{s,21}=1$, маркером 2 – $R_{s,21}=2$, при этом полагалось $\overline{m}_1=-0.1,\quad z_1=\text{"}-\text{"}$.

В случае, когда число сосудов, соединяющихся в вершине, равно трем ($n=3$), коэффициент отражения волны давления в первом сосуде и коэффициенты прохождения волны давления из первого сосуда во второй и третий сосуды имеют вид:

$$\kappa^p_{1\to1}=\frac{1-\sqrt{R_{s,21}R_{\theta,21}}-\sqrt{R_{s,31}R_{\theta,31}}-z_1\overline{m}_1\left(\frac{R_{\theta,31}}{R_{s,31}}-1\right)-\sqrt{R_{s,21}R_{\theta,21}}z_2\overline{m}_2\left(\frac{R_{\theta,32}}{R_{s,32}}-1\right)}{1+\sqrt{R_{s,21}R_{\theta,21}}+\sqrt{R_{s,31}R_{\theta,31}}+z_1\overline{m}_1\left(\frac{R_{\theta,31}}{R_{s,31}}-1\right)+\sqrt{R_{s,21}R_{\theta,21}}z_2\overline{m}_2\left(\frac{R_{\theta,32}}{R_{s,32}}-1\right)},$$

$$\kappa^p_{1\to2}=\kappa^p_{1\to3}=$$

$$=\frac{2}{1+\sqrt{R_{s,21}R_{\theta,21}}+\sqrt{R_{s,31}R_{\theta,31}}+z_1\overline{m}_1\left(\frac{R_{\theta,31}}{R_{s,31}}-1\right)+\sqrt{R_{s,21}R_{\theta,21}}z_2\overline{m}_2\left(\frac{R_{\theta,32}}{R_{s,32}}-1\right)}.$$

Отметим, что, например, вычисленный по вышеописанным формулам коэффициент прохождения волны давления из общей подвздошной артерии в бедренную артерию и внутреннюю подвздошную артерию равен $\kappa^p_{1\to2}=1.4$, а коэффициент отражения волны давления в подвздошной артерии равен $\kappa^p_{1\to1}=0.4$. Параметры сосудов системы кровообращения были предоставлены А.Я. Буничевой.

4. Транспортные коэффициенты для вершины ветвления при условии равенства интегралов Бернулли на границе сосудов.

В этом случае, учитывая, что коэффициенты $\overline{\alpha}_i$, $\overline{\beta}_i$, $i=1,...,n$ определяются формулой (1.6), а также введенные обозначения (2.4), можно преобразовать выражения для коэффициентов отражения и прохождения волны давления к виду:

$$\kappa_{i\to i}^{p} = \frac{1+z_i\overline{m}_i}{1-z_i\overline{m}_i}\left(\frac{2}{\sum_{l=1}^{n}\sqrt{R_{s,li}R_{\theta,li}}}-1\right), \quad i=1,...,n, \tag{2.10}$$

$$\kappa_{i\to j}^{p} = \frac{1+z_i\overline{m}_i}{1-z_j\overline{m}_j}\frac{2}{\sum_{l=1}^{n}\sqrt{R_{s,li}R_{\theta,li}}}, \quad i,j=1,...,n, \ \ i\neq j. \tag{2.11}$$

Из формул (2.10) и (2.11) устанавливаются следующие свойства коэффициентов отражения и прохождения волны давления:

1. Волна давления проходит из i сосуда в j сосуд не изменяя своей фазы, т.е. $\kappa_{i\to j}^{p} > 0$.

2. Коэффициенты отражения и прохождения волны давления связаны между собой следующим образом:

$$(1-z_j\overline{m}_j)\kappa_{i\to j}^{p} = (1+z_i\overline{m}_i)+(1-z_i\overline{m}_i)\kappa_{i\to i}^{p}.$$

3. Коэффициент прохождения волны давления из i сосуда в j сосуд связан с коэффициентом прохождения волны давления из i сосуда в l сосуд (для любых j и l отличных от i) следующим соотношением:

$$(1-z_j\overline{m}_j)\kappa_{i\to j}^{p} = (1-z_l\overline{m}_l)\kappa_{i\to l}^{p}.$$

4. Коэффициент прохождения волны давления из i сосуда в j сосуд связан с коэффициентом прохождения волны давления из j сосуда в i сосуд следующим образом:

$$\kappa_{i\to j}^{p} = \sqrt{R_{s,ij}R_{\theta,ij}}\,\frac{1-\overline{m}_i^2}{1-\overline{m}_j^2}\kappa_{j\to i}^{p}.$$

Отметим, что отношение коэффициента $\kappa_{i\to j}^{p}$ к коэффициенту $\kappa_{j\to i}^{p}$ есть постоянная величина, зависящая только от свойств i и j сосуда и не зависящая от свойств других сосудов, входящих в вершину ветвления.

5. Коэффициент отражения волны давления в i сосуде связан с коэффициентом отражения волны давления в j сосуде следующим образом:

$$\kappa_{i\to i}^{p} = \sqrt{R_{s,ij}R_{\theta,ij}}\,\frac{1+z_i\overline{m}_i}{1-z_i\overline{m}_i}\,\frac{1-z_j\overline{m}_j}{1+z_j\overline{m}_j}\kappa_{j\to j}^{p} + \frac{1+z_i\overline{m}_i}{1-z_i\overline{m}_i}\left(\sqrt{R_{s,ij}R_{\theta,ij}}-1\right).$$

6. Коэффициент отражения волны давления в i сосуде $\kappa_{i\to i}^{p}$ больше единицы тогда и только тогда, когда выполняется неравенство:

$$\sum_{l=1}^{n}\sqrt{R_{s,li}R_{\theta,li}} < 1+z_i\overline{m}_i.$$

7. Коэффициент прохождения волны давления из i сосуда в j сосуд $\kappa_{i\to j}^{p}$ больше единицы тогда и только тогда, когда выполняется неравенство:

$$\sum_{l=1}^{n}\sqrt{R_{s,li}R_{\theta,li}} < 2\frac{1+z_i\overline{m}_i}{1-z_i\overline{m}_i}.$$

Рассмотрим первый частный случай, когда число сосудов, соединяющихся в вершине, равно двум ($n=2$). В этом случае формулы для коэффициентов отражения и прохождения волны давления имеют вид:

$$\kappa^p_{1\to1} = \frac{1-\sqrt{R_{s,21}R_{\theta,21}}}{1+\sqrt{R_{s,21}R_{\theta,21}}}\,\frac{1+z_1\overline{m}_1}{1-z_1\overline{m}_1}, \qquad \kappa^p_{1\to2} = \frac{2(1+z_1\overline{m}_1)}{\left(1+\sqrt{R_{s,21}R_{\theta,21}}\right)\left(1+z_1\dfrac{1}{R_{s,21}}\sqrt{\dfrac{R_{\theta,21}}{R_{s,21}}}\overline{m}_1\right)}.$$

Из этих формул следует, что при $R_{s,21} = R_{\theta,21} = 1$ волна давления проходит вершину соединения двух сосудов не изменяя своей амплитуды ($\kappa^p_{1\to2} = 1$), а отраженной волны давления не возникает ($\kappa^p_{1\to1} = 0$).

На рисунках 2, 3, 4, 5 пунктирной линией показана зависимость коэффициентов отражения и прохождения волны давления от параметров двух сосудов. Заметим, что как видно из рисунка 3, при $R_{\theta,21} \le 1$ и $0.5 < R_{s,21} < 1$, что соответствует случаю артериальной части системы кровообращения, коэффициент прохождения волны давления из более широкого первого сосуда в более узкий второй сосуд больше единицы, а при $R_{\theta,21} \ge 1$ и $1 < R_{s,21} < 2$, что соответствует случаю венозной части системы кровообращения, коэффициент прохождения волны давления из более узкого первого сосуда в более широкий второй сосуд меньше единицы.

Второй частный случай соответствует $n = 3$. При этом коэффициент отражения волны давления в первом сосуде и коэффициенты прохождения волны давления из первого сосуда во второй и третий сосуд имеют вид:

$$\kappa^p_{1\to1} = \frac{1+z_1\overline{m}_1}{1-z_1\overline{m}_1}\,\frac{1-\sqrt{R_{s,21}R_{\theta,21}}-\sqrt{R_{s,31}R_{\theta,31}}}{1+\sqrt{R_{s,21}R_{\theta,21}}+\sqrt{R_{s,31}R_{\theta,31}}},$$

$$\kappa^p_{1\to2} = \frac{1+z_1\overline{m}_1}{1-z_2\overline{m}_2}\,\frac{2}{1+\sqrt{R_{s,21}R_{\theta,21}}+\sqrt{R_{s,31}R_{\theta,31}}},$$

$$\kappa^p_{1\to3} = \frac{1+z_1\overline{m}_1}{1-z_3\overline{m}_3}\,\frac{2}{1+\sqrt{R_{s,21}R_{\theta,21}}+\sqrt{R_{s,31}R_{\theta,31}}}.$$

Отметим, что, например, вычисленный по вышеописанным формулам коэффициент прохождения волны давления из обшей подвздошной артерии в бедренную артерию равен $\kappa^p_{1\to2} = 1.39$, а коэффициент отражения волны давления в подвздошной артерии равен $\kappa^p_{1\to1} = 0.41$.

Заметим, что разница значений параметров стационарного течения, вычисленного при условии равенства давлений на границе сосудов, и значений параметров стационарного течения, вычисленного при условии равенства интегралов Бернулли на границе сосудов, для системы кровообращения человека составляет порядка 0.1% от значения параметров. Однако в кровеносной системе человека отличие в значениях транспортных коэффициентов для волны давления, вычисленных для обоих случаев, может быть существенной (порядка 20 и более процентов) (см. таблицу 2). Тем не менее, более 80% транспортных коэффициентов, вычисленных при условии равенства интегралов Бернулли на границе сосудов, отличаются не более чем на 10% от соответствующих значений транспортных коэффициентов, вычисленных при условии равенства давлений на границе сосудов (см. таблицу 2).

Таблица 2.

Диапазон отклонения *) (в процентах)	**Количество транспортных коэффициентов (в шт.)**	**Количество (в процентах от общего числа коэффициентов)**
< 5	286	60.6
5 – 10	93	19.7
10 – 15	54	11.4
15 – 20	21	4.5
20 – 25	8	1.7
25 – 30	5	1.1
30 – 35	2	0.4
35 – 40	3	0.6
>40	0	0
Итого	472	100

*) диапазон отклонения – отклонение значения транспортного коэффициента для волны давления, вычисленного при условии равенства интегралов Бернулли на границе сосудов, от соответствующего значения транспортного коэффициента, вычисленного при условии равенства давлений на границе сосудов. Отклонение указано в процентах от текущего значения транспортного коэффициента, вычисленного при условии равенства давлений. Данные приведены для транспортных коэффициентов, значения которых больше по модулю $\chi = 0.1$. Отметим, что при других значениях числа χ принципиальных изменений в процентном распределении коэффициентов не наблюдается.

§3. Решение системы ЛГД уравнений на графе сосудов.

1. Математическая постановка задачи.

Рассмотрим произвольный граф состоящий из n ребер соединяющих m вершин. Введем нумерацию ребер натуральными числами от 1 до n, а вершин числами от 1 до m. Обозначим через l_i, $i = 1,...,n$ длину ребра графа. Введем на каждом ребре свою систему координат так, что один конец ребра имеет координату $x_i = 0$, а другой конец ребра имеет координату $x_i = l_i$, $i = 1,...,n$. Направление координатной оси на ребре примем за направление этого ребра.

Будем предполагать, что на каждом ребре графа выполнены ЛГД уравнения:

$$\begin{aligned} &p_{i\,t} + \bar{u}_i p_{i\,x_i} + \rho \bar{c}_i^2 u_{i\,x_i} = 0 \,, \\ &u_{i\,t} + \frac{1}{\rho} p_{i\,x_i} + \bar{u}_i u_{i\,x_i} = 0 \,,\ 0 < x_i < l_i \,,\ t > 0 \,,\ i = 1,...,n \end{aligned} \tag{3.1}$$

и заданные начальные условия для функций $p_i(x_i,t)$ и $u_i(x_i,t)$:

$$\begin{aligned} &p_i(x_i,0) = \varphi_i(x_i) \,, \\ &u_i(x_i,0) = \psi_i(x_i) \,,\ 0 \le x_i \le l_i \,,\ i = 1,...,n. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Пусть также в каждой вершине графа выполнены некоторые дополнительные условия на функции $p_i(x_i,t)$, $u_i(x_i,t)$. Так, если вершина графа с номером k является внутренней вершиной графа, то значения функций $p_i(x_i,t)$ и $u_i(x_i,t)$ в граничных точках ребер, соединяющихся в данной вершине, связаны между собой соотношениями:

$$\sum_{i\in\Omega(k)} z_i\left(\bar{s}_i u_i(x_{i,\,гр.},t)+\bar{\theta}_i\bar{u}_i p_i(x_{i,\,гр.},t)\right)=0, \tag{3.3}$$

$$\bar{\alpha}_i p_i(x_{i,\,гр.},t)+\bar{\beta}_i u_i(x_{i,\,гр.},t)=\bar{\alpha}_j p_j(x_{j,\,гр.},t)+\bar{\beta}_j u_j(x_{j,\,гр.},t),$$
$$t\ge 0,\quad \forall i,j\in\Omega(k). \tag{3.4}$$

Здесь, $\Omega(k)$ – множество всех номеров ребер, соединяющихся в k вершине графа; переменная $x_{i,\,гр.}$ равна либо 0, либо l_i и совпадает с значением координаты граничной точки i ребра, соединенного с k вершиной графа; коэффициенты $\bar{\alpha}_i$ и $\bar{\beta}_i$, $i\in\Omega(k)$ определяются, например, формулами (1.5).

В случае если k вершина графа является граничной, то в точке $x_{i,\,гр.}$ ребра с номером i, соединенного с k вершиной, задается одно из условий, представленных в таблице 1 (см. §1).

2. Решение задачи.

Рассмотрим произвольную вершину графа с номером k. Введем для каждого ребра, соединенного с k вершиной графа, параметр z_i ($i\in\Omega(k)$), который принимает значение арифметического знака “+” для ребер входящих в k вершину и значение знака “–” для ребер выходящих из k вершины графа. Рассмотрим произвольное ребро с номером i, соединенное с k вершиной графа.

Общее решение ЛГД уравнений (3.1) представляет собой суперпозицию двух бегущих волн $f_i^{z_i}(x_i-\bar{\lambda}_i^{z_i}t)$ и $f_i^{-z_i}(x_i-\bar{\lambda}_i^{-z_i}t)$ (см. формулу (1.8)). Отметим, что при $0\le x_i\le l_i$, $t\ge 0$ в случае дозвукового стационарного течения аргумент функции $f_i^{z_i}$ принимает значения в интервале $z_i y_i\le x_{i,\,гр.}$, а аргумент функции $f_i^{-z_i}(y_i)$ – в интервале $z_i y_i\ge x_{i,\,гр.}-l_i$.

Из начальных условий (3.2) и соотношений (1.8) следует, что при значениях аргумента лежащих в интервале

$$x_{i,\,гр.}-l_i\le z_i y_i\le x_{i,\,гр.},\ i\in\Omega(k), \tag{3.5}$$

функции $f_i^{z_i}(y_i)$, $f_i^{-z_i}(y_i)$ выражаются через начальные условия (3.2) и имеют вид (1.9).

В §1 было показано, что волна $f_i^{-z_i}$, распространяющаяся по i ребру графа в направлении от его k вершины, представляет собой суперпозицию волн $f_j^{z_j}$ ($j\in\Omega(k)$), бегущих по ребрам графа по направлению к его k вершине:

$$f_i^{-z_i}(y_i)=\sum_{j\in\Omega(k)}\kappa^u_{j\to i} f_j^{z_j}\left(x_{j,\,гр.}-\frac{\bar{\lambda}_j^{z_j}}{\bar{\lambda}_i^{-z_i}}\left(x_{i,\,гр.}-y_i\right)\right)+$$
$$+G_i\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}_i^{-z_i}}\left(x_{i,\,гр.}-y_i\right)\right),\ \forall i\in\Omega(k), \tag{3.6}$$

где

$$G_i=\begin{cases}0, & \text{если } k \text{ вершина является внутренней вершиной графа,}\\ F_i, & \text{если } k \text{ вершина является граничной вершиной графа.}\end{cases}$$

Вид функции F_i выбирается в соответствие с таблицей 1 (см. §1).

В случае, когда аргументы функций $f_j^{z_j}$, стоящих в правой части формулы (3.6), удовлетворяют неравенству (3.5), т.е.

$$x_{j,\,гр.} - l_j \le z_j \left(x_{j,\,гр.} - \frac{\overline{\lambda}_j^{z_j}}{\overline{\lambda}_i^{-z_i}} \left(x_{i,\,гр.} - y_i \right) \right) \le x_{j,\,гр.}, \quad \forall j \in \Omega(k), \tag{3.7}$$

функция $f_i^{-z_i}$ в (3.6) оказывается выраженной через начальные данные для давления и скорости на всех сосудах, соединяющихся в k вершине графа.

Неравенства (3.7) эквивалентны следующим соотношениям:

$$x_{i,\,гр.} \le z_i y_i \le x_{i,\,гр.} - z_i \overline{\lambda}_i^{-z_i} \frac{z_j}{\overline{\lambda}_j^{z_j}}, \quad \forall j \in \Omega(k). \tag{3.8}$$

Можно показать, что неравенства (3.8), будут выполненными, при условии:

$$x_{i,\,гр.} \le z_i y_i \le x_{i,\,гр.} - z_i \overline{\lambda}_i^{-z_i} T, \tag{3.9}$$

где $T = \min\limits_{1 \le j \le n} \left(\dfrac{l_j}{\overline{c}_j \pm \overline{u}_j} \right)$, (3.10)

Таким образом, объединяя формулы (1.9), (3.6), (3.9), (3.10) получаем:

$$f_i^{-z_i}(x_i - \overline{\lambda}_i^{-z_i} t) = \begin{cases} -\dfrac{z_i}{\rho \overline{c}_i} \varphi_i (x_i - \overline{\lambda}_i^{-z_i} t) + \psi_i (x_i - \overline{\lambda}_i^{-z_i} t), \\ \text{если } x_{i,\,гр.} - l_i \le z_i (x_i - \overline{\lambda}_i^{-z_i} t) \le x_{i,\,гр.}; \\ \displaystyle\sum_{j \in \Omega(k)} \kappa_{j \to i}^{u} \left(\frac{z_j}{\rho \overline{c}_j} \varphi_j \left(x_{j,\,гр.} - \frac{\overline{\lambda}_j^{z_j}}{\overline{\lambda}_i^{-z_i}} \left(x_{i,\,гр.} - (x_i - \overline{\lambda}_i^{-z_i} t) \right) \right) + \right. \\ \left. + \psi_j \left(x_{j,\,гр.} - \dfrac{\overline{\lambda}_j^{z_j}}{\overline{\lambda}_i^{-z_i}} \left(x_{i,\,гр.} - (x_i - \overline{\lambda}_i^{-z_i} t) \right) \right) \right) + G_i \left(\dfrac{1}{\overline{\lambda}_i^{-z_i}} \left(x_{i,\,гр.} - (x_i - \overline{\lambda}_i^{-z_i} t) \right) \right), \\ \text{если } x_{i,\,гр.} < z_i (x_i - \overline{\lambda}_i^{-z_i} t) \le x_{i,\,гр.} - z_i \overline{\lambda}_i^{-z_i} T, \ \forall i \in \Omega(k), \ k = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{3.11}$$

Формулы (3.11) определяют функции $f_i^{-z_i}(x_i - \overline{\lambda}_i^{-z_i} t)$, $i = 1, \ldots, n$, в области $x_i \in [0, l_i]$, $t \in [0, T]$.

Подставляя формулы (3.11) в (1.8), получаем решение задачи (3.1) – (3.4) при $t \in [0, T]$.

Если примем $p_i(x_i, T)$, $u_i(x_i, T)$ за новые начальные данные задачи (3.1) - (3.4), то получим, что формулы (1.8), (3.11) определяют решение исходной задачи уже на временном промежутке $t \in [T, 2T]$. Повторяя эту операцию далее, можно получить решение задачи (3.1) – (3.4) на любой сколь угодно большой момент времени.

3. Алгоритм численного расчета решения смешанной задачи для ЛГД уравнений на произвольном графе.

Рассмотрим несколько вариантов реализации расчетов, использующих формулы (1.8), (3.11) определяющие решение смешанной задачи для ЛГД уравнений на произвольном графе.

3.1. Реализация, основанная на интерполяции сеточных функций на каждом шаге по времени.

Пусть известно решение задачи (3.1) – (3.4) на момент времени t, т.е. известны функции $p_i(x_i, t)$ и $u_i(x_i, t)$, где $0 \le x_i \le l_i$, t – фиксировано,

$i = 1,...,n$. Так, при $t = 0$, давление и скорость являются начальными данными задачи (3.1) – (3.4). Тогда, используя формулу (3.11), получаем, что на момент времени $t + \tau$, при условии, что $\tau \le T$ (см. (3.10)), решение задачи (3.1) – (3.4) выражается формулой (1.8), где

$$f_i^{-z_i}(x_i - \overline{\lambda}_i^{-z_i}(t+\tau)) = \begin{cases} -\dfrac{z_i}{\rho \overline{c}_i} p_i(x_i - \overline{\lambda}_i^{-z_i}\tau, t) + u_i(x_i - \overline{\lambda}_i^{-z_i}\tau, t), \quad \text{если } x_i \in [a_i, b_i], \\ \sum\limits_{j \in \Omega(k)} \kappa_{j \to i}^u \left(\dfrac{z_j}{\rho \overline{c}_j} p_j \left(x_{j,\,гр.} - \overline{\lambda}_j^{z_j} \left(\tau + \dfrac{x_{i,\,гр.} - x_i}{\overline{\lambda}_i^{-z_i}} \right), t \right) + \right. \\ \left. + u_j \left(x_{j,\,гр.} - \overline{\lambda}_j^{z_j} \left(\tau + \dfrac{x_{i,\,гр.} - x_i}{\overline{\lambda}_i^{-z_i}} \right), t \right) \right) + G_i \left(t + \tau + \dfrac{x_{i,\,гр.} - x_i}{\overline{\lambda}_i^{-z_i}} \right), \\ \qquad \text{если } x_i \notin [a_i, b_i], \quad \forall i \in \Omega(k), \quad k = 1,...,m. \end{cases} \tag{3.12}$$

Здесь,

$$a_i = \begin{cases} 0, & \text{если } z_i = "+", \\ \overline{\lambda}_i^{z_i}\tau, & \text{если } z_i = "-", \end{cases} \quad b_i = \begin{cases} l_i + \overline{\lambda}_i^{-z_i}\tau, & \text{если } z_i = "+", \\ l_i, & \text{если } z_i = "-", \end{cases} \quad x_{i,\,гр.} = \begin{cases} l_i, & \text{если } z_i = "+", \\ 0, & \text{если } z_i = "-". \end{cases}$$

Значения давления и скорости на момент времени t известны только в узлах введенной разностной сетки на ребрах графа. Однако для нахождения давления и скорости в следующий момент времени $t + \tau$ может потребоваться значение функций $p_i(x_i, t)$ и $u_i(x_i, t)$ в точках, не являющихся узлами разностной сетки. Поэтому, для получения решения на момент времени $t + \tau$, необходимо провести интерполяцию известных на момент времени t дискретных значений давления и скорости. В связи с этим, решение задачи (3.1) – (3.4) удается получить с некоторой погрешностью, вызванной интерполяцией. Величина этой погрешности зависит как от вида интерполяции, так и от значений шагов разностной сетки по пространственной и временной переменной.

В качестве примера рассмотрим граф, состоящий из трех ребер сходящихся в одной вершине. На границе сосудов считались выполненным условие равенства давлений. Стационарное течение полагалось:
$\overline{p}_1 = \overline{p}_2 = \overline{p}_3 = 100$ мм рт.ст., $\overline{s}_1 = 6$ см^2, $\overline{s}_2 = 3$ см^2, $\overline{s}_3 = 2$ см^2,
$\overline{\theta}_1 = 0.04 \ \dfrac{\text{см}^2}{\text{мм. рт.ст.}}$, $\overline{\theta}_2 = \overline{\theta}_3 = 0.02 \ \dfrac{\text{см}^2}{\text{мм. рт.ст.}}$, $\overline{u}_1 = 20$ см/сек, $\overline{u}_2 = 30$ см/сек,
$\overline{u}_3 = 15$ см/сек. Для используемого графа $T = 0.02$ сек. Функции начального возмущения стационарного значения давления и скорости задавались формулами (4.5) и (4.6), при значении A=1 мм рт.ст. (см. §4).

На рисунке 6 приведено сравнение точного решения задачи (3.1) – (3.4) на одном из ребер этого графа с численными решениями, полученными при использовании различных видов интерполяции.

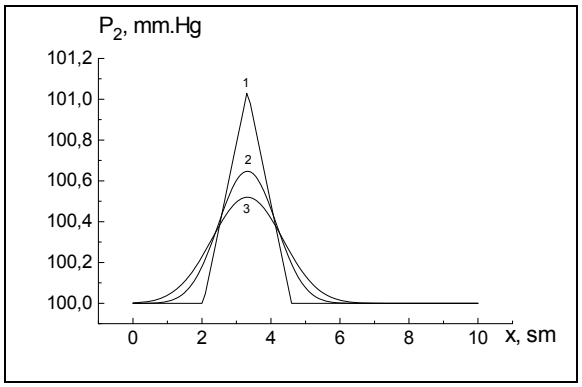


Рис. 6.

На рисунке 6 маркером “1” помечено точное решение задачи (3.1) – (3.4). Маркером “2” – численное решение, полученное при использовании для интерполяции полиномов Лагранжа первой степени [7]. Маркером “3” – численное решение, соответствующее интерполяции сплайном третьей степени [7]. Графики приведены на момент времени $t = 0.015$ сек. Шаг разностной сетки по пространственной координате равен $h = 0.1$ см, а шаг разностной сетки по времени $\tau = 10^{-4}$ сек.

На рисунках 7 и 8 показано сравнение точного решения задачи (3.1) – (3.4) с численными решениями, соответствующими различным шагам разностной сетки по времени и пространственной переменной, соответственно. При расчетах использовалась интерполяция полиномами Лагранжа первой степени.

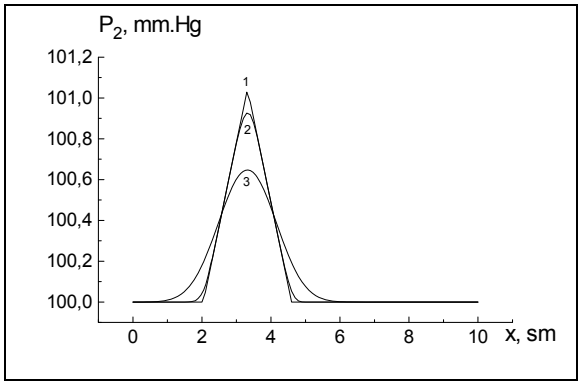


Рис. 7.

На рисунке 7 маркером “1” помечено точное решение задачи (3.1) – (3.4). Маркером “2” – численное решение, полученное при шаге разностной сетки по времени $\tau = 10^{-3}$ сек, а маркером “3” – численное решение при $\tau = 10^{-4}$ сек. Графики приведены на момент времени $t = 0.015$ сек. Шаг разностной сетки по пространственной переменной равен $h = 0.1$ см.

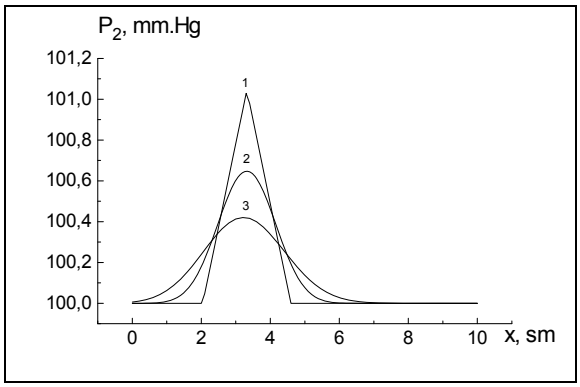


Рис. 8.

На рисунке 8 маркером “1” помечено точное решение задачи. Маркером “2” – численное решение, полученное при шаге разностной сетки по пространственной переменной $h = 0.1$ см, а маркером “3” – численное решение при $h = 0.2$ см. Графики приведены на момент времени $t = 0.015$ сек. Шаг разностной сетки по времени равен $\tau = 10^{-4}$ сек.

Из рисунков 6 – 8 видно, что численный алгоритм, использующий интерполяцию сеточных функций на каждом шаге по времени, имеет погрешность, которая заметно искажает профиль точного решения задачи (3.1) – (3.4).

3.2. Реализация, основанная на рекурсивном вызове функции.

Полагая в формуле (3.6) $y_i = x_i - \overline{\lambda}_i^{-z_i}(t+T)$, где T определяется согласно (3.10), получаем:

$$f_i^+(x_i - \overline{\lambda}_i^+(t+T)) = \begin{cases} f_i^+\left((x_i - \overline{\lambda}_i^+ T) - \overline{\lambda}_i^+ t\right), & \text{если } \overline{\lambda}_i^+ T \le x_i, \\ \sum\limits_{j\in\Omega(k)} \kappa_{j\to i}^u f_j^{z_j}\left(\left(x_{j,\,гр.} + \dfrac{\overline{\lambda}_j^{z_j}}{\overline{\lambda}_i^+} x_i - \overline{\lambda}_j^{z_j} T\right) - \overline{\lambda}_j^{z_j} t\right) + \\ \qquad + G_i\left(-\dfrac{1}{\overline{\lambda}_i^+} x_i + T + t\right), & \text{если } x_i < \overline{\lambda}_i^+ T \quad i = 1,\dots,n, \end{cases}$$

(3.13)

$$f_i^-(x_i - \overline{\lambda}_i^-(t+T)) = \begin{cases} f_i^-\left((x_i - \overline{\lambda}_i^- T) - \overline{\lambda}_i^- t\right), & \text{если } x_i - \overline{\lambda}_i^- T \le l_i, \\ \sum\limits_{j\in\Omega(m)} \kappa_{j\to i}^u f_j^{z_j}\left(\left(x_{j,\,гр.} - l_i \dfrac{\overline{\lambda}_j^{z_j}}{\overline{\lambda}_i^-} + \dfrac{\overline{\lambda}_j^{z_j}}{\overline{\lambda}_i^-} x_i - \overline{\lambda}_j^{z_j} T\right) - \overline{\lambda}_j^{z_j} t\right) + \\ \qquad + G_i\left(\dfrac{l_i}{\overline{\lambda}_i^-} - \dfrac{1}{\overline{\lambda}_i^-} x_i + T + t\right), & \text{если } l_i < x_i - \overline{\lambda}_i^- T, \quad i = 1,\dots,n. \end{cases}$$

Здесь k – вершина графа, из которой выходит i сосуд и m – вершина графа, в которую входит i сосуд.

Формула (3.13) позволяет нахождение функций f_i^+ и f_i^-, $i = 1,\dots,n$ при $x_i \in [0,\, l_i]$ на момент времени $t+T$ свести к поиску этих же функций при $x_i \in [0,\, l_i]$ на момент времени t. Учитывая, что функции f_i^+ и f_i^- при $x_i \in [0,\, l_i]$ на временном интервале $[0, T]$ выражаются через начальные данные

задачи (3.1) – (3.4) в соответствии с формулой (3.11) и в силу произвольности *t*, формулы (3.13) позволяют, используя механизм рекурсий, находить функции f_i^+ и f_i^-, а, следовательно, согласно (1.8) давление и скорость, по начальным данным.

В любом языке программирования количество рекурсивных вызовов функций ограничено (обычно допускается около 1000 рекурсивных вызовов). Поэтому полностью отказаться от пересчета функций давления и скорости с помощью интерполяции не удается, но общее количество интерполяций может быть существенно уменьшено. Из рисунка 9 видно, что реализация алгоритма решения задачи (3.1) – (3.4), основанная на рекурсивном вызове функции, позволяет довольно точно производить расчет на больших интервалах времени.

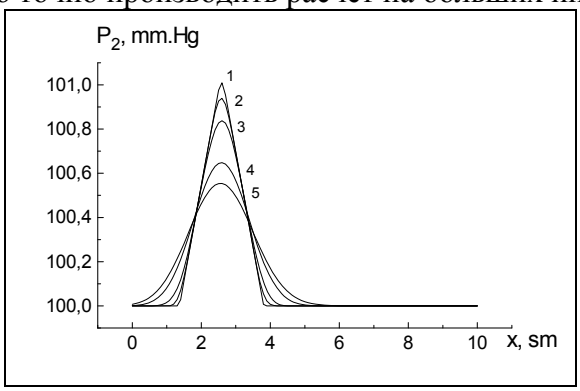


Рис. 9.

На рисунке 9 приведены результаты численного решения задачи (3.1) – (3.4), полученные при использовании алгоритма, основанного на рекурсивном вызове функции. Маркер “1” соответствует результатам расчета без использовании интерполяций. Маркер “2” соответствует результатам расчета с 10 интерполяциями. Маркер “3” соответствует результатам расчета с 50 интерполяциями. Маркер “4” соответствует результатам расчета с 100 интерполяциями. Маркер “5” соответствует результатам расчета с 1000 интерполяциями. При расчетах использовалась интерполяция полиномами Лагранжа первой степени.

На рисунке 10 приведено сравнение точного решения задачи (3.1) – (3.4) на одном из ребер графа и численных решений, полученных по алгоритму (1.8), (3.12) и алгоритму (1.8), (3.13).

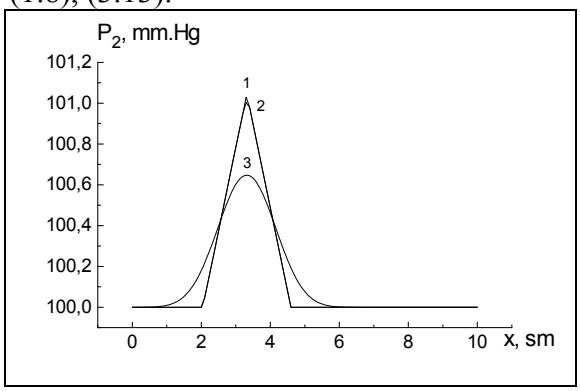


Рис. 10.

Здесь маркером “1” помечено точное решение задачи (3.1) – (3.4). Маркером “2” – численное решение, полученное по алгоритму (1.8), (3.13) (оно практически совпадает с точным решение). Маркером “3” – решение, полученное по алгоритму (1.8), (3.12) при шаге разностной сетки по времени равном $\tau = 10^{-4}$

сек. Шаг разностной сетки по пространственной переменной $h = 0.1$ см. Графики приведены на момент времени $t = 0.015$ сек. При получении численных решений, использовалась интерполяция с помощью полиномов Лагранжа первой степени.

§4. Результаты сравнения аналитических и численных решений уравнений гемодинамики на графе сосудов.

1. Постановка расчетной задачи.

Рассмотрим граф, состоящий из n ребер (n>1) и n+1 вершины. Будем считать, что все ребра данного графа сходятся в одной вершине (в дальнейшем эту вершину будем называть центральной, а остальные вершины – граничными). Введем на каждом ребре свою систему координат так, что один конец ребра имеет координату $x_i = 0$, а другой конец ребра имеет координату $x_i = l_i$, $i = 1,...,n$. Направление координатной оси на ребре примем за направление этого ребра.

Пусть на каждом ребре графа выполняются уравнения:

$$S_{it} + (S_i U_i)_{x_i} = 0,$$

$$U_{it} + \left(\frac{U_i^2}{2} + \frac{P_i}{\rho}\right)_{x_i} = 0,\ 0 < x_i < l_i,\ t > 0,$$

$$S_i = S_i(P_i), \tag{4.1}$$

$$P_i(x_i,0) = \overline{p}_i + \varphi_i(x_i),$$

$$U_i(x_i,0) = \overline{u}_i + \psi_i(x_i),\ \ 0 \le x_i \le l_i,\ i = 1,...,n,$$

в граничных вершинах графа выполнены условия:

$$P_i(x_{i,\,гр.},t) = \overline{p}_i,\ t \ge 0,\quad i = 1,...,n, \tag{4.2}$$

а в центральной вершине графа функции $P_i(x_i,t)$, $U_i(x_i,t)$ связаны дополнительными условиями:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i S_i\left(P_i(x_{i,\,гр.},t)\right) U_i(x_{i,\,гр.},t) = 0, \tag{4.3}$$

$$g_1\left(P_1(x_{1,\,гр.},t), U_1(x_{1,\,гр.},t)\right) = g_j\left(P_j(x_{j,\,гр.},t), U_j(x_{j,\,гр.},t)\right),\ \ t \ge 0,\ \ j = 2,...,n. \tag{4.4}$$

Здесь, переменная $x_{i,\,гр.}$ равна либо 0, либо l_i и совпадает с значением координаты граничной точки i ребра, соединенного с текущей вершиной графа; параметр z_i принимает значение арифметического знака “+” для ребер входящих в центральную вершину и значение знака “–” для ребер выходящих из центральной вершины графа.

Будем рассматривать два случая.

В первом случае центральная вершина графа является вершиной ветвления сосудов. Тогда, если на границе сосудов выполняется условие равенства давлений, то функции g_i, $i = 1,...,n$ из условия (4.4) определяются формулой (1.5), если же на границе сосудов выполняется условие равенства интегралов Бернулли, то g_i определяются согласно (1.6).

Во втором случае центральная вершина графа является вершиной фильтрации. В этом случае g_i, $i = 1,2$ определяются формулой (1.7).

В качестве $S_i(P_i),\ i = 1,...,n$ использовались кусочно-линейные функции, представленные на рисунке 11.

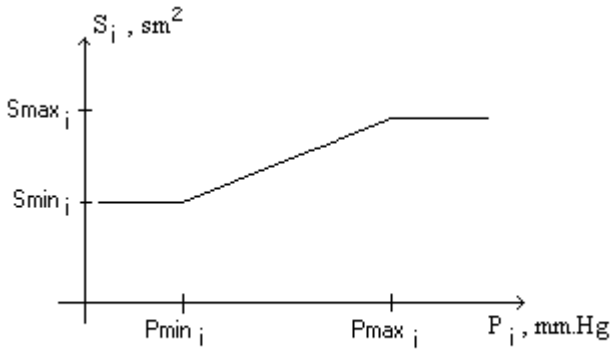


Рис. 11.

Функции начального возмущения стационарного значения давления $\varphi_i(x_i),\ i=1,...,n$ задавались формулами:

$$\varphi_1(x_1)=\begin{cases} 0,\ \text{если}\ \ x\in[0,y_1]\cup[y_2,l_1], \\ \dfrac{2A}{y_2-y_1}(x_1-y_1),\ \text{если}\ x\in(y_1,\dfrac{y_1+y_2}{2}), \\ \dfrac{2A}{y_2-y_1}(y_2-x_1),\ \text{если}\ x\in(\dfrac{y_1+y_2}{2},y_2), \end{cases} \tag{4.5}$$

$\varphi_i(x_i)=0,\ i=2,...,n$.

Функция $\varphi_1(x_1)$, определяемая (4.5), является непрерывной функцией. Ее график приведен на рисунке 12.

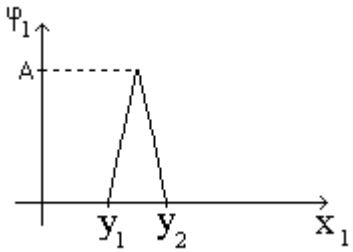


Рис. 12.

Начальное возмущение стационарного значения скорости задается по следующим формулам:

$$\psi_i(x_i)=z_i\frac{\varphi_i(x_i)}{\rho\bar{c}_i},\ i=1,...,n, \tag{4.6}$$

Задача (4.1) – (4.4) решалась численно, используя комплекс программ CVSS [4]. Рассчитанные функции $P_i(x_i,t)$ и $U_i(x_i,t)$ сравнивались с функциями $\bar{p}_i+p_i(x_i,t)$ и $\bar{u}_i+u_i(x_i,t)$, где $p_i(x_i,t)$ и $u_i(x_i,t)$ являются аналитическим решением задачи (3.1) – (3.4).

2. Результаты численных расчетов для двух сосудов.

Во всех расчетах, описанных в данном пункте, полагалось, что $l_1=l_2=10$ см, $y_1=5$ см, $y_2=7.5$ см. Значения параметров стационарного

решения $\overline{p}_1$, $\overline{u}_1$, варьировались, а параметры $\overline{p}_2$, $\overline{u}_2$ определялись из системы уравнений (4.3), (4.4) при условии, что $P_1(x_1,t) = \overline{p}_1$, $U_1(x_1,t) = \overline{u}_1$.

2.1. Вершина графа является вершиной ветвления сосудов.

Значения параметров стационарного решения в первом сосуде полагались равными: $\overline{p}_1 = 100$ мм рт.ст., $\overline{u}_1 = 30$ см/сек. Амплитуда A начального возмущения стационарного значения давления в первом сосуде (см. (4.5)) полагалась равной 1 мм рт. ст. В этом случае в независимости от того задано на границе сосудов условие равенства давлений ((4.4), (1.5)), либо условие равенства интегралов Бернулли ((4.4), (1.6)), комплекс программ CVSS обеспечивает достаточно точное воспроизведение аналитического решения численным (рис. 13, 14). Заметим, что в случае идентичности первого и второго сосуда, волна возмущения стационарного значения давления и скорости проходит центральную вершину графа не изменяя своей формы и амплитуды, при этом отраженной волны не возникает (рис. 15), что согласуется с результатами, полученными в §2.

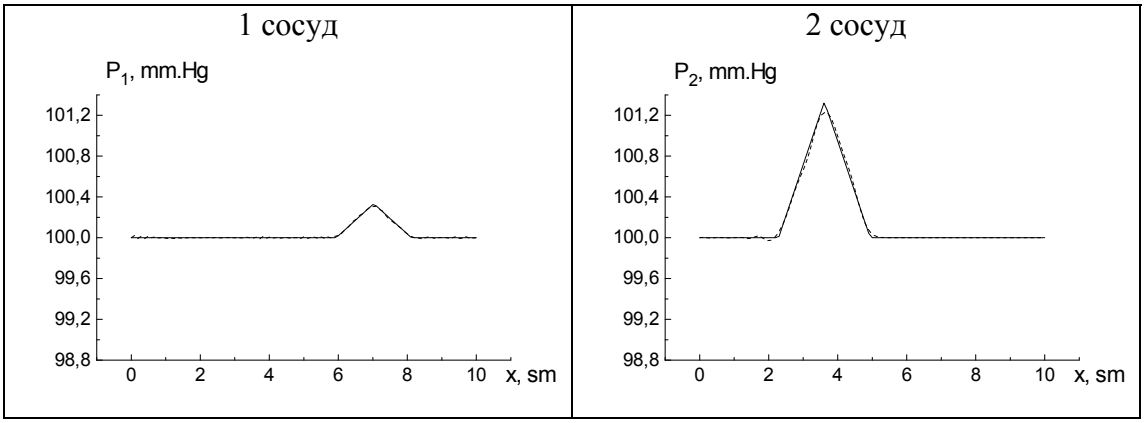


Рис. 13.

Рисунок 13 соответствует расчету с заданным на границе сосудов условием равенства давлений. Здесь, сплошная линия – точное решение, пунктирная линия – численное решение. Расчеты проводились до момента времени $t = 0.015$ сек, при значениях параметров: $P_{\min 1} = P_{\min 2} = 50$ мм рт.ст., $P_{\max 1} = P_{\max 2} = 150$ мм рт.ст., $S_{\min 1} = 4$ см^2, $S_{\max 1} = 8$ см^2, $S_{\min 2} = 2$ см^2, $S_{\max 2} = 4$ см^2.

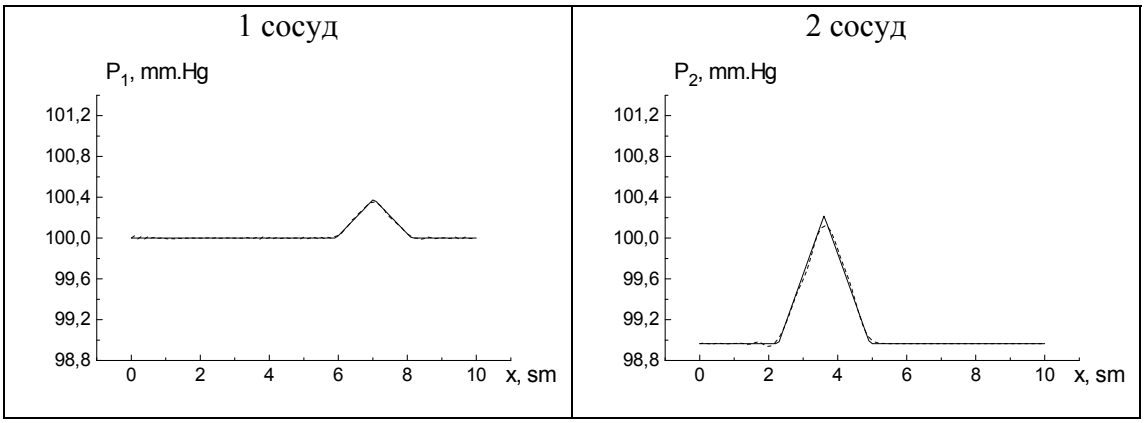


Рис. 14.

Рисунок 14 соответствует расчету с заданным на границе сосудов условием равенства интегралов Бернулли. Здесь, сплошная линия – точное решение, пунктирная линия – численное решение. Расчеты проводились до момента времени $t = 0.015$ сек, при значениях параметров:

$P_{\min 1} = P_{\min 2} = 50$ мм рт.ст., $P_{\max 1} = P_{\max 2} = 150$ мм рт.ст., $S_{\min 1} = 4$ см^2, $S_{\max 1} = 8$ см^2, $S_{\min 2} = 2$ см^2, $S_{\max 2} = 4$ см^2.

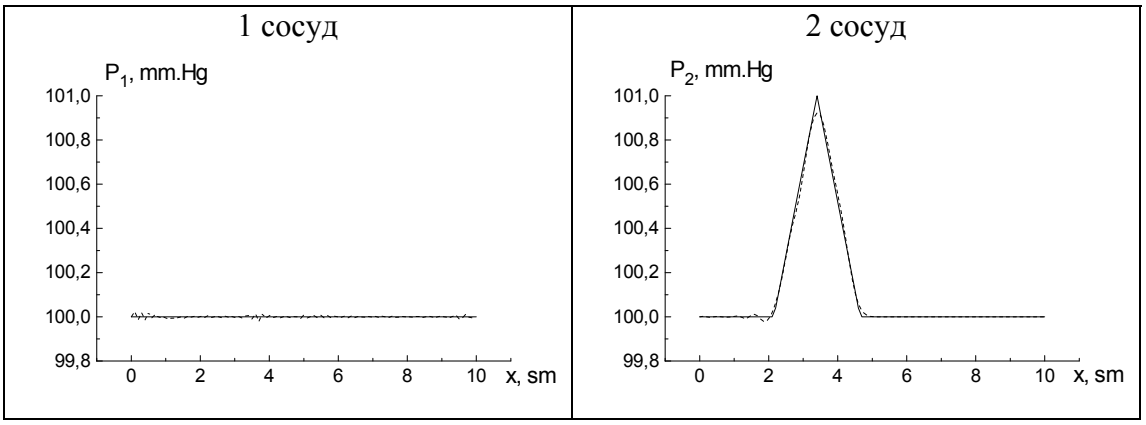


Рис. 15.

На рисунке 15 сплошной линии соответствует точное решение, пунктирной линии – численное решение. Расчеты проводились до момента времени $t = 0.015$ сек, при значениях параметров: $P_{\min 1} = P_{\min 2} = 50$ мм рт.ст., $P_{\max 1} = P_{\max 2} = 150$ мм рт.ст., $S_{\min 1} = S_{\min 2} = 4$ см^2, $S_{\max 1} = S_{\max 2} = 8$ см^2.

Результаты сопоставления профилей скорости имеют такой же качественный вид.

2.2. Вершина графа является вершиной фильтрации.

Значения стационарной скорости в первом сосуде полагалось равным: $\bar{u}_1 = 30$ см/сек, величина стационарного давления $\bar{p}_1$ варьировалась в диапазоне от 50 мм рт.ст. до 200 мм рт.ст. Величина амплитуда начального возмущения стационарного значения давления в первом сосуде варьировалась в диапазоне от 1 мм рт. ст. до 10 мм рт.ст. Результаты расчетов показывают, что при амплитуде 1 мм рт.ст. наблюдается практически полное совпадение численного решения с аналитическим (рис.16). Однако, при увеличении амплитуды до 5 мм рт.ст. становится заметным отличие численного решения от аналитического (рис. 17), а при амплитуде в 10 мм рт.ст. это отличие становится существенным (рис. 18). Заметим, что значения параметров стационарного решения на точность воспроизведения аналитического решения численным не влияют (рис. 17, 19, 20).

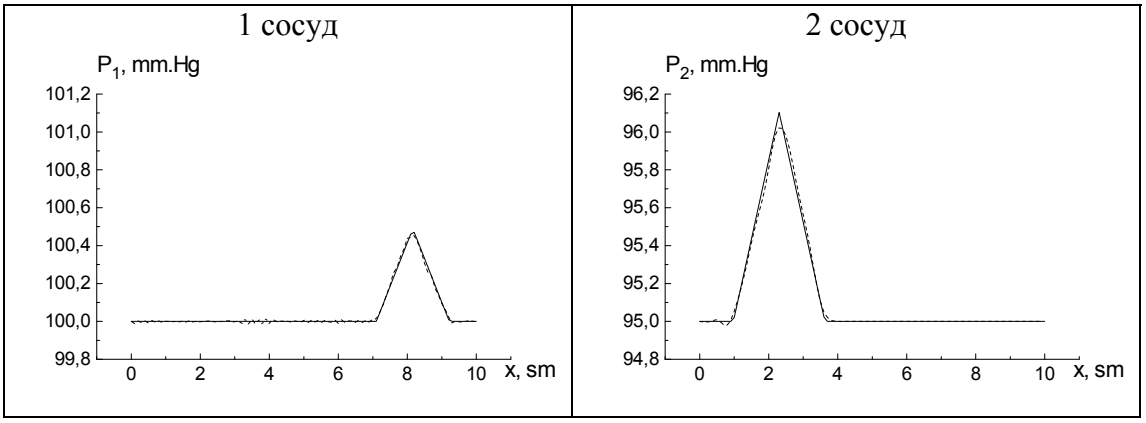


Рис. 16.

На рисунок 16 сплошной линии соответствует точное решение, пунктирной линии – численное решение. Расчеты проводились до момента времени $t = 0.015$ сек, при значениях параметров: $P_{\min 1} = P_{\min 2} = 50$ мм рт.ст., $P_{\max 1} = P_{\max 2} = 150$ мм рт.ст., $S_{\min 1} = 1$ см^2, $S_{\max 1} = 3$ см^2, $S_{\min 2} = 0.5$ см^2, $S_{\max 2} = 1.5$ см^2, $\overline{p}_1 = 100$мм рт.ст., $\overline{u}_1 = 30$см/сек, $k_D = 12\dfrac{\text{см}^3}{\text{мм рт.ст. сек}}$.

Амплитуда начального возмущения стационарного значения давления в первом сосуде A=1 мм рт.ст.

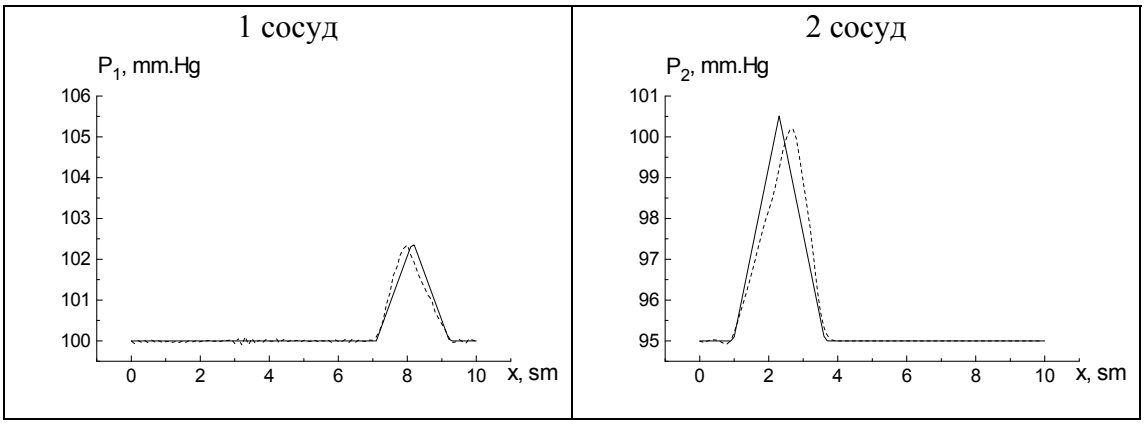


Рис. 17.

На рисунок 17 сплошной линии соответствует точное решение, пунктирной линии – численное решение. Расчеты проводились до момента времени $t = 0.015$ сек, при значениях параметров: $P_{\min 1} = P_{\min 2} = 50$ мм рт.ст., $P_{\max 1} = P_{\max 2} = 150$ мм рт.ст., $S_{\min 1} = 1$ см^2, $S_{\max 1} = 3$ см^2, $S_{\min 2} = 0.5$ см^2, $S_{\max 2} = 1.5$ см^2, $\overline{p}_1 = 100$мм рт.ст., $\overline{u}_1 = 30$см/сек, $k_D = 12\dfrac{\text{см}^3}{\text{мм рт.ст. сек}}$.

Амплитуда начального возмущения стационарного значения давления в первом сосуде A=5 мм рт.ст.

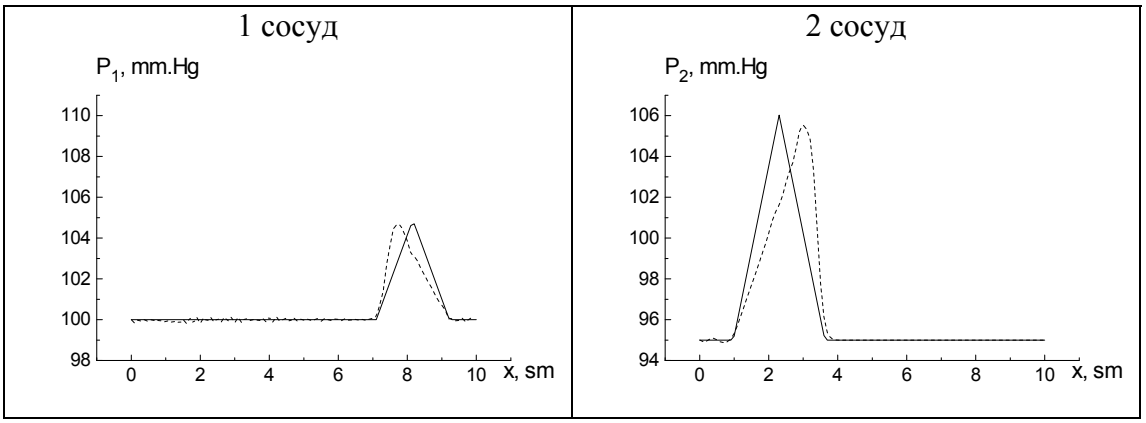


Рис. 18.

На рисунок 18 сплошной линии соответствует точное решение, пунктирной линии – численное решение. Расчеты проводились до момента времени $t = 0.015$ сек, при значениях параметров: $P_{\min 1} = P_{\min 2} = 50$ мм рт.ст., $P_{\max 1} = P_{\max 2} = 150$ мм рт.ст., $S_{\min 1} = 1$ см^2, $S_{\max 1} = 3$ см^2, $S_{\min 2} = 0.5$ см^2, $S_{\max 2} = 1.5$ см^2, $\overline{p}_1 = 100$ мм рт.ст., $\overline{u}_1 = 30$ см/сек, $k_D = 12 \dfrac{\text{см}^3}{\text{мм рт.ст. сек}}$.

Амплитуда начального возмущения стационарного значения давления в первом сосуде A=10 мм рт.ст.

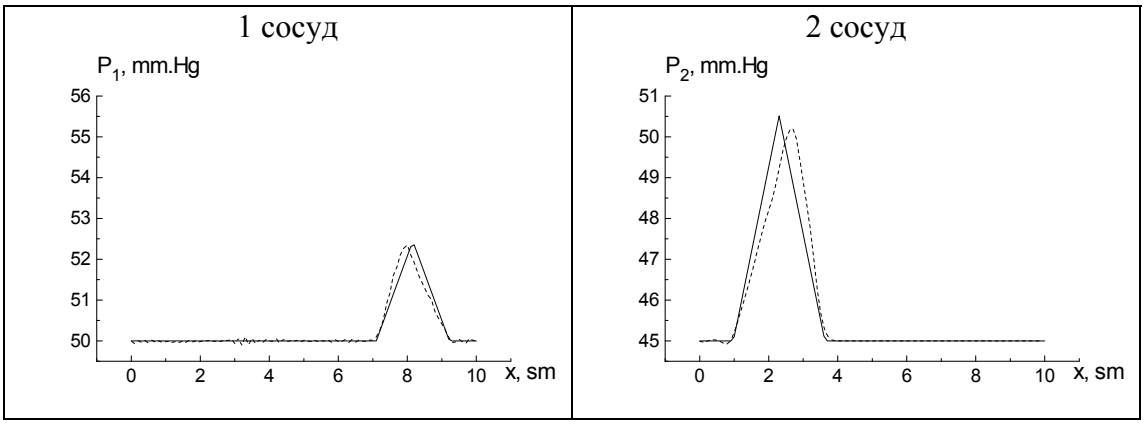


Рис. 19.

На рисунок 19 сплошной линии соответствует точное решение, пунктирной линии – численное решение. Расчеты проводились до момента времени $t = 0.015$ сек, при значениях параметров: $P_{\min 1} = P_{\min 2} = 0$ мм рт.ст., $P_{\max 1} = P_{\max 2} = 100$ мм рт.ст., $S_{\min 1} = 1$ см^2, $S_{\max 1} = 3$ см^2, $S_{\min 2} = 0.5$ см^2, $S_{\max 2} = 1.5$ см^2, $\overline{p}_1 = 50$ мм рт.ст., $\overline{u}_1 = 30$ см/сек, $k_D = 12 \dfrac{\text{см}^3}{\text{мм рт.ст. сек}}$.

Амплитуда начального возмущения стационарного значения давления в первом сосуде A=5 мм рт.ст.

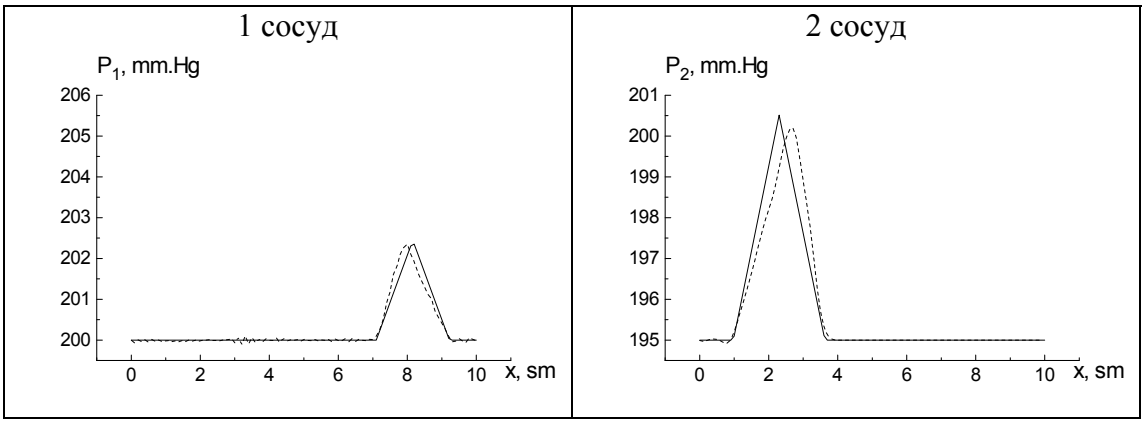


Рис. 20.

На рисунок 20 сплошной линии соответствует точное решение, пунктирной линии – численное решение. Расчеты проводились до момента времени $t = 0.015$ сек, при значениях параметров: $P_{\min 1} = P_{\min 2} = 150$ мм рт.ст., $P_{\max 1} = P_{\max 2} = 250$ мм рт.ст., $S_{\min 1} = 1$ см^2, $S_{\max 1} = 3$ см^2, $S_{\min 2} = 0.5$ см^2, $S_{\max 2} = 1.5$ см^2, $\overline{p}_1 = 200$мм рт.ст., $\overline{u}_1 = 30$см/сек, $k_D = 12\dfrac{\text{см}^3}{\text{мм рт.ст. сек}}$.

Амплитуда начального возмущения стационарного значения давления в первом сосуде *A*=5 мм рт.ст.

3. Результаты численных расчетов для трех сосудов.

Во всех расчетах, описанных в данном пункте, полагалось, что $l_1 = l_2 = l_3 = 10$ см, $y_1 = 5$ см, $y_2 = 7.5$ см. Значения параметров стационарного решения $\overline{p}_1$, $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ варьировались, а параметры стационарного решения $\overline{p}_2$, $\overline{p}_3$, $\overline{u}_3$ определялись из решения системы уравнений (4.3), (4.4) при условии, что $P_1(x_1,t) = \overline{p}_1$, $U_1(x_1,t) = \overline{u}_1$ и $U_2(x_2,t) = \overline{u}_2$.

Расчеты показали, что при увеличении числа сосудов входящих в узел ветвления с двух до трех, качественного изменения точности воспроизведения аналитического решения численным не происходит. При небольших амплитудах начального возмущения стационарного значения давления в первом сосуде (*A* порядка 1 мм рт. ст.), как в случае задания на границе сосудов условия равенства давлений, так и в случае равенства интегралов Бернулли, аналитическое решение достаточно точно воспроизводится численным (рис. 21, 22). Однако, при увеличении амплитуды *A* начального возмущения давления наблюдается ухудшение точности воспроизведения аналитического решения численным (рис. 23, 24, 25). Заметим, что значения параметров стационарного решения на точность воспроизведения аналитического решения численным не влияют.

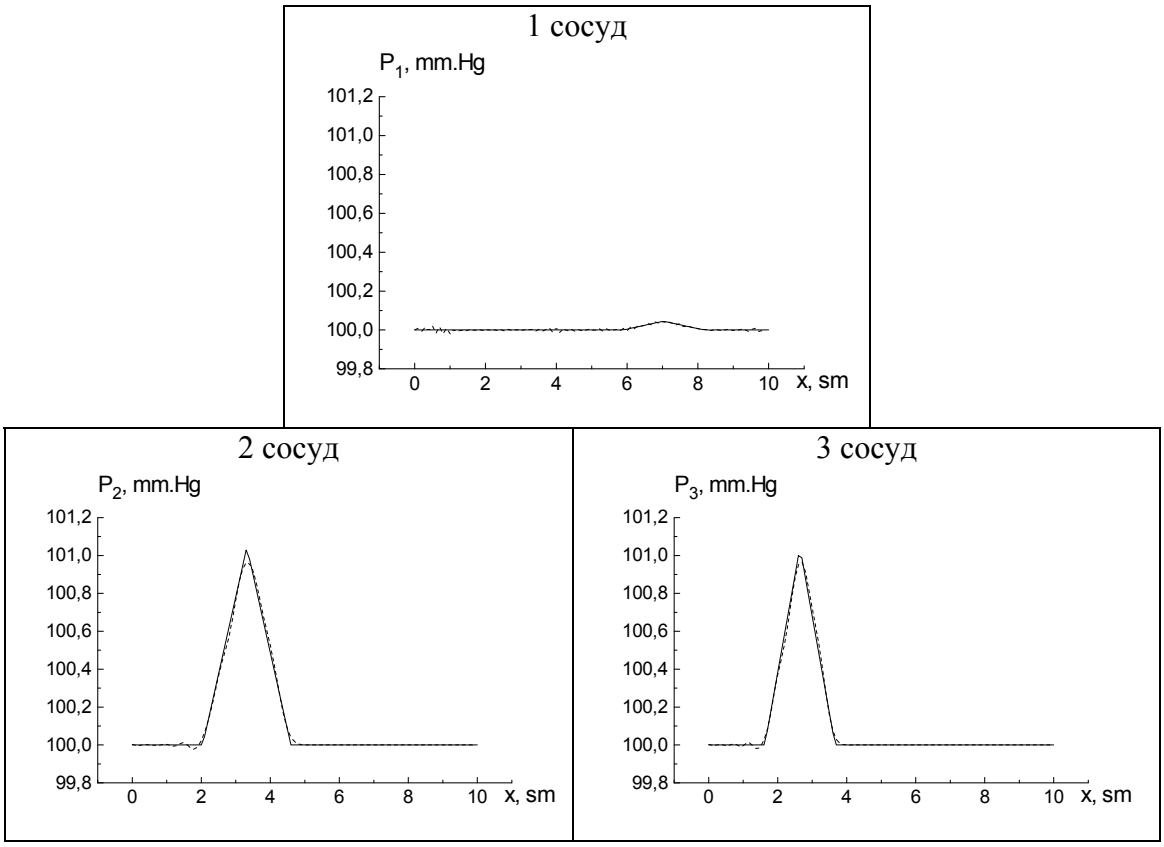


Рис. 21.

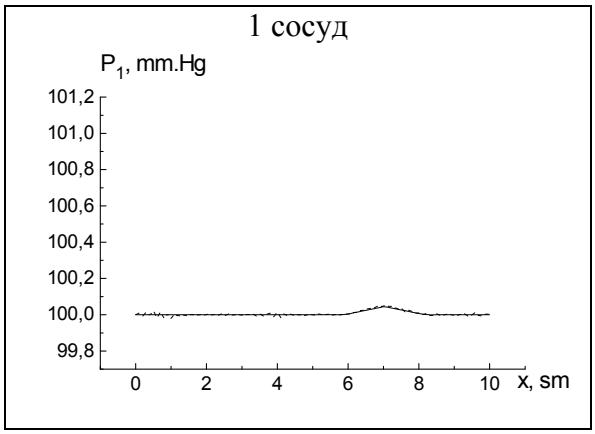
Рисунок 21 соответствует расчету с заданным на границе сосудов условием равенства давлений. Здесь, сплошная линия – точное решение, пунктирная линия – численное решение. Расчеты проводились до момента времени $t = 0.015$ сек, при значениях параметров:

$P_{\min 1} = P_{\min 2} = P_{\min 3} = 50$ мм рт.ст., $P_{\max 1} = P_{\max 2} = P_{\max 3} = 150$ мм рт.ст.,

$S_{\min 1} = 4$ см^2, $S_{\max 1} = 8$ см^2, $S_{\min 2} = 2$ см^2, $S_{\max 2} = 4$ см^2, $S_{\min 3} = 1$ см^2,

$S_{\max 3} = 3$ см^2, $\overline{p}_1 = 100$мм рт.ст., $\overline{u}_1 = 20$см/сек, $\overline{u}_2 = 30$см/сек.

Амплитуда начального возмущения стационарного значения давления в первом сосуде A=1 мм рт.ст.



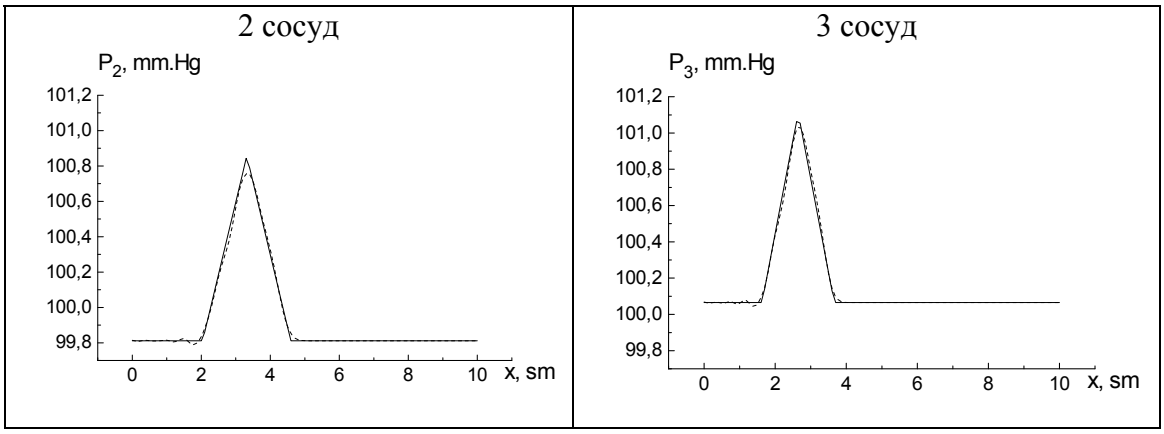


Рис. 22.

Рисунок 22 соответствует расчету с заданным на границе сосудов условием равенства интегралов Бернулли. Здесь, сплошная линия – точное решение, пунктирная линия – численное решение. Расчеты проводились до момента времени $t = 0.015$ сек, при значениях параметров:

$P_{\min 1} = P_{\min 2} = P_{\min 3} = 50$ мм рт.ст., $P_{\max 1} = P_{\max 2} = P_{\max 3} = 150$ мм рт.ст.,

$S_{\min 1} = 4$ см^2, $S_{\max 1} = 8$ см^2, $S_{\min 2} = 2$ см^2, $S_{\max 2} = 4$ см^2, $S_{\min 3} = 1$ см^2,

$S_{\max 3} = 3$ см^2, $\overline{p}_1 = 100$ мм рт.ст., $\overline{u}_1 = 20$ см/сек, $\overline{u}_2 = 30$ см/сек.

Амплитуда начального возмущения стационарного значения давления в первом сосуде A=1 мм рт.ст.

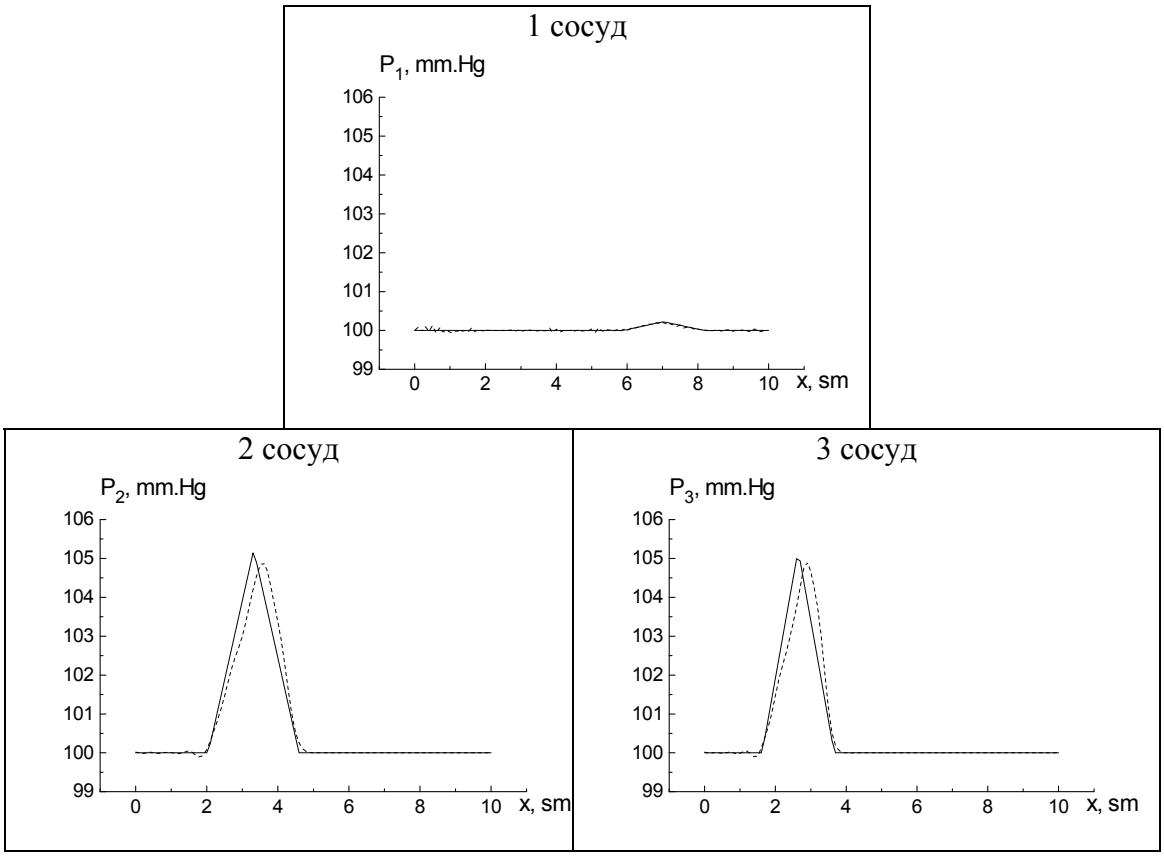


Рис. 23.

Рисунок 23 соответствует расчету с заданным на границе сосудов условием равенства давлений. Здесь, сплошная линия – точное решение,

пунктирная линия – численное решение. Расчеты проводились до момента времени $t = 0.015$ сек, при значениях параметров:

$P_{\min 1} = P_{\min 2} = P_{\min 3} = 50$ мм рт.ст., $P_{\max 1} = P_{\max 2} = P_{\max 3} = 150$ мм рт.ст.,

$S_{\min 1} = 4$ см^2, $S_{\max 1} = 8$ см^2, $S_{\min 2} = 2$ см^2, $S_{\max 2} = 4$ см^2, $S_{\min 3} = 1$ см^2,

$S_{\max 3} = 3$ см^2, $\overline{p}_1 = 100$ мм рт.ст., $\overline{u}_1 = 20$ см/сек, $\overline{u}_2 = 30$ см/сек.

Амплитуда начального возмущения стационарного значения давления в первом сосуде *A*=5 мм рт.ст.

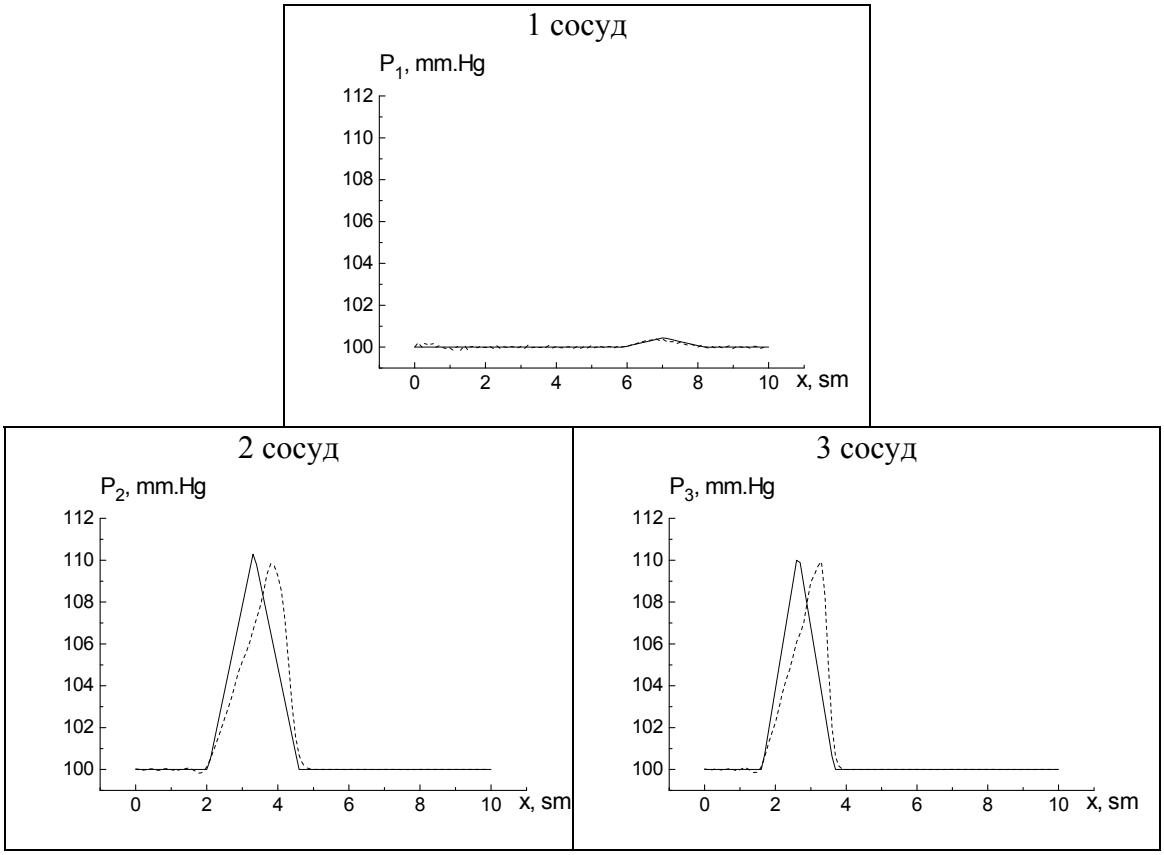


Рис. 24.

Рисунок 24 соответствует расчету с заданным на границе сосудов условием равенства давлений. Здесь, сплошная линия – точное решение, пунктирная линия – численное решение. Расчеты проводились до момента времени $t = 0.015$ сек, при значениях параметров:

$P_{\min 1} = P_{\min 2} = P_{\min 3} = 50$ мм рт.ст., $P_{\max 1} = P_{\max 2} = P_{\max 3} = 150$ мм рт.ст.,

$S_{\min 1} = 4$ см^2, $S_{\max 1} = 8$ см^2, $S_{\min 2} = 2$ см^2, $S_{\max 2} = 4$ см^2, $S_{\min 3} = 1$ см^2,

$S_{\max 3} = 3$ см^2, $\overline{p}_1 = 100$ мм рт.ст., $\overline{u}_1 = 20$ см/сек, $\overline{u}_2 = 30$ см/сек.

Амплитуда начального возмущения стационарного значения давления в первом сосуде *A*=10 мм рт.ст.

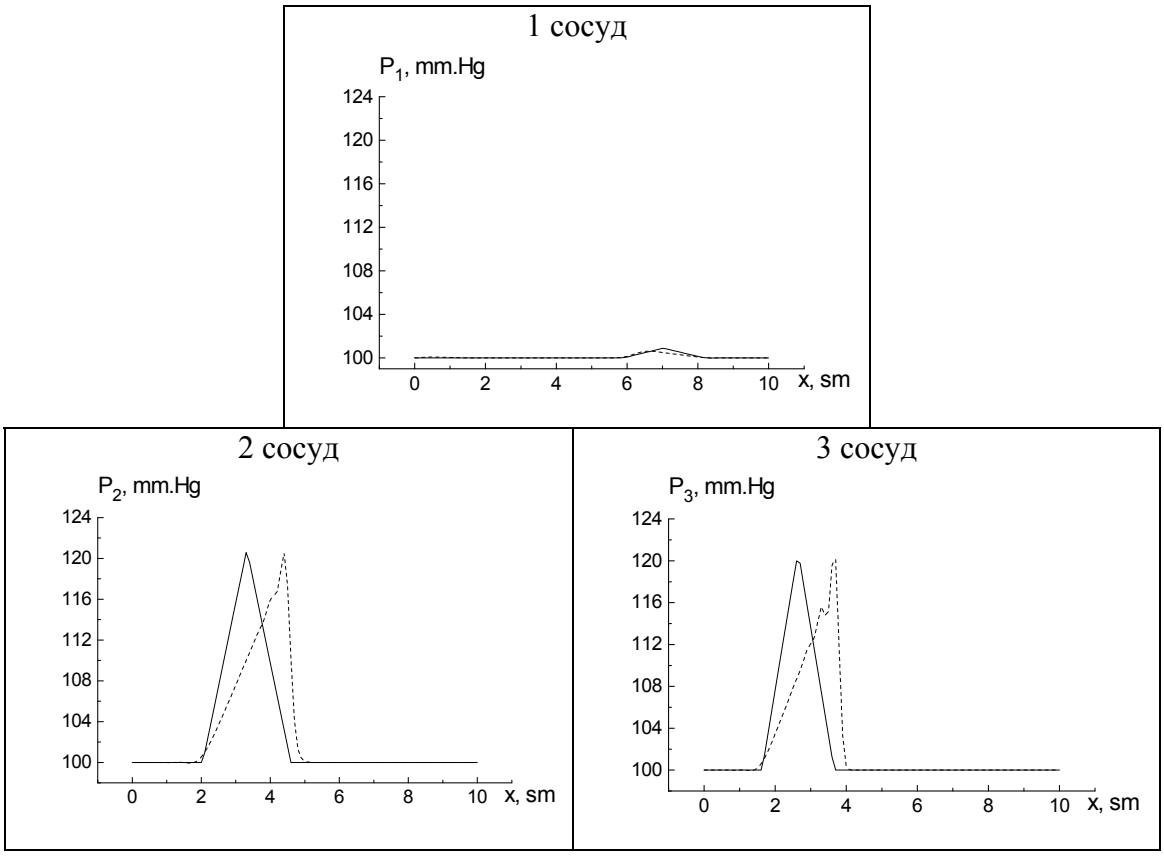


Рис. 25.

Рисунок 25 соответствует расчету с заданным на границе сосудов условием равенства давлений. Здесь, сплошная линия – точное решение, пунктирная линия – численное решение. Расчеты проводились до момента времени $t = 0.015$ сек, при значениях параметров:

$P_{\min 1} = P_{\min 2} = P_{\min 3} = 50$ мм рт.ст., $P_{\max 1} = P_{\max 2} = P_{\max 3} = 150$ мм рт.ст.,

$S_{\min 1} = 4$ см^2, $S_{\max 1} = 8$ см^2, $S_{\min 2} = 2$ см^2, $S_{\max 2} = 4$ см^2, $S_{\min 3} = 1$ см^2,

$S_{\max 3} = 3$ см^2, $\overline{p}_1 = 100$мм рт.ст., $\overline{u}_1 = 20$см/сек, $\overline{u}_2 = 30$см/сек. Амплитуда начального возмущения стационарного значения давления в первом сосуде A=20 мм рт.ст.

Литература.

1. C.G.Caro, T.J.Pedley, R.C. Schroter, W.A.Seed. *The mechanics of the circulation.* Oxford, Oxford University Press, 1978.
2. Wilmer W.Nichols, Michael F.O'Rourke. *Blood flow in arteries.* London, Edward Arnold, 1990.
3. М.В.Абакумов, К.В.Гаврилюк, Н.Б.Есикова, В.Б. Кошелев, А.В.Лукшин, С.И.Мухин, Н.В.Соснин, В.Ф.Тишкин, А.П.Фаворский. *Математическая модель гемодинамики сердечно-сосудистой системы.* Дифференциальные уравнения, 1997, 33(7), с. 892-898.
4. М.В.Абакумов, Н.Б.Есикова, С.И.Мухин, Н.В.Соснин, В.Ф.Тишкин, А.П.Фаворский. *Разностная схема решения задач гемодинамики на графе.* М., Диалог-МГУ, 1998, 16с.
5. И.В.Ашметков, С.И.Мухин, Н.В.Соснин, А.П.Фаворский, А. Б. Хруленко. *Частные решения уравнений гемодинамики.* М., Диалог-МГУ, 1999, 43с.

6. И.В.Ашметков, С.И.Мухин, Н.В.Соснин, А.П.Фаворский, А. Б. Хруленко. *Численное исследование свойств разностной схемы для уравнений гемодинамики.* М., Диалог-МГУ, 1999, 14с.
7. А.А.Самарский, А.В.Гулин. *Введение в численные методы.* М., Наука, 1987.
8. R.D. Kamm, A.H. Shapiro. *Unsteady flow in a collapsible tube subjected to external pressure or body forces.* J. Fluid Mech., vol. 95, part1, 1979, pp. 1-78.