И.В. Ашметков, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛГД УРАВНЕНИЙ НА ГРАФЕ

Препринт

Москва
МАКС Пресс
2002

УДК 519.63

И.В. Ашметков, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский

Краевая задача для ЛГД уравнений на графе:

Препринт. – М.: МАКС Пресс, 2002г. – 88с.

В работе приведены аналитические решения краевой задачи для ЛГД уравнений на ряде графов. Предложен разностный метод исследования поведения амплитуды пульсовых волн на произвольном графе. Сформулирован реализуемый критерий неограниченного роста амплитуды пульсовых волн на произвольном графе. Выводы линейной теории подтверждены результатами численного решения ряда краевых задач для нелинейных уравнений гемодинамики на соответствующих графах.

E-mail: vmmus@cs.msu.su
Тел.: 939-2195

© Авторы, 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение…….. 4
§1. Краевая задача на графе из одного ребра…… 5
1. Постановка задачи и ее аналитическое решение (5).
2. Постановка и решение разностной задачи для волн скорости (9).
§2. Краевая задача на графе из двух ребер…… 12
1. Постановка краевой задачи (12).
2. Метод продолжений в приложении к краевой задаче на графе из двух ребер (13).
3. Рекуррентные соотношения для волн скорости на графе из двух "равновременных" ребер (20).
4. Постановка и решение разностной задачи для волн скорости на двух "равновременных" ребрах (34).
5. Решение краевой задачи на графе из двух ребер с кратными "характерными" временами (38).
§3. Краевая задача на графе "тройник"…… 42
1. Постановка краевой задачи (42).
2. Метод продолжений в применении к краевой задаче на графе "тройник" (43).
3. Аналитическое решение краевой задачи в случае трех "равновременных" ребер (50).
§4. Система функциональных уравнений с запаздывающими аргументами……..…… 60
1. Рекуррентное соотношение для системы однородных функциональных уравнений (61).
2. Рекуррентное соотношение для системы неоднородных функциональных уравнений (68).
§5. Краевая задача на произвольном графе…….. 70
1. Постановка краевой задачи (70).
2. Метод продолжений в приложении к краевой задаче на произвольном графе (71).
§6. Численное решение краевой задачи для уравнений гемодинамики на графе из двух ребер..…….. 76
1. Постановка расчетной задачи (76).
2. Результаты расчетов в случае двух "равновременных" ребер (77).
3. Результаты расчетов в случае двух ребер с неравными "характерными" временами (81).
§7. Примеры численного решения некоторых краевых задач для уравнений гемодинамики…..…… 82
1. Краевая задача на графе «тройник» (82).
2. Краевая задача на графе из трех сосудов, соединенных последовательно (84).
3. Краевая задача на графе из четырех ребер с циклом (86).
Литература……... 88

Введение.

В работах [4,5,6] рассматривалась система линеаризованных гемодинамических уравнений, и для нее были сформулированы и решены частные краевые задачи. В работе [10] поставлена и решена общая краевая задача для ЛГД уравнений в одном сосуде. Полученные точные решения ЛГД уравнений, использовались в качестве эффективных тестов для проверки комплекса программ CVSS [9]. Установлены условия, при которых происходит резонансный рост амплитуд колебаний давления и скорости. В некоторых частных постановках явление резонанса рассмотрено также в работах [11,13].

Настоящая работа является продолжением указанной серии публикаций по исследованию уравнений гемодинамики. В ней поставлена и исследована общая краевая задача для ЛГД уравнений на ряде графов. В результате исследования получено простое достаточное условие не ограниченного роста амплитуды колебаний давления и скорости с ростом времени.

В работе приведены результаты расчетов ряда гемодинамических течений. Показано, что выводы линейной теории относительно качественных особенностей течения совпадают с результатами численных расчетов.

Авторы признательны А. А. Самарскому за постоянное внимание к работе. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-01-00488) и программы “Университеты России” (проект 015.03.02.009).

§1. Краевая задача на графе из одного ребра.

1. Постановка задачи и ее аналитическое решение. Следуя работе [10], рассмотрим общую краевую задачу для ЛГД уравнений[8] на одном ребре графа:

$$\begin{cases} p_t + \bar{u} p_x + \rho \bar{c}^2 u_x = 0, \\ u_t + \dfrac{1}{\rho} p_x + \bar{u} u_x = 0, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ p(x,0) = \varphi(x), \;\; u(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \le x \le l, \\ \alpha_1 p(0,t) + \beta_1 u(0,t) = \mu_1(t), \\ \alpha_2 p(l,t) + \beta_2 u(l,t) = \mu_2(t), \qquad t \ge 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь:

$\bar{p} = const$, $\bar{u} = const$ являются стационарным решением уравнений гемодинамики [8];

$p(x,t)$, $u(x,t)$ - отклонения давления и скорости от стационарных значений;

$\varphi(x)$, $\psi(x)$ - начальные возмущения стационарных значений давления и скорости;

α_1, β_1, α_2, β_2 - заданные константы;

μ_1, μ_2 - заданные функции;

$\bar{c} = \sqrt{\dfrac{S(\bar{p})}{\rho\theta}}$ - скорость распространения малых возмущений внутри сосуда;

$S(P)$ - известная зависимость между площадью поперечного сечения и давлением внутри сосуда;

$\theta = \left.\dfrac{dS(P)}{dP}\right|_{P=\bar{p}} > 0$.

В дальнейшем везде предполагается, что рассматриваемое стационарное течение дозвуковое, то есть $|\bar{u}| < \bar{c}$.

Решение задачи (1.1) строится методом продолжений [1]. Линеаризованным уравнениям гемодинамики (ЛГД уравнениям) удовлетворяет:

- произвольной формы волна скорости $f^+(x-\lambda^+ t)$, распространяющаяся по направлению оси сосуда, в паре с пропорциональной ей волной давления $\rho\bar{c}f^+(x-\lambda^+ t)$;
- произвольной формы волна скорости $f^-(x-\lambda^- t)$, распространяющаяся против направления оси сосуда, в паре с пропорциональной и противоположного знака волной давления $-\rho\bar{c}\, f^-(x-\lambda^- t)$.

Здесь $\lambda^+ = \bar{u} + \bar{c} > 0$, $\lambda^- = \bar{u} - \bar{c} < 0$ для дозвуковых фоновых течений ($|\bar{u}| < \bar{c}$).

Таким образом, общим решением системы ЛГД уравнений являются функции $p(x,t)$ и $u(x,t)$ вида [8]:

$$p(x,t) = \frac{\rho\bar{c}}{2}\left(f^+(x-\lambda^+ t) - f^-(x-\lambda^- t)\right),$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f^+(x-\lambda^+ t) + f^-(x-\lambda^- t)\right), \qquad (1.2)$$

где f^+ и f^- две бегущие волны произвольной формы.

Конкретный вид функций f^+ и f^- на области определения каждой из них подбирается так, чтобы выполнялись заданные начальные и граничные условия задачи (1.1). Для $0 \le x \le l$ и $t \ge 0$ областью определения функции $f^+(x-\lambda^+ t)$ является полуось $(-\infty, l]$, а область определения функции $f^-(x-\lambda^- t)$ представляет собой полуось $[0, +\infty)$.

Подстановка формул (1.2) в начальные условия задачи (1.1) позволяет определить f^+ и f^- на отрезке $[0, l]$, являющемся частью их области определения:

$$f^+(z) = \frac{1}{\rho\bar{c}}\varphi(z) + \psi(z),$$
$$f^-(z) = -\frac{1}{\rho\bar{c}}\varphi(z) + \psi(z), \qquad 0 \le z \le l. \tag{1.3}$$

Для нахождения функций f^+ и f^- на оставшейся части области определения используются граничные условия. Граф, на котором решается задача (1,1), представляет собой одно ребро, ограниченное двумя вершинами. Одной вершине соответствует значение $x = 0$, а второй вершине - $x = l$. На вершину $x = 0$ волна $f^-(x - \lambda^- t)$ падает, а волна $f^+(x - \lambda^+ t)$ уходит от этой вершины. Относительно вершины $x = l$ волна $f^+(x - \lambda^+ t)$ является падающей, а волна $f^-(x - \lambda^- t)$ уходящей. Используем граничное условие в точке $x = 0$ для определения уходящей волны f^+, а граничное условие в точке $x = l$ используем для определения уходящей волны f^-.

Подставляя (1.2) в граничные условия задачи (1.1) и решая возникающее соотношение в вершине $x = 0$ относительно f^+ и соотношение в вершине $x = l$ относительно f^-, получаем следующую пару выражений:

$$f^+(-\lambda^+ t) = k_1 f^-(-\lambda^- t) + \nu_1 \mu_1(t), \tag{1.4}$$

$$f^-(l - \lambda^- t) = k_2 f^+(l - \lambda^+ t) + \nu_2 \mu_2(t), \qquad t \ge 0, \tag{1.5}$$

где $k_1 = \dfrac{\alpha_1 \rho\bar{c} - \beta_1}{\alpha_1 \rho\bar{c} + \beta_1}$, $k_2 = \dfrac{\alpha_2 \rho\bar{c} + \beta_2}{\alpha_2 \rho\bar{c} - \beta_2}$ - коэффициенты отражения [10,11], соответственно, от вершины $x = 0$ и вершины $x = l$,

а $\nu_1 = \dfrac{2}{\beta_1 + \alpha_1 \rho\bar{c}_1}$, $\nu_2 = \dfrac{2}{\beta_2 - \alpha_2 \rho\bar{c}}$ - величины, характеризующие дополнительную генерацию волн.

Сделаем в соотношении (1.4) следующую замену переменной $z = -\lambda^+ t$. Тогда (1.4) принимает вид

$$f^+(z) = k_1 f^-\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+} z\right) + \nu_1 \mu_1\left(-\frac{z}{\lambda^+}\right) \qquad , z \le 0. \tag{1.6}$$

Аналогично, сделав в (1.5) замену переменной $z = l - \lambda^- t$, получим

$$f^-(z) = k_2 f^+\left(\lambda^+ t^* + \frac{\lambda^+}{\lambda^-} z\right) + \nu_2 \mu_2\left(\frac{l}{\lambda^-} - \frac{z}{\lambda^-}\right), \qquad z \ge l, \tag{1.7}$$

где $t^* = \dfrac{l}{\lambda^+} - \dfrac{l}{\lambda^-}$.

Соотношения (1.6), (1.7) представляют собой систему функциональных уравнений относительно двух неизвестных функций f^+ и f^-.

Эта система формально может быть записана в матричной форме.

Для этого введем в рассмотрение вектор-столбцы $V = \left(f^+(z), f^-(z)\right)^T$, $\widetilde{V} = \left(f^-(\frac{\lambda^-}{\lambda^+} z), f^+(\lambda^+ t^* + \frac{\lambda^+}{\lambda^-} z)\right)^T$, $M = \left(\mu_1(-\frac{z}{\lambda^+}), \mu_2(\frac{l}{\lambda^-} - \frac{z}{\lambda^-})\right)^T$

и матрицы $T_g = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}$.

Тогда соотношения (1.6), (1.7) принимают вид $V = T_g \widetilde{V} + GM$, отражающий тот факт, что волны уходящие от всех вершин конкретного графа являются суперпозицией волн падающих на вершины графа и волн порожденных граничными условиями. Элементами матрицы T_g являются транспортные коэффициенты [11] всех вершин конкретного графа.

Заметим, что для рассматриваемой задачи (1.1) $\det T_g = k_1 k_2$.

Вернемся к уравнениям (1.6), (1.7), которые представляют собой два линейных соотношения, содержащих четыре неизвестных величины $f^+(z)$, $f^+(\lambda^+ t^* + \frac{\lambda^+}{\lambda^-} z)$, $f^-(z)$ и $f^-(\frac{\lambda^-}{\lambda^+} z)$. Возможно исключение любых двух из этих неизвестных.

Исключая, например, $f^-(z)$ и $f^-(\frac{\lambda^-}{\lambda^+} z)$, получим рекуррентное соотношение

$$f^+(z) = k_1 k_2 f^+(z + \lambda^+ t^*) + \nu_1 \mu_1(-\frac{z}{\lambda^+}) + \nu_2 k_1 \mu_2(\frac{l}{\lambda^-} - \frac{z}{\lambda^+}), \qquad (1.8)$$

верное для значений аргумента $z \le l - \lambda^+ t^*$.

Из соотношения (1.8) следует, что значение функции f^+ в любой точке z вычисляется через значение этой же функции в точке, расположенной на числовой оси правее на величину $\lambda^+ t^*$. Применим (1.8) повторно для $f^+(z + \lambda^+ t^*)$ в правой части соотношения (1.8). В результате получим выражение для $f^+(z)$ через значение функции f^+ на отрезке $[l - \lambda^+ t^*, l]$. Значения функции f^+ на отрезке $[l - \lambda^+ t^*, l]$ определяются формулами (1.3), (1.6), из которых следует

$$f^+(z) \equiv \Phi^+(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho\bar{c}}\varphi(z) + \psi(z), & 0 \le z \le l, \\ \dfrac{2}{\alpha_1\rho\bar{c} + \beta_1}\mu_1(-\dfrac{z}{\lambda^+}) - k_1\left(-\dfrac{1}{\rho\bar{c}}\varphi(\dfrac{\lambda^-}{\lambda^+}z) + \psi(\dfrac{\lambda^-}{\lambda^+}z)\right), & l - \lambda^+ t^* \le z \le 0. \end{cases}$$

Аналогично предыдущему, исключая из (1.6), (1.7) $f^+(z)$ и $f^+(\lambda^+ t^* + \dfrac{\lambda^+}{\lambda^-}z)$, получаем рекуррентное соотношение для функции $f^-(z)$:

$$f^-(z) = k_1 k_2 f^-(z + \lambda^- t^*) + \nu_1 k_2 \mu_1(-t^* - \frac{z}{\lambda^-}) + \nu_2 \mu_2(\frac{l}{\lambda^-} - \frac{z}{\lambda^-}), \qquad (1.9)$$

где $z \ge -\lambda^- t^*$.

Из соотношения (1.9) следует, что значение функции f^- в любой точке z вычисляется через значение этой же функции в точке, расположенной на числовой оси левее на величину $-\lambda^- t^*$. Применяя (1.9) повторно для f^- в правой части соотношения (1.9), в результате получим выражение для $f^-(z)$ через значение функции f^- на отрезке $[0, -\lambda^- t^*]$. Значения функции f^- на отрезке $[0, -\lambda^- t^*]$ определяются формулами (1.3), (1.7), из которых следует

$$f^-(z) \equiv \Phi^-(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho\bar{c}}\varphi(z) + \psi(z), & 0 \le z < l; \\ -k_2\left(\dfrac{1}{\rho\bar{c}}\varphi(\dfrac{\lambda^+}{\lambda^-}z) + \psi(\dfrac{\lambda^+}{\lambda^-}z)\right) + \nu_2\mu_2(-\dfrac{z}{\lambda^-} + \dfrac{l}{\lambda^-}), & l \le z < -\lambda^- t^* \end{cases}$$

Данный метод вычисления значений функций $f^+(z)$ и $f^-(z)$ реализован в работе [10], в которой получено аналитическое выражение для решения задачи (1.1). Анализ этого решения показал, что при выполнении условия $|k_1 k_2| = |\det T_g| > 1$ амплитуда волн давления и скорости в одном сосуде не ограничено растет с увеличением времени колебаний. При $|\det T_g| < 1$ начальные возмущения давления и скорости со временем затухают, а колебания, вызванные ограниченными по величине граничными воздействиями, не увеличивают своей амплитуды. При $\det T_g = 1$ периодические граничные воздействия с резонансным периодом $T = \dfrac{t^*}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ приводят к колебаниям давления и скорости в одном сосуде с линейно увеличивающейся во времени амплитудой колебаний. В случае $\det T_g = -1$ амплитуда колебаний остается ограниченной при любых граничных режимах.

2. Постановка и решение разностной задачи для волн скорости. Как отмечалось в предыдущем пункте, из соотношения (1.8), имеющего вид $f^+(z) = k_1 k_2 f^+(z + \lambda^+ t^*) + g(z)$ при $z < l - \lambda^+ t^*$, где $g(z) = \nu_1 \mu_1 (-\frac{z}{\lambda^+}) + \nu_2 k_1 \mu_2 (\frac{l}{\lambda^-} - \frac{z}{\lambda^+})$, следует, что значение функции f^+ от произвольного значения аргумента в интервале $(-\infty, l - \lambda^+ t^*)$ определяется значением той же функции f^+ от меньшего по модулю значения аргумента на постоянную величину $\lambda^+ t^*$ и вкладом граничных функций $g(z)$.

Введем на полуоси $z \in (-\infty, l)$ равномерную разностную сетку с узлами $z_j = -j\,h + z_0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, где $h = \lambda^+ t^*$, $l - \lambda^+ t^* \le z_0 \le l$.

Обозначим $f^+(z_j) = y_j$, $g(z_j) = g_j$. Отметим, что $y_0 = \Phi^+(z_0)$ задано и $\det T_g = k_1\, k_2$.

Тогда соотношение (1.8), записанное в узлах разностной сетки принимает вид

$$\begin{cases} y_j = \det T_g \; y_{j-1} + g_j \,, \quad j = 1, 2, \ldots \quad , \\ y_0 = \Phi^+(z_0) \quad . \end{cases}$$

Это задача Коши для линейного, неоднородного разностного уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами.

Его решение имеет вид [3]:

$$y_j = \left(\det T_g\right)^j y_0 + \sum_{k=1}^{j} \left(\det T_g\right)^{j-k} g_k \quad , \qquad j = 1, 2, \ldots . \tag{1.10}$$

Пусть z произвольное значение из области $z < l - \lambda^+ t^*$. Для этого z выберем $z_0 = z + N^+ \lambda^+ t^*$, где $N^+ = \left[-\frac{z}{\lambda^+ t^*} \right]$ (целая часть числа $\frac{-z}{\lambda^+ t^*}$). Тогда $z_j = z$ при $j = N^+$, то есть выбранное z совпадает с узлом z_{N^+} разностной сетки. Следовательно, $y_{N^+} = f^+(z)$ и с учетом (1.10) получаем соотношение

$$f^+(z) = \left(\det T_g\right)^{N^+} \Phi^+(z + N^+ \lambda^+ t^*) + \sum_{k=1}^{N^+} \left(\det T_g\right)^{N^+ - k} g\,(-k\lambda^+ t^* + z + N^+ \lambda^+ t^*) .$$

Подставляя сюда выражение для функции g и заменяя переменную суммирования по формуле $N^+ - k = n$, приходим к выражению

$$f^+(z) = \sum_{n=0}^{N^+ - 1} \left(\det T_g\right)^n \left(\nu_1 \mu_1 (-nt^* - \frac{z}{\lambda^+}) + \nu_2 k_1 \mu_2 (\frac{l}{\lambda^-} - nt^* - \frac{z}{\lambda^+}) \right) + \left(\det T_g\right)^{N^+} \Phi^+(z + N^+ \lambda^+ t^*),$$

которое совпадает с результатом, полученным в работе [10].

Аналогично и для функции $f^-(z)$ решается уравнение (1.9):

$$f^-(z) = k_1 k_2 f^-(z + \lambda^- t^*) + g(z) \text{ при } z > -\lambda^- t^*,$$

где $g(z) = \nu_1 k_2 \mu_1(-t^* - \frac{z}{\lambda^-}) + \nu_2\, \mu_2(\frac{l}{\lambda^-} - \frac{z}{\lambda^-})$, и $f^-(z) = \Phi^-(z)$ при $0 \le z \le -\lambda^- t^*$.

Введем на полуоси $z \in (0, +\infty)$ равномерную разностную сетку с узлами $z_j = j\,h + z_0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, где $h = -\lambda^- t^*$, $0 \le z_0 \le -\lambda^- t^*$.

Обозначим $f^-(z_j) = y_j$, $g(z_j) = g_j$. Значение $y_0 = \Phi^-(z_0)$ задано.

В этих обозначениях уравнение для f^-, записанное в узлах разностной сетки, принимает вид разностной задачи Коши

$$\begin{cases} y_j = \det T_g\; y_{j-1} + g_j, & j = 1, 2, \ldots, \\ y_0 = \Phi^-(z_0), \end{cases}$$

решением которой является сеточная функция (1.10).

Пусть z любое из области $z > -\lambda^- t^*$. Для этого z выберем $z_0 = z + N^- \lambda^- t^*$, где $N^- = \left[-\frac{z}{\lambda^- t^*}\right]$. Тогда $z_j = z$ при $j = N^-$ и, следовательно, $y_{N^-} = f^-(z)$, для которой с учетом (1.10) получаем выражение

$$f^-(z) = \left(\det T_g\right)^{N^-} \Phi^-(z + N^- \lambda^- t^*) + \sum_{k=1}^{N^-} \left(\det T_g\right)^{N^- - k} g\,(-k\lambda^- t^* + z + N^- \lambda^- t^*).$$

Подставляя сюда выражение для функции g и заменяя переменную суммирования по формуле $N^- - k = n$, приходим к виду

$$f^-(z) = \sum_{n=0}^{N^- - 1} \left(\det T_g\right)^n \left(\nu_1 k_2 \mu_1(-(n+1)t^* - \frac{z}{\lambda^-}) + \nu_2 \mu_2(\frac{l}{\lambda^-} - nt^* - \frac{z}{\lambda^-}) \right) + \left(\det T_g\right)^{N^-} \Phi^-(z + N^- \lambda^- t^*),$$

совпадающему с аналогичным результатом работы [10].

Из анализа выражения (1.10) для сеточной функции y_j следуют выводы о характере поведения амплитуды пульсовых волн в одном сосуде.

Для сеточной функции y_j из (1.10) известна оценка [3]:

$$\left|y_j\right| \le \left|\det T_g\right|^j \cdot \left|y_0\right| + \sum_{k=1}^{j} \left|\det T_g\right|^{j-k} \cdot \left|g_k\right|, \qquad j = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда, в случае ограниченности функции g, то есть при $\left|g_j\right| \le A$, получаем

$$\left|y_j\right| \le \left|\det T_g\right|^j \cdot \left|y_0\right| + A\frac{1-\left|\det T_g\right|^j}{1-\left|\det T_g\right|} \quad , \qquad j = 1, 2, \ldots \quad .$$

Следовательно, если $\left|\det T_g\right| = \left| k_1 k_2 \right| < 1$, то сеточная функция y_j остается ограниченной при любом сколь угодно большом j. Следствием этого является ограниченность в любой момент времени амплитуды бегущих волн при выполнении условия $\left|\det T_g\right| < 1$.

Если $\left|\det T_g\right| = \left| k_1 k_2 \right| > 1$, то из (1.10) следует вывод о неограниченном росте амплитуды бегущих волн. Отметим, что фактически получено необходимое и достаточное условие неограниченного роста амплитуды волн.

§2. Краевая задача на графе из двух ребер.

1. Постановка краевой задачи. Рассмотрим граф, состоящий из двух ограниченных ребер, соединяющихся в одной вершине. Пронумеруем ребра и вершины как указано на рис.1. На каждом из ребер введем свою систему координат. Начало координат на каждом ребре, без ограничения общности, совместим с внутренней вершиной графа, имеющей номер 0. Вершины 1 и 2 являются граничными вершинами графа.

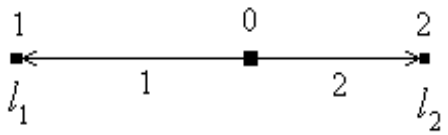


Рис. 1

Пусть на каждом ребре данного графа справедливы однородные ЛГД уравнения [5, 8]:

$$p_{it} + \bar{u}_i p_{ix_i} + \rho \bar{c}_i^2 u_{ix_i} = 0, \qquad (2.1)$$

$$u_{it} + \frac{1}{\rho} p_{ix_i} + \bar{u}_i u_{ix_i} = 0, \qquad 0 < x_i < l_i, \qquad t > 0, \quad i = 1,2,$$

а в начальный момент времени $t = 0$ выполняются условия

$$p_i(x_i,0) = \varphi_i(x_i), \qquad u_i(x_i,0) = \psi_i(x_i), \qquad 0 \le x_i \le l_i, \qquad i = 1,2. \qquad (2.2)$$

Здесь $\bar{p}_i = const$, $\bar{u}_i = const$ являются стационарными фоновыми значениями давления и скорости на каждом ребре [8], а $p_i(x_i,t)$, $u_i(x_i,t)$ - отклонения давления и скорости от стационарных значений. Функции $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ - начальные возмущения стационарных значений давления и скорости. Постоянная $\bar{c}_i = \sqrt{\dfrac{S_i(\bar{p}_i)}{\rho\bar{\theta}_i}}$ - скорость распространения малых возмущений по ребру с номером i ($i = 1, 2$), функция $S_i(P)$ - заданная зависимость между площадью поперечного сечения и давлением на ребре с номером i, $\bar{\theta}_i = \left.\dfrac{dS_i(P)}{dP}\right|_{P=\bar{p}_i} > 0$ ($i = 1,2$) - параметр, характеризующий эластичность сосуда (ребра графа).

Здесь, как и везде далее предполагается, что стационарное течение дозвуковое, то есть $|\bar{u}_i| < \bar{c}_i$.

Во внутренней вершине графа пусть выполнены дополнительные условия сопряжения вида:

$$\bar{s}_1 u_1(0,t) + \bar{\theta}_1 \bar{u}_1 p_1(0,t) + \bar{s}_2 u_2(0,t) + \bar{\theta}_2 \bar{u}_2 p_2(0,t) = 0, \qquad (2.3)$$

$$\alpha_1^0 p_1(0,t) + \beta_1^0 u_1(0,t) = \alpha_2^0 p_2(0,t) + \beta_2^0 u_2(0,t), \qquad t \ge 0. \qquad (2.4)$$

Соотношение (2.3) является результатом линеаризации условия сохранения потока вещества во внутренней вершине графа [4]. Соотношение (2.4) появляется при линеаризации условий вида [10]

$$g_1(\overline{p}_1 + p_1(0,t), \overline{u}_1 + u_1(0,t)) = g_2(\overline{p}_2 + p_2(0,t), \overline{u}_2 + u_2(0,t)).$$

Здесь g_1, g_2 - некоторые заданные функции.

Так, например, если на границах ребер, образующих внутреннюю вершину графа, выполняется условие непрерывности давления [4], то $g_i = \overline{p}_i + p_i(0,t)$, $i = 1,2$. При этом коэффициенты α_i^0, β_i^0 (верхний индекс 0 - номер вершины, а нижний индекс i - номер ребра) в (2.4) равны:

$$\alpha_i^0 = 1, \qquad \beta_i^0 = 0, \qquad i = 1,2. \qquad (2.5)$$

Если на границах ребер, образующих внутреннюю вершину графа, выполняется условие непрерывности интеграла Бернулли [4], то $g_i = \dfrac{(\overline{u}_i + u_i(0,t))^2}{2} + \dfrac{\overline{p}_i + p_i(0,t)}{\rho}$, $i = 1,2$ и тогда коэффициенты в (2.4) имеют вид:

$$\alpha_i^0 = \frac{1}{\rho}, \qquad \beta_i^0 = \overline{u}_i, \qquad i = 1,2. \qquad (2.6)$$

В граничных вершинах графа будем предполагать выполненными условия:

$$\alpha_1^1 p_1(l_1,t) + \beta_1^1 u_1(l_1,t) = \mu_1(t),$$
$$\alpha_2^2 p_2(l_2,t) + \beta_2^2 u_2(l_2,t) = \mu_2(t), \qquad t \ge 0, \qquad (2.7)$$

которые являются результатом линеаризации стандартных граничных условий в краевых задачах гемодинамики [10, 11].

2. Метод продолжений в приложении к краевой задаче на графе из двух ребер. Известно [8], что общее решение ЛГД уравнений (2.1) на каждом ребре графа представимо в виде комбинации двух бегущих волн, одна из которых f_i^+ распространяется по направлению ребра (волны, уходящие от внутренней вершины графа, рис.1), а вторая f_i^- распространяется в противоположном направлении (волны, падающие на внутреннюю вершину графа). То есть:

$$p_i(x_i,t) = \frac{\rho\,\overline{c}_i}{2}\left(f_i^+(x_i - \lambda_i^+ t) - f_i^-(x_i - \lambda_i^- t)\right),$$
$$u_i(x_i,t) = \frac{1}{2}\left(f_i^+(x_i - \lambda_i^+ t) + f_i^-(x_i - \lambda_i^- t)\right), \qquad (2.8)$$

где $\lambda_i^+ = \overline{u}_i + \overline{c}_i > 0$, $\lambda_i^- = \overline{u}_i - \overline{c}_i < 0$, так как $|\overline{u}_i| < \overline{c}_i$, $i = 1,2$.

Конкретный вид функций f_i^+ и f_i^- на области определения каждой из них подбирается так, чтобы выполнялись заданные начальные условия (2.2), условия сопряжения (2.3), (2.4) и граничные условия (2.7).

Для рассматриваемой задачи при $0 \le x_i \le l_i$ и $t \ge 0$ областью определения функции $f_i^+(x_i - \lambda_i^+ t)$ является полуось $(-\infty, l_i]$, а область определения функции $f_i^-(x_i - \lambda_i^- t)$ представляет собой полуось $[0, +\infty)$.

Подстановка формул (2.8) в начальные условия (2.2) дает соотношения

$$f_i^+(x_i) = \frac{1}{\rho \bar{c}_i} \varphi_i(x_i) + \psi_i(x_i),$$

$$f_i^-(x_i) = -\frac{1}{\rho \bar{c}_i} \varphi_i(x_i) + \psi_i(x_i), \qquad 0 \le x_i \le l_i, \qquad i = 1,2, \qquad (2.9)$$

определяющие функции f_i^+ и f_i^- на отрезках $[0, l_i]$.

Для нахождения функций f_i^+ и f_i^- на оставшихся частях их областей определения воспользуемся условиями сопряжения (2.3), (2.4) и граничными условиями (2.7). Каждое из этих соотношений в отдельности дает связь между падающими на соответствующую вершину графа и уходящими от нее волнами f_i^+ и f_i^-.

При подстановке формул (2.8) в граничные условия (2.7) и условия сопряжения (2.3), (2.4) в левых частях возникающих соотношений соберем величины, которые для каждой конкретной вершины соответствуют уходящим от нее волнам. В правых частях сгруппируем выражения, которые соответствуют падающим на данную вершину волнам, а для граничных вершин еще и выражения, задающие краевые режимы.

В результате учет граничных условий дает:

$$f_i^-(l_i - \lambda_i^- t) = \nu_i \mu_i(t) + k_{i \to i}^i f_i^+(l_i - \lambda_i^+ t), \quad t \ge 0, \quad i = 1,2 \ . \qquad (2.10)$$

Здесь

$k_{i \to i}^i = \dfrac{\alpha_i^i \rho \bar{c}_i + \beta_i^i}{\alpha_i^i \rho \bar{c}_i - \beta_i^i}$ - коэффициент отражения [10, 11] волны $f_i^+(x_i - \lambda_i^+ t)$ от вершины с номером "i",

$\nu_i = \dfrac{2}{\beta_j^i - \alpha_j^i \rho \bar{c}_j}$, где i - номер граничной вершины, а j - номер ребра, ограниченного вершиной с номером "i" (в формуле (2.10) $j = i$).

Из условий сопряжения следует:

$$(\bar{s}_1+\bar{\theta}_1\bar{u}_1\rho\bar{c}_1)f_1^+(-\lambda_1^+t)+(\bar{s}_2+\bar{\theta}_2\bar{u}_2\rho\bar{c}_2)f_2^+(-\lambda_2^+t)=-(\bar{s}_1-\bar{\theta}_1\bar{u}_1\rho\bar{c}_1)f_1^-(-\lambda_1^-t)-$$
$$-(\bar{s}_2-\bar{\theta}_2\bar{u}_2\rho\bar{c}_2)f_2^-(-\lambda_2^-t),$$

$$(\gamma_1\rho\bar{c}_1+\delta_1)f_1^+(-\lambda_1^+t)-(\gamma_2\rho\bar{c}_2+\delta_2)f_2^+(-\lambda_2^+t)=(\gamma_1\rho\bar{c}_1-\delta_1)f_1^-(-\lambda_1^-t)-$$
$$-(\gamma_2\rho\bar{c}_2-\delta_2)f_2^-(-\lambda_2^-t),\qquad t\ge 0.$$

Решая эту систему из двух уравнений относительно $f_1^+(-\lambda_1^+t)$ и $f_2^+(-\lambda_2^+t)$, которые являются волнами уходящими от вершины с номером "0", получаем

$$f_1^+(-\lambda_1^+t)=k_{1\to1}^0 f_1^-(-\lambda_1^-t)+k_{2\to1}^0 f_2^-(-\lambda_2^-t),$$

$$f_2^+(-\lambda_2^+t)=k_{1\to2}^0 f_1^-(-\lambda_1^-t)+k_{2\to2}^0 f_2^-(-\lambda_2^-t),\qquad t\ge 0\quad . \tag{2.11}$$

Здесь $k_{1\to1}^0$, $k_{2\to1}^0$, $k_{1\to2}^0$, $k_{2\to2}^0$ транспортные коэффициенты вершины с номером "0" для пульсовой волны скорости, вычисляемые по формулам [11]:

$$k_{i\to i}^0=\frac{\rho\alpha_i^0\bar{c}_i-\beta_i^0}{\rho\alpha_i^0\bar{c}_i+\beta_i^0}-\frac{2\bar{s}_i(\rho\alpha_i^0\bar{c}_i-\beta_i^0\bar{m}_i)}{(\rho\alpha_i^0\bar{c}_i+\beta_i^0)^2\sum_{l=1}^{2}\frac{\bar{s}_l(1+\bar{m}_l)}{\rho\alpha_l^0\bar{c}_l+\beta_l^0}}\quad,\qquad i=1,2\quad,$$

$$k_{j\to i}^0=-\frac{2\bar{s}_j(\rho\alpha_j^0\bar{c}_j-\beta_j^0\bar{m}_j)}{(\rho\alpha_i^0\bar{c}_i+\beta_i^0)(\rho\alpha_j^0\bar{c}_j+\beta_j^0)\sum_{l=1}^{2}\frac{\bar{s}_l(1+\bar{m}_l)}{\rho\alpha_l^0\bar{c}_l+\beta_l^0}}\quad,$$ где $i=1$, $j=2$ или $i=2$, $j=1$ и $\bar{m}_i=\dfrac{\bar{u}_i}{\bar{c}_i}$.

Для компактного формального представления формул (2.10) и (2.11), определяющих в один и тот же момент времени уходящие от всех вершин рассматриваемого графа волны через падающие на эти вершины волны, удобно воспользоваться векторной формой записи.

Введем в рассмотрение вектора

$$V=\left(f_1^+(-\lambda_1^+t),\,f_2^+(-\lambda_2^+t),\,f_1^-(l_1-\lambda_1^-t),\,f_2^-(l_2-\lambda_2^-t)\right)^T,$$

$$\tilde{V}=\left(f_1^-(-\lambda_1^-t),\,f_2^-(-\lambda_2^-t),\,f_1^+(l_1-\lambda_1^+t),\,f_2^+(l_2-\lambda_2^+t)\right)^T,$$

$$M=\left(0,\,0,\,\mu_1(t),\,\mu_2(t)\right)^T$$

и матрицы

$$T_g=\begin{pmatrix}k_{1\to1}^0 & k_{2\to1}^0 & 0 & 0\\ k_{1\to2}^0 & k_{2\to2}^0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & k_{1\to1}^1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & k_{2\to2}^2\end{pmatrix}\quad,\qquad G=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\nu_1&0\\0&0&0&\nu_2\end{pmatrix}\quad.$$

Тогда система уравнений (2.10), (2.11) принимает вид $V = T_g \widetilde{V} + G\,M$.

Элементами матрицы T_g являются транспортные коэффициенты для всех вершин рассматриваемого графа (см. Рис.1). Для формального представления структуры матрицы транспортных коэффициентов всего графа T_g удобно ввести в рассмотрение матрицы транспортных коэффициентов каждой отдельной вершины графа. Так для данного графа (Рис.1) введем матрицы:

$T^0 = \begin{pmatrix} k^0_{1\to1} & k^0_{2\to1} \\ k^0_{1\to2} & k^0_{2\to2} \end{pmatrix}$ - матрица транспортных коэффициентов вершины с номером "0";

$T^1 = \left(k^1_{1\to1}\right)$ - матрица, состоящая из одного элемента, транспортных коэффициентов вершины с номером "1";

$T^2 = \left(k^2_{2\to2}\right)$ - матрица транспортных коэффициентов вершины с номером "2".

Тогда матрица транспортных коэффициентов T_g всего графа принимает следующий блочный вид $T_g = \begin{pmatrix} T^0 & 0 & 0 \\ 0 & T^1 & 0 \\ 0 & 0 & T^2 \end{pmatrix}$. Отметим здесь, что определитель данной матрицы T_g равен

$$\det T_g = \det T^0 \cdot \det T^1 \cdot \det T^2 = (k^0_{1\to1}k^0_{2\to2} - k^0_{1\to2}k^0_{2\to1}) \cdot k^1_{1\to1} \cdot k^2_{2\to2}\,. \qquad (2.12)$$

Обратимся теперь к структуре векторов V и $\widetilde{V}$. Вектор $\widetilde{V}$ отличается от V порядком следования компонент-функций и значениями аргументов одноименных функций. Если в векторе $\widetilde{V}$ соблюсти тот же порядок следования компонент, что и в векторе V, то уравнения (2.10), (2.11) в векторной форме будут записываться уже с помощью матрицы T, полученной из матрицы T_g перестановкой строк и столбцов. Так, например, для заданного в векторе V порядка следования компонент матрица T имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^0_{1\to1} & k^0_{2\to1} \\ 0 & 0 & k^0_{1\to2} & k^0_{2\to2} \\ k^1_{1\to1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2_{2\to2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\left|\det T\right| = \left|\det T_g\right|$.

Вернемся к построению решения уравнений (2.10) и (2.11). Эти соотношения представляют собой линейную систему четырех уравнений относительно четырех функций f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^-. Решим эту функциональную систему относительно каждой из функций. Предположим, что значение переменной t в формулах (2.10), (2.11) достаточно велико, так что в ходе следующих формальных преобразований мы не выходим за границы областей определения функций f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^-.

Начнем с вывода рекуррентного соотношения для функции f_1^+. Воспользуемся первым из двух соотношений (2.11), в которое подставим выражения для f_1^- и f_2^- через функцию f_1^+. С этой целью в формуле (2.10) при $i=1$ заменим переменную t на $z = l_1 - \lambda_1^- t$:

$$f_1^-(z) = \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - \frac{z}{\lambda_1^-}) + k_{1\to1}^1 f_1^+ (\lambda_1^+ t_1^* + \frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^-} z), \text{ где } t_1^* = \frac{l_1}{\lambda_1^+} - \frac{l_1}{\lambda_1^-}.$$

Тогда
$$f_1^-(-\lambda_1^- t) = \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} + t) + k_{1\to1}^1 f_1^+ (\lambda_1^+ t_1^* - \lambda_1^+ t). \qquad (2.13)$$

Умножая первое соотношение в (2.11) на $k_{2\to2}^0$, а второе на $k_{2\to1}^0$ и вычитая из первого второе, получаем $f_2^+(-\lambda_2^+ t) = \frac{k_{2\to2}^0}{k_{2\to1}^0} f_1^+(-\lambda_1^+ t) - \frac{\det T^0}{k_{2\to1}^0} f_1^-(-\lambda_1^- t)$, или с учетом (2.10) $f_2^+(-\lambda_2^+ t) = \frac{k_{2\to2}^0}{k_{2\to1}^0} f_1^+(-\lambda_1^+ t) - \frac{\det T^0\ k_{1\to1}^1}{k_{2\to1}^0} f_1^+(\lambda_1^+ t_1^* - \lambda_1^+ t) - \frac{\det T^0}{k_{2\to1}^0} \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} + t)$.

Заменим в этом соотношении переменную t на $z = -\lambda_2^+ t$.

Тогда

$$f_2^+(z) = \frac{k_{2\to2}^0}{k_{2\to1}^0} f_1^+(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} z) - \frac{\det T^0\ k_{1\to1}^1}{k_{2\to1}^0} f_1^+(\lambda_1^+ t_1^* + \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} z) - \frac{\det T^0}{k_{2\to1}^0} \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - \frac{z}{\lambda_2^+}).$$

Используя это выражение от аргумента $z = l_2 - \lambda_2^+ t$ в формуле (2.10) с $i=2$, получаем

$$f_2^-(l_2 - \lambda_2^- t) = \frac{k_{2\to2}^2 k_{2\to2}^0}{k_{2\to1}^0} f_1^+(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2 - \lambda_1^+ t) - \frac{\det T_g}{k_{2\to1}^0} f_1^+(\lambda_1^+ t_1^* + \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2 - \lambda_1^+ t) -$$
$$- \frac{\det T^0\ k_{2\to2}^2}{k_{2\to1}^0} \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - \frac{l_2}{\lambda_2^+} + t) + \nu_2 \mu_2(t) \quad .$$

Заменим в этом соотношении переменную t на $z = l_2 - \lambda_2^- t$.

Тогда

$$f_2^-(z)=\frac{k_{2\to2}^2k_{2\to2}^0}{k_{2\to1}^0}f_1^+(\lambda_1^+t_2^*+\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^-}z)-\frac{\det T_g}{k_{2\to1}^0}f_1^+(\lambda_1^+t_1^*+\lambda_1^+t_2^*+\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^-}z)-$$
$$-\frac{\det T^0\ k_{2\to2}^2}{k_{2\to1}^0}\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-}-t_2^\circ-\frac{z}{\lambda_2^-})+\nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-}-\frac{z}{\lambda_2^-})\quad .$$

В результате подстановки этого выражения для функции f_2^- от аргумента $z=-\lambda_2^-t$ и выражения (2.13) для функции $f_1^-(-\lambda_1^-t)$ в первое из соотношений (2.11) получим

$$f_1^+(-\lambda_1^+t)=k_{1\to1}^0k_{1\to1}^1f_1^+(\lambda_1^+t_1^*-\lambda_1^+t)+k_{2\to2}^2k_{2\to2}^0f_1^+(\lambda_1^+t_2^*-\lambda_1^+t)-\det T_gf_1^+(\lambda_1^+t_1^*+\lambda_1^+t_2^*-\lambda_1^+t)+$$
$$+k_{1\to1}^0\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-}+t)-\det T^0\ k_{2\to2}^2\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-}-t_2^\circ+t)+k_{2\to1}^0\nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-}+t)\quad .$$

Заменим в этом соотношении переменную t на переменную $z=-\lambda_1^+t$ и введем дополнительное обозначение для комбинации граничных функций. Тогда искомое рекуррентное соотношение для функции f_1^+ принимает вид:

$$f_1^+(z)=k_{1\to1}^0k_{1\to1}^1f_1^+(z+\lambda_1^+t_1^*)+k_{2\to2}^2k_{2\to2}^0f_1^+(z+\lambda_1^+t_2^*)-\det T_gf_1^+(z+\lambda_1^+t_1^*+\lambda_1^+t_2^*)+g_1^+(z)\,,\quad (2.14)$$

где $\quad g_1^+(z)=k_{1\to1}^0\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-}-\frac{z}{\lambda_1^+})-\det T^0\ k_{2\to2}^2\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-}-t_2^*-\frac{z}{\lambda_1^+})+k_{2\to1}^0\nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-}-\frac{z}{\lambda_1^+})$

и $\quad z\le l_1-\lambda_1^+t_1^*-\lambda_1^+t_2^*$.

Из формулы (2.14) следует, что значение функции f_1^+ в точке z выражается через значения этой же функции в других трех точках $z+\lambda_1^+t_1^*$, $z+\lambda_1^+t_2^*$ и $z+\lambda_1^+t_1^*+\lambda_1^+t_2^*$, лежащих правее точки z на числовой оси. К этому добавляется вклад двух граничных режимов, определяемых функциями μ_1 и μ_2.

Теперь получим рекурентное соотношения для функции f_1^-. Из (2.10) при $i=1$ после замены переменной t на новую переменную $z=l_1-\lambda_1^+t$ следует, что

$$f_1^+(z)=\frac{1}{k_{1\to1}^1}f_1^-(-\lambda_1^-t_1^*+\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}z)-\frac{1}{k_{1\to1}^1}\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^+}-\frac{z}{\lambda_1^+})\,.$$

Исключив из соотношений (2.11) $f_2^-(-\lambda_2^-t)$ и заменяя переменную t на промежуточную переменную $z=-\lambda_2^+t$, имеем

$$f_2^+(z)=\frac{k_{2\to2}^0}{k_{2\to1}^0}f_1^+(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+}z)-\frac{\det T^0}{k_{2\to1}^0}f_1^-(\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}z)\,.$$

Подставляя это выражение от аргумента $z=l_2-\lambda_2^+t$ в (2.10), в котором $i=2$, и заменив переменную t на переменную $z=l_2-\lambda_2^-t$, получаем

$$f_2^-(z)=\frac{k_{2\to2}^2k_{2\to2}^0}{k_{2\to1}^0}f_1^+(\lambda_1^+t_2^*+\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^-}z)-\frac{\det T^0k_{2\to2}^0}{k_{2\to1}^0}f_1^-(\lambda_1^-t_2^*+\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^-}z)+\nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-}-\frac{z}{\lambda_2^-}) \quad .$$

Подставим выражения для $f_2^-(z)$ и $f_1^+(z)$ от соответствующих аргументов в первое из соотношений (2.11). После этого заменим переменную t на $z=-\lambda_1^-t_1^*-\lambda_1^-t$. В результате приходим к искомому рекуррентному соотношению для функции f_1^-:

$$f_1^-(z)=k_{1\to1}^0k_{1\to1}^1f_1^-(z+\lambda_1^-t_1^*)+k_{2\to2}^2k_{2\to2}^0f_1^-(z+\lambda_1^-t_2^*)-\det T_gf_1^-(z+\lambda_1^-t_1^*+\lambda_1^-t_2^*)+g_1^-(z), \quad (2.15)$$

где

$$g_1^-(z)=\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^+}-t_1^*-\frac{z}{\lambda_1^-})-k_{2\to2}^0\,k_{2\to2}^2\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^+}-t_1^*-t_2^*-\frac{z}{\lambda_1^-})+k_{2\to1}^0k_{1\to1}^1\nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-}-t_1^*-\frac{z}{\lambda_1^-})$$

и $\quad z\ge-\lambda_1^-(t_1^*+t_2^*)$.

Из формулы (2.15) следует, что значение функции f_1^- в точке z выражается через значения этой же функции в других трех точках $z+\lambda_1^-t_1^*$, $z+\lambda_1^-t_2^*$ и $z+\lambda_1^-t_1^*+\lambda_1^-t_2^*$, лежащих левее точки z на числовой оси. К этому добавляется вклад граничных режимов, определяемых функциями μ_1 и μ_2.

Аналогичным образом выводятся рекуррентные соотношения и для функций f_2^+, f_2^-. Опуская промежуточные преобразования приведем конечный вид искомых соотношений.

Так, для функции f_2^+ рекуррентное соотношение имеет вид:

$$f_2^+(z)=k_{1\to1}^0k_{1\to1}^1f_2^+(z+\lambda_2^+t_1^*)+k_{2\to2}^2k_{2\to2}^0f_2^+(z+\lambda_2^+t_2^*)-\det T_gf_2^+(z+\lambda_2^+t_1^*+\lambda_2^+t_2^*)+g_2^+(z), \quad (2.16)$$

где $\quad g_2^+(z)=k_{1\to2}^0\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-}-\frac{z}{\lambda_2^+})-\det T^0\,k_{1\to1}^1\nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-}-t_1^*-\frac{z}{\lambda_2^+})+k_{2\to2}^0\nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-}-\frac{z}{\lambda_2^+})$

и $\quad z\le l_2-\lambda_2^+t_1^*-\lambda_2^+t_2^*$.

Из формулы (2.16) следует, что значение функции f_2^+ в точке z выражается через значения этой же функции в других трех точках $z+\lambda_2^+t_1^*$, $z+\lambda_2^+t_2^*$ и $z+\lambda_2^+t_1^*+\lambda_2^+t_2^*$, лежащих правее точки z на числовой оси, и еще присутствует вклад граничных режимов.

В заключение этого пункта приведем рекуррентное соотношение для функции f_2^-:

$$f_2^-(z)=k_{1\to1}^0k_{1\to1}^1f_2^-(z+\lambda_2^-t_1^*)+k_{2\to2}^2k_{2\to2}^0f_2^-(z+\lambda_2^-t_2^*)-\det T_gf_2^-(z+\lambda_2^-t_1^*+\lambda_2^-t_2^*)+g_2^-(z), \quad (2.17)$$

где

$$g_2^-(z) = \nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^+} - t_2^* - \frac{z}{\lambda_2^-}) - k_{1\to1}^0\, k_{1\to1}^1 \nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^+} - t_1^* - t_2^* - \frac{z}{\lambda_2^-}) + k_{1\to2}^0 k_{2\to2}^2 \nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-} - t_2^* - \frac{z}{\lambda_2^-})$$

и $\quad z \ge -\lambda_2^-(t_1^* + t_2^*)$.

Из формулы (2.17) следует, что значение функции f_2^- в точке z выражается через значения этой же функции в других трех точках $z + \lambda_2^- t_1^*$, $z + \lambda_2^- t_2^*$ и $z + \lambda_2^- t_1^* + \lambda_2^- t_2^*$, лежащих левее точки z на числовой оси. К этому добавляется вклад граничных режимов, определяемых функциями μ_1 и μ_2.

3. Рекуррентные соотношения для волн скорости на графе из двух "равновременных" ребер. Пусть параметры обоих ребер рассматриваемого графа таковы, что время прохождения бегущих волн по каждому из двух ребер в обоих направлениях одинаково. То есть, будем предполагать выполненными равенства $t_1^* = t_2^* = t^*$. Ребра, для которых выполнены такие условия, назовем "равновременными" ребрами.

Тогда (2.14)-(2.17), полученные в предыдущем пункте, принимают вид следующих трехточечных рекуррентных соотношений, которые решаются аналитически.

Для функции f_1^+:

$$f_1^+(z) = (k_{1\to1}^0 k_{1\to1}^1 + k_{2\to2}^2 k_{2\to2}^0) f_1^+(z + \lambda_1^+ t^*) - \det T_g f_1^+(z + 2\lambda_1^+ t^*) + g_1^+(z), \qquad (2.18)$$

где $\quad g_1^+(z) = k_{1\to1}^0 \nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-} - \frac{z}{\lambda_1^+}) - \det T^0\; k_{2\to2}^2 \nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-} - t^* - \frac{z}{\lambda_1^+}) + k_{2\to1}^0 \nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-} - \frac{z}{\lambda_1^+})$

и $\quad z \le l_1 - 2\lambda_1^+ t^*$.

Для функции f_1^-:

$$f_1^-(z) = (k_{1\to1}^0 k_{1\to1}^1 + k_{2\to2}^2 k_{2\to2}^0) f_1^-(z + \lambda_1^- t^*) - \det T_g f_1^-(z + 2\lambda_1^- t^*) + g_1^-(z), \qquad (2.19)$$

где

$$g_1^-(z) = \nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^+} - t^* - \frac{z}{\lambda_1^-}) - k_{2\to2}^0\; k_{2\to2}^2 \nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^+} - 2t^* - \frac{z}{\lambda_1^-}) + k_{2\to1}^0 k_{1\to1}^1 \nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-} - t^* - \frac{z}{\lambda_1^-})$$

и $\quad z \ge -2\lambda_1^- t^*$.

Для функции f_2^+:

$$f_2^+(z) = (k_{1\to1}^0 k_{1\to1}^1 + k_{2\to2}^2 k_{2\to2}^0) f_2^+(z + \lambda_2^+ t^*) - \det T_g f_2^+(z + 2\lambda_2^+ t^*) + g_2^+(z), \qquad (2.20)$$

где $\quad g_2^+(z) = k_{1\to2}^0 \nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-} - \frac{z}{\lambda_2^+}) - \det T^0\; k_{1\to1}^1 \nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-} - t^* - \frac{z}{\lambda_2^+}) + k_{2\to2}^0 \nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-} - \frac{z}{\lambda_2^+})$

и $\quad z \le l_2 - 2\lambda_2^+ t^*$.

Для функции f_2^-:

$$f_2^-(z) = (k_{1\to1}^0 k_{1\to1}^1 + k_{2\to2}^2 k_{2\to2}^0) f_2^-(z + \lambda_2^- t^*) - \det T_g f_2^-(z + 2\lambda_2^- t^*) + g_2^-(z), \qquad (2.21)$$

где

$$g_2^-(z) = \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^+} - t^* - \frac{z}{\lambda_2^-}) - k_{1\to1}^0 \, k_{1\to1}^1 \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^+} - t^* - \frac{z}{\lambda_2^-}) + k_{1\to2}^0 k_{2\to2}^2 \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - t^* - \frac{z}{\lambda_2^-})$$

и $\quad z \ge -2\lambda_2^- t^*$.

Из формул (2.18)-(2.21) следует, что для нахождения значений функций f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^- на всей области их определения достаточно иметь значения функции f_1^+ на отрезке $(l_1 - 2\lambda_1^+ t^*, l_1]$, значения функции f_1^- на отрезке $[0, -2\lambda_1^- t^*)$, значения функции f_2^+ на отрезке $(l_2 - 2\lambda_2^+ t^*, l_2]$ и значения функции f_2^- на отрезке $[0, -2\lambda_2^- t^*)$.

Определим функции f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^-, которые обозначим как Φ_1^+, Φ_1^-, Φ_2^+, Φ_2^-, соответственно, на данных начальных отрезках. Из начальных условий (2.2) и (2.8) следуют соотношения (2.9), определяющие искомые функции на отрезках $[0, l_i]$:

$$\Phi_i^+(z) = W_i^+(z), \quad \Phi_i^-(z) = W_i^-(z),$$

где использовано обозначение

$$W_i^\pm(z) = \pm \frac{1}{\rho \bar{c}_i} \varphi_i(z) + \psi_i(z), \qquad 0 \le z \le l_i, \qquad i = 1,2 \,. (2.22)$$

Для определения вида функций Φ_1^+, Φ_1^-, Φ_2^+, Φ_2^- на оставшихся областях удобно записать соотношения (2.10) и (2.11) следующем образом:

$$f_1^-(z) = k_{1\to1}^1 f_1^+ (\frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^-} z + \lambda_1^+ t^*) + \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - \frac{z}{\lambda_1^-}), \qquad (2.23)$$

$$f_2^-(z) = k_{2\to2}^2 f_2^+ (\frac{\lambda_2^+}{\lambda_2^-} z + \lambda_2^+ t^*) + \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^-} - \frac{z}{\lambda_2^-}), \qquad (2.24)$$

$$f_1^+(z) = k_{1\to1}^0 f_1^- (\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} z) + k_{2\to1}^0 f_2^- (\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} z), \qquad (2.25)$$

$$f_2^+(z) = k_{1\to2}^0 f_1^- (\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+} z) + k_{2\to2}^0 f_2^- (\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} z). \qquad (2.26)$$

Выражение (2.23) получается, если в (2.10) в случае $i = 1$ переменную t заменить на переменную $z = l_1 - \lambda_1^- t$, а (2.24) возникает, если в (2.10) при $i = 2$

переменную t заменить на переменную $z = l_2 - \lambda_2^- t$. Формула (2.25) есть результат замены переменной t на переменную $z = -\lambda_1^+ t$ в первом из соотношений (2.11), а формула (2.26) - это результат замены переменной t на переменную $z = -\lambda_2^+ t$ во втором из соотношений (2.11).

Пусть в (2.23) комбинация $\frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^-} z + \lambda_1^+ t^*$, являющаяся аргументом функции f_1^+, имеет значения из отрезка $0 \le \frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^-} z + \lambda_1^+ t^* \le l_1$. То есть $l_1 \le z \le -\lambda_1^- t^*$. Тогда, используя для функции f_1^+ формулу (2.22), получаем:

$$\Phi_1^-(z) = k_{1\to 1}^1 W_1^+ (\frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^-} z + \lambda_1^+ t^*) + \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - \frac{z}{\lambda_1^-}), \tag{2.27}$$

при $l_1 < z \le -\lambda_1^- t^*$.

Аналогично рассмотрим формулу (2.24). Предположим, что комбинация $\frac{\lambda_2^+}{\lambda_2^-} z + \lambda_2^+ t^*$, являющаяся аргументом функции f_2^+, имеет значения из отрезка $0 \le \frac{\lambda_2^+}{\lambda_2^-} z + \lambda_2^+ t^* \le l_2$. То есть $l_2 \le z \le -\lambda_2^- t^*$. Тогда, используя для функции f_2^+ формулу (2.22), получаем:

$$\Phi_2^-(z) = k_{2\to 2}^2 W_2^+ (\frac{\lambda_2^+}{\lambda_2^-} z + \lambda_2^+ t^*) + \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^-} - \frac{z}{\lambda_2^-}), \tag{2.28}$$

при $l_2 < z \le -\lambda_2^- t^*$.

Теперь воспользуемся формулой (2.25). Пусть комбинации $\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} z$ и $\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} z$, являющиеся аргументами, соответственно, функций f_1^- и f_2^-, удовлетворяют неравенствам $0 \le \frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} z \le l_1$ и $0 \le \frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} z \le l_2$. То есть $\max\left\{l_1, \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2\right\} - \lambda_1^+ t^* \le z \le 0$. Тогда, используя для функций f_1^- и f_2^- формулы (2.22), получаем:

$$\Phi_1^+(z) = k_{1\to 1}^0 W_1^- (\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} z) + k_{2\to 1}^0 W_2^- (\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} z), \tag{2.29}$$

при $\max\left\{l_1, \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2\right\} - \lambda_1^+ t^* \le z \le 0$.

Аналогично рассмотрим формулу (2.26). Пусть комбинации $\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}z$ и $\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}z$, являющиеся аргументами функций f_1^- и f_2^-, соответственно, удовлетворяют условиям $0 \le \frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}z \le l_1$ и $0 \le \frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}z \le l_2$. То есть $\max\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}l_1,\ \ l_2\right\} - \lambda_2^+ t^* \le z \le 0$. Тогда, используя для функций f_1^- и f_2^- формулы (2.22), получаем:

$$\Phi_2^+(z) = k_{1\to 2}^0 W_1^-(\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}z) + k_{2\to 2}^0 W_2^-(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}z), \qquad (2.30)$$

при $\max\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}l_1,\ \ l_2\right\} - \lambda_2^+ t^* \le z \le 0$.

Далее следует вновь воспользоваться формулами (2.23) - (2.26), учитывая полученные выражения для функций Φ_1^+, Φ_1^-, Φ_2^+, Φ_2^- (2.27) - (2.30).

Итак, пусть в (2.23) комбинация $\frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^-}z + \lambda_1^+ t^*$, являющаяся аргументом функции f_1^+, имеет значения из отрезка $\max\left\{l_1, \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+}l_2\right\} - \lambda_1^+ t^* \le \frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^-}z + \lambda_1^+ t^* < 0$. То есть $-\lambda_1^- t^* < z \le \min\left\{\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}l_1, \frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}l_2\right\} - 2\lambda_1^- t^*$. Тогда, используя для функции f_1^+ формулу (2.29), получаем:

$$\Phi_1^-(z) = k_{1\to 1}^1 k_{1\to 1}^0 W_1^-(z + \lambda_1^- t^*) + k_{1\to 1}^1 k_{2\to 1}^0 W_2^-(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^-}z + \lambda_2^- t^*) + \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - \frac{z}{\lambda_1^-}), \qquad (2.31)$$

при $-\lambda_1^- t^* < z \le \min\left\{\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}l_1, \frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}l_2\right\} - 2\lambda_1^- t^*$.

Рассмотрим формулу (2.24). Предположим, что комбинация $\frac{\lambda_2^+}{\lambda_2^-}z + \lambda_2^+ t^*$, являющаяся аргументом функции f_2^+, имеет значения из отрезка $\max\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}l_1,\ \ l_2\right\} - \lambda_2^+ t^* \le \frac{\lambda_2^+}{\lambda_2^-}z + \lambda_2^+ t^* < 0$. То есть $-\lambda_2^- t^* < z \le \min\left\{\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+}l_1, \frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}l_2\right\} - 2\lambda_2^- t^*$.

Тогда, используя для функции f_2^+ формулу (2.30), получаем:

$$\Phi_2^-(z) = k_{2\to 2}^2 k_{1\to 2}^0 W_1^-(\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^-}z + \lambda_1^- t^*) + k_{2\to 2}^2 k_{2\to 2}^0 W_2^-(z + \lambda_2^- t^*) + \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^-} - \frac{z}{\lambda_2^-}), \qquad (2.32)$$

при $-\lambda_2^- t^* < z \le \min\left\{\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} l_1, \frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} l_2\right\} - 2\lambda_2^- t^*$.

Воспользуемся формулой (2.25). Пусть комбинации $\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} z$ и $\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} z$, являющиеся аргументами, соответственно, функций f_1^- и f_2^-, удовлетворяют неравенствам $l_1 < \frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} z \le -\lambda_1^- t^*$ и $l_2 < \frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} z \le -\lambda_2^- t^*$. То есть $-\lambda_1^+ t^* \le z < \min\left\{l_1, \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2\right\} - \lambda_1^+ t^*$. Тогда, используя для функции f_1^- формулу (2.27), а для функции f_2^- формулу (2.28), получаем:

$$\Phi_1^+(z) = k_{1\to1}^0 k_{1\to1}^1 W_1^+(z + \lambda_1^+ t^*) + k_{2\to1}^0 k_{2\to2}^2 W_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+} z + \lambda_2^+ t^*) +$$

$$+ k_{1\to1}^0 \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - \frac{z}{\lambda_1^+}) + k_{2\to1}^0 \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^-} - \frac{z}{\lambda_1^+}), \qquad (2.33)$$

при $-\lambda_1^+ t^* \le z < \min\left\{l_1, \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2\right\} - \lambda_1^+ t^*$.

Области применения формул (2.29) и (2.33) разделены промежутком $\min\left\{l_1, \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2\right\} - \lambda_1^+ t^* \le z < \max\left\{l_1, \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2\right\} - \lambda_1^+ t^*$. Для определения функции $\Phi_1^+(z)$ в этом промежутке значений переменной z также воспользуемся соотношением (2.25). Рассмотрим два возможных случая. Пусть $l_1 - \lambda_1^+ t^* \le z < \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2 - \lambda_1^+ t^*$. Тогда, используя в (2.25) для функции f_1^- формулу (2.22), а для функции f_2^- формулу (2.28), получим:

$$\Phi_1^+(z) = k_{1\to1}^0 W_1^-(\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} z) + k_{2\to1}^0 k_{2\to2}^2 W_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+} z + \lambda_2^+ t^*) + k_{2\to1}^0 \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^-} - \frac{z}{\lambda_1^+}). \qquad (2.34)$$

Если же справедливо неравенство $\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2 - \lambda_1^+ t^* \le z < l_1 - \lambda_1^+ t^*$, то используя в (2.25) для функции f_1^- формулу (2.27), а для функции f_2^- формулу (2.22), получим:

$$\Phi_1^+(z) = k_{1\to1}^0 k_{1\to1}^1 W_1^+(z + \lambda_1^+ t^*) + k_{2\to1}^0 W_2^-(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} z) + k_{1\to1}^0 \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - \frac{z}{\lambda_1^+}). \qquad (2.35)$$

Воспользуемся формулой (2.26). Пусть комбинации $\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}z$ и $\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}z$, являющиеся аргументами, соответственно, функций f_1^- и f_2^-, удовлетворяют неравенствам $l_1 < \frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}z \le -\lambda_1^- t^*$ и $l_2 < \frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}z \le -\lambda_2^- t^*$. То есть $-\lambda_2^+ t^* \le z < \min\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}l_1\ ,\ l_2\right\} - \lambda_2^+ t^*$.

Тогда, используя для функции f_1^- формулу (2.27), а для функции f_2^- формулу (2.28), получаем:

$$\Phi_2^+(z) = k_{1\to2}^0 k_{1\to1}^1 W_1^+(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+}z + \lambda_1^+ t^*) + k_{2\to2}^0 k_{2\to2}^2 W_2^+(z + \lambda_2^+ t^*) +$$

$$+ k_{1\to2}^0 \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - \frac{z}{\lambda_2^+}) + k_{2\to2}^0 \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^-} - \frac{z}{\lambda_2^+}), \qquad (2.36)$$

при $-\lambda_2^+ t^* \le z < \min\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}l_1\ ,\ l_2\right\} - \lambda_2^+ t^*$.

Области применения формул (2.30) и (2.36) разделены промежутком $\min\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}l_1\ ,\ l_2\right\} - \lambda_2^+ t^* \le z < \max\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}l_1\ ,\ l_2\right\} - \lambda_2^+ t^*$. Для определения функции $\Phi_2^+(z)$ в этом промежутке значений переменной z также воспользуемся соотношением (2.25). Рассмотрим два возможных случая. Пусть $\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}l_1 - \lambda_2^+ t^* \le z < l_2 - \lambda_2^+ t^*$. Тогда, используя в (2.26) для функции f_1^- формулу (2.22), а для функции f_2^- формулу (2.28), получим:

$$\Phi_2^+(z) = k_{1\to2}^0 W_1^-(\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}z) + k_{2\to2}^0 k_{2\to2}^2 W_2^+(z + \lambda_2^+ t^*) + k_{2\to2}^0 \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^-} - \frac{z}{\lambda_2^+}). \qquad (2.37)$$

Если же справедливо неравенство $l_2 - \lambda_2^+ t^* \le z < \frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}l_1 - \lambda_2^+ t^*$, то используя в (2.26) для функции f_1^- формулу (2.27), а для функции f_2^- формулу (2.22), получим:

$$\Phi_2^+(z) = k_{1\to2}^0 k_{1\to1}^1 W_1^+(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+}z + \lambda_1^+ t^*) + k_{2\to2}^0 W_2^-(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}z) + k_{1\to2}^0 \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - \frac{z}{\lambda_2^+}). \qquad (2.38)$$

Пусть в (2.23) комбинация $\frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^-}z+\lambda_1^+t^*$, являющаяся аргументом функции f_1^+, имеет значения из отрезка $\min\left\{l_1\,,\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+}l_2\right\}-\lambda_1^+t^*\le\frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^-}z+\lambda_1^+t^*<\max\left\{l_1\,,\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+}l_2\right\}-\lambda_1^+t^*$. То есть $\min\left\{\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}l_1,\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}l_2\right\}-2\lambda_1^-t^*<z\le\max\left\{\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}l_1,\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}l_2\right\}-2\lambda_1^-t^*$.

Тогда, используя в (2.23) для функции f_1^+ в случае $\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}l_2-2\lambda_1^-t^*<z\le\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}l_1-2\lambda_1^-t^*$ формулу (2.34), получаем:

$$\Phi_1^-(z)=k_{1\to1}^1k_{1\to1}^0W_1^-(z+\lambda_1^-t^*)+k_{1\to1}^1k_{2\to1}^0k_{2\to2}^2W_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^-}z+2\lambda_2^+t^*)+$$

$$+k_{1\to1}^1k_{2\to1}^0\nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-}-t^*-\frac{z}{\lambda_1^-})+\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-}-\frac{z}{\lambda_1^-})\,, \qquad (2.39)$$

при $\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}l_2-2\lambda_1^-t^*<z\le\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}l_1-2\lambda_1^-t^*$.

Если же $\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}l_1-2\lambda_1^-t^*<z\le\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}l_2-2\lambda_1^-t^*$, то, используя в (2.23) для функции f_1^+ формулу (2.35), имеем:

$$\Phi_1^-(z)=(k_{1\to1}^1)^2k_{1\to1}^0W_1^+(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^-}z+2\lambda_1^+t^*)+k_{1\to1}^1k_{2\to1}^0W_2^-(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^-}z+\lambda_2^-t^*)+$$

$$+k_{1\to1}^1k_{1\to1}^0\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-}-t^*-\frac{z}{\lambda_1^-})+\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-}-\frac{z}{\lambda_1^-})\,, \qquad (2.40)$$

при $\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}l_1-2\lambda_1^-t^*<z\le\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}l_2-2\lambda_1^-t^*$.

Пусть в (2.23) комбинация $\frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^-}z+\lambda_1^+t^*$, являющаяся аргументом функции f_1^+, имеет значения из отрезка $-\lambda_1^+t^*\le\frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^-}z+\lambda_1^+t^*<\min\left\{l_1\,,\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+}l_2\right\}-\lambda_1^+t^*$. То есть $\max\left\{\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}l_1,\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}l_2\right\}-2\lambda_1^-t^*<z\le-2\lambda_1^-t^*$.

Тогда, используя в (2.23) для функции f_1^+ формулу (2.33), получаем:

$$\Phi_1^-(z) = (k_{1\to1}^1)^2 k_{1\to1}^0 W_1^+(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^-} z + 2\lambda_1^+ t^*) + k_{1\to1}^1 k_{2\to1}^0 k_{2\to2}^2 W_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^-} z + 2\lambda_2^+ t^*) +$$

$$+ k_{1\to1}^1 k_{1\to1}^0 \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - t^* - \frac{z}{\lambda_1^-}) + k_{1\to1}^1 k_{2\to1}^0 \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^-} - t^* - \frac{z}{\lambda_1^-}) + \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - \frac{z}{\lambda_1^-}), \quad (2.41)$$

при $\max\left\{\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} l_1, \frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+} l_2\right\} - 2\lambda_1^- t^* < z \le -2\lambda_1^- t^*$.

Рассмотрим формулу (2.24). Пусть в (2.24) комбинация $\frac{\lambda_2^+}{\lambda_2^-} z + \lambda_2^+ t^*$, являющаяся аргументом функции f_2^+, имеет значения из отрезка $\min\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+} l_1, l_2\right\} - \lambda_2^+ t^* \le \frac{\lambda_2^+}{\lambda_2^-} z + \lambda_2^+ t^* < \max\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+} l_1, l_2\right\} - \lambda_2^+ t^*$. То есть $\min\left\{\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} l_1, \frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} l_2\right\} - 2\lambda_2^- t^* < z \le \max\left\{\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} l_1, \frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} l_2\right\} - 2\lambda_2^- t^*$.

Тогда, используя в (2.24) для функции f_2^+ в случае $\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} l_2 - 2\lambda_2^- t^* < z \le \frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} l_1 - 2\lambda_2^- t^*$ формулу (2.37), получаем:

$$\Phi_2^-(z) = k_{2\to2}^2 k_{1\to2}^0 W_1^-(\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^-} z + \lambda_1^- t^*) + k_{2\to2}^0 (k_{2\to2}^2)^2 W_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_2^-} z + 2\lambda_2^+ t^*) +$$

$$+ k_{2\to2}^2 k_{2\to2}^0 \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^-} - t^* - \frac{z}{\lambda_2^-}) + \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^-} - \frac{z}{\lambda_2^-}), \quad (2.42)$$

при $\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} l_2 - 2\lambda_2^- t^* < z \le \frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} l_1 - 2\lambda_2^- t^*$.

Если же $\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} l_1 - 2\lambda_2^- t^* < z \le \frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} l_2 - 2\lambda_2^- t^*$, то, используя в (2.24) для функции f_2^+ формулу (2.38), имеем:

$$\Phi_2^-(z) = k_{1\to1}^1 k_{1\to2}^0 k_{2\to2}^2 W_1^+(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^-} z + 2\lambda_1^+ t^*) + k_{2\to2}^2 k_{2\to2}^0 W_2^-(z + \lambda_2^- t^*) +$$

$$+ k_{2\to2}^2 k_{1\to2}^0 \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - t^* - \frac{z}{\lambda_2^-}) + \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^-} - \frac{z}{\lambda_2^-}), \quad (2.43)$$

при $\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} l_1 - 2\lambda_2^- t^* < z \le \frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} l_2 - 2\lambda_2^- t^*$.

Пусть теперь в (2.24) комбинация $\frac{\lambda_2^+}{\lambda_2^-}z+\lambda_2^+t^*$, являющаяся аргументом функции f_2^+, имеет значения из отрезка $-\lambda_2^+t^*\le\frac{\lambda_2^+}{\lambda_2^-}z+\lambda_2^+t^*<\min\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}l_1\,,\,l_2\right\}-\lambda_2^+t^*$. То есть $\max\left\{\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+}l_1\,,\,\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}l_2\right\}-2\lambda_2^-t^*<z\le-2\lambda_2^-t^*$.

Тогда, используя в (2.24) для функции f_2^+ формулу (2.36), получаем:

$$\Phi_2^-(z)=k_{2\to2}^2k_{1\to1}^1k_{1\to2}^0W_1^+(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^-}z+2\lambda_1^+t^*)+k_{2\to2}^0(k_{2\to2}^2)^2W_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_2^-}z+2\lambda_2^+t^*)+$$

$$+k_{2\to2}^2k_{1\to2}^0\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-}-t^*-\frac{z}{\lambda_2^-})+k_{2\to2}^2k_{2\to2}^0\nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-}-t^*-\frac{z}{\lambda_2^-})+\nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-}-\frac{z}{\lambda_2^-}),\quad(2.44)$$

при $\max\left\{\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+}l_1\,,\,\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}l_2\right\}-2\lambda_2^-t^*<z\le-2\lambda_2^-t^*$.

Воспользуемся формулой (2.25). Пусть комбинации $\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}z$ и $\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+}z$, являющиеся аргументами, соответственно, функций f_1^- и f_2^-, удовлетворяют неравенствам $-\lambda_1^-t^*<\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}z\le\min\left\{\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}l_1\,,\,\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}l_2\right\}-2\lambda_1^-t^*$ и $-\lambda_2^-t^*<\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+}z\le\min\left\{\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+}l_1\,,\,\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}l_2\right\}-2\lambda_2^-t^*$. То есть $\max\left\{l_1\,,\,\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+}l_2\right\}-2\lambda_1^+t^*\le z<-\lambda_1^+t^*$.

Тогда, используя для функции f_1^- формулу (2.31), а для функции f_2^- формулу (2.32), получаем:

$$\Phi_1^+(z)=\left((k_{1\to1}^0)^2k_{1\to1}^1+k_{2\to1}^0k_{1\to2}^0k_{2\to2}^2\right)W_1^-(\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}z+\lambda_1^-t^*)+$$

$$+\left(k_{1\to1}^0k_{2\to1}^0k_{1\to1}^1+k_{2\to1}^0k_{2\to2}^0k_{2\to2}^2\right)W_2^-(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+}z+\lambda_2^-t^*)+$$

$$+k_{1\to1}^0\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-}-\frac{z}{\lambda_1^+})+k_{2\to1}^0\nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-}-\frac{z}{\lambda_1^+}),\qquad(2.45)$$

при $\max\left\{l_1\,,\,\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+}l_2\right\}-2\lambda_1^+t^*\le z<-\lambda_1^+t^*$.

Если $l_1 < \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2$, то необходимо определить функцию $\Phi_1^+(z)$ еще и для значений аргумента $l_1 - 2\lambda_1^+ t^* \le z < \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2 - 2\lambda_1^+ t^*$. Для этого вновь воспользуемся формулой (2.25).

Пусть комбинации $\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} z$ и $\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} z$, являющиеся аргументами, соответственно, функций f_1^- и f_2^-, удовлетворяют неравенствам $\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+} l_2 - 2\lambda_1^- t^* < \frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} z \le \frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} l_1 - 2\lambda_1^- t^*$ и $\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} l_2 - 2\lambda_2^- t^* < \frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} z \le \frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} l_1 - 2\lambda_2^- t^*$. То есть $l_1 - 2\lambda_1^+ t^* \le z < \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2 - 2\lambda_1^+ t^*$.

Тогда, используя для функции f_1^- формулу (2.40), а для функции f_2^- формулу (2.43), получаем:

$$\begin{aligned}\Phi_1^+(z) = &\left((k_{1\to1}^0 k_{1\to1}^1)^2 + k_{2\to1}^0 k_{1\to2}^0 k_{1\to1}^1 k_{2\to2}^2\right) W_1^+(z + 2\lambda_1^+ t^*) + \\ &+ \left(k_{1\to1}^0 k_{2\to1}^0 k_{1\to1}^1 + k_{2\to1}^0 k_{2\to2}^0 k_{2\to2}^2\right) W_2^-(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} z + \lambda_2^- t^*) + \\ &+ \left((k_{1\to1}^0)^2 k_{1\to1}^1 + k_{2\to1}^0 k_{1\to2}^0 k_{2\to2}^2\right) \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - t^* - \frac{z}{\lambda_1^+}) + k_{1\to1}^0 \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - \frac{z}{\lambda_1^+}) + \\ &+ k_{2\to1}^0 \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^-} - \frac{z}{\lambda_1^+}), \qquad (2.46)\end{aligned}$$

при $l_1 - 2\lambda_1^+ t^* \le z < \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2 - 2\lambda_1^+ t^*$.

Воспользуемся теперь формулой (2.26). Пусть комбинации $\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+} z$ и $\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} z$, являющиеся аргументами, соответственно, функций f_1^- и f_2^-, удовлетворяют неравенствам $-\lambda_1^- t^* < \frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+} z \le \min\left\{\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} l_1, \frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+} l_2\right\} - 2\lambda_1^- t^*$ и $-\lambda_2^- t^* < \frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} z \le \min\left\{\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} l_1, \frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} l_2\right\} - 2\lambda_2^- t^*$. То есть $\max\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+} l_1, l_2\right\} - 2\lambda_2^+ t^* \le z < -\lambda_2^+ t^*$.

Тогда, используя для функции f_1^- формулу (2.31), а для функции f_2^- формулу (2.32), получаем:

$$\Phi_2^+(z) = k_{1\to2}^0 \left(k_{1\to1}^0 k_{1\to1}^1 + k_{2\to2}^0 k_{2\to2}^2\right) W_1^-(\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+} z + \lambda_1^- t^*) +$$

$$+\left(k^0_{1\to2}k^0_{2\to1}k^1_{1\to1}+(k^0_{2\to2})^2k^2_{2\to2}\right)W_2^-(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}z+\lambda_2^-t^*)+$$

$$+k^0_{1\to2}\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-}-\frac{z}{\lambda_2^+})+k^0_{2\to2}\nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-}-\frac{z}{\lambda_2^+}), \qquad (2.47)$$

при $\max\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}l_1\,,\,l_2\right\}-2\lambda_2^+t^*\le z<-\lambda_2^+t^*$.

Если $l_2<\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}l_1$, то необходимо определить функцию $\Phi_2^+(z)$ еще и для значений аргумента $l_2-2\lambda_2^+t^*\le z<\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}l_1-2\lambda_2^+t^*$. Для этого вновь воспользуемся формулой (2.26).

Пусть комбинации $\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}z$ и $\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}z$, являющиеся аргументами, соответственно, функций f_1^- и f_2^-, удовлетворяют неравенствам $\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}l_1-2\lambda_1^-t^*<\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}z\le\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+}l_2-2\lambda_1^-t^*$ и $\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+}l_1-2\lambda_2^-t^*<\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}z\le\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}l_2-2\lambda_2^-t^*$. То есть $l_2-2\lambda_2^+t^*\le z<\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}l_1-2\lambda_2^+t^*$.

Тогда, используя для функции f_1^- формулу (2.40), а для функции f_2^- формулу (2.43), получаем:

$$\Phi_2^+(z)=k^0_{1\to2}k^1_{1\to1}\left(k^0_{1\to1}k^1_{1\to1}+k^0_{2\to2}k^2_{2\to2}\right)W_1^+(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+}z+2\lambda_1^+t^*)+$$

$$+\left(k^0_{1\to2}k^0_{2\to1}k^1_{1\to1}+(k^0_{2\to2})^2k^2_{2\to2}\right)W_2^-(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}z+\lambda_2^-t^*)+$$

$$+k^0_{1\to2}\left(k^0_{1\to1}k^1_{1\to1}+k^0_{2\to2}k^2_{2\to2}\right)\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-}-t^*-\frac{z}{\lambda_2^+})+k^0_{1\to2}\nu_1\mu_1(\frac{l_1}{\lambda_1^-}-\frac{z}{\lambda_2^+})+$$

$$+k^0_{2\to2}\nu_2\mu_2(\frac{l_2}{\lambda_2^-}-\frac{z}{\lambda_2^+}), \qquad (2.48)$$

при $l_2-2\lambda_2^+t^*\le z<\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}l_1-2\lambda_2^+t^*$.

Подводя итоги, еще раз отметим, что функция $\Phi_1^-(z)$ на отрезке $[0\,,-2\lambda_1^-t^*)$ определяется:

- формулой (2.22) при $0\le z\le l_1$;
- формулой (2.27) при $l_1<z\le-\lambda_1^-t^*$;

- формулой (2.31) при $-\lambda_1^- t^* < z \le \min\left\{\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} l_1, \frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+} l_2\right\} - 2\lambda_1^- t^*$;
- формулами (2.39), (2.40) при $\min\left\{\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} l_1, \frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+} l_2\right\} - 2\lambda_1^- t^* < z \le \max\left\{\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} l_1, \frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+} l_2\right\} - 2\lambda_1^- t^*$;
- формулой (2.41) при $\max\left\{\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} l_1, \frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+} l_2\right\} - 2\lambda_1^- t^* < z < -2\lambda_1^- t^*$.

Функция $\Phi_2^-(z)$ на отрезке $[0\,, -2\lambda_2^- t^*)$ определяется:

- формулой (2.22) при $0 \le z \le l_2$;
- формулой (2.28) при $l_2 < z \le -\lambda_2^- t^*$;
- формулой (2.32) при $-\lambda_2^- t^* < z \le \min\left\{\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} l_1, \frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} l_2\right\} - 2\lambda_2^- t^*$;
- формулами (2.42), (2.43) при $\min\left\{\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} l_1, \frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} l_2\right\} - 2\lambda_2^- t^* < z \le \max\left\{\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} l_1, \frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} l_2\right\} - 2\lambda_2^- t^*$;
- формулой (2.44) при $\max\left\{\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} l_1\,, \frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} l_2\right\} - 2\lambda_2^- t^* < z \le -2\lambda_2^- t^*$.

Функция $\Phi_1^+(z)$ на отрезке $(l_1 - 2\lambda_1^+ t^*\,, l_1]$ определяется:

- формулой (2.22) при $0 \le z \le l_1$;
- формулой (2.29) при $\max\left\{l_1\,, \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2\right\} - \lambda_1^+ t^* \le z \le 0$;
- формулами (2.34), (2.35) при $\min\left\{l_1\,, \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2\right\} - \lambda_1^+ t^* \le z < \max\left\{l_1\,, \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2\right\} - \lambda_1^+ t^*$;
- формулой (2.33) при $-\lambda_1^+ t^* \le z < \min\left\{l_1\,, \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2\right\} - \lambda_1^+ t^*$;
- формулой (2.45) при $\max\left\{l_1\,, \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2\right\} - 2\lambda_1^+ t^* \le z < -\lambda_1^+ t^*$;
- формулой (2.46) при $l_1 - 2\lambda_1^+ t^* < z < \max\left\{l_1\,, \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} l_2\right\} - 2\lambda_1^+ t^*$.

И, наконец, функция $\Phi_2^+(z)$ на отрезке $(l_2 - 2\lambda_2^+ t^*\,, l_2]$ определяется:

- формулой (2.22) при $0 \le z \le l_2$;
- формулой (2.30) при $\max\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+} l_1 , \quad l_2\right\} - \lambda_2^+ t^* \le z \le 0$;
- формулами (2.37), (2.38) при $\min\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+} l_1 \ , \ l_2\right\} - \lambda_2^+ t^* \le z < \max\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+} l_1 \ , \ l_2\right\} - \lambda_2^+ t^*$;
- формулой (2.36) при $-\lambda_2^+ t^* \le z < \min\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+} l_1 \ , \ l_2\right\} - \lambda_2^+ t^*$;
- формулой (2.47) при $\max\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+} l_1 , l_2\right\} - 2\lambda_2^+ t^* \le z < -\lambda_2^+ t^*$;
- формулой (2.48) при $l_2 - 2\lambda_2^+ t^* < z < \max\left\{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+} l_1 , l_2\right\} - 2\lambda_2^+ t^*$.

В заключение данного пункта отметим, что полученные формулы, определяющие функции Φ_1^+, Φ_1^-, Φ_2^+, Φ_2^-, имеют более простую структуру в следующем частном случае.

Равенство $t_1^* = t_2^* = t^*$, при выполнении которого верны ранее представленные формулы для функций Φ_1^+, Φ_1^-, Φ_2^+, Φ_2^-, оказывается следствием в случае выполнения двух условий. Пусть параметры обоих ребер рассматриваемого графа таковы, что время прохождения бегущей волной, падающей на внутреннюю вершину графа, каждого из двух ребер графа одно и тоже. Пусть, кроме того, время прохождения бегущей волной, уходящей от внутренней вершины графа, каждого из двух ребер графа также одно и тоже. То есть, будем предполагать выполненными два равенства $\frac{l_1}{\lambda_1^-} = \frac{l_2}{\lambda_2^-}$ и $\frac{l_1}{\lambda_1^+} = \frac{l_2}{\lambda_2^+}$, из которых следует $t_1^* = t_2^*$. При сделанных предположениях некоторые из рассмотренных ранее областей изменения переменной z вырождаются в точку и функции Φ_1^+, Φ_1^-, Φ_2^+, Φ_2^- определяются следующими комбинациями формул.

Функция $\Phi_1^-(z)$ на отрезке $[0 , -2\lambda_1^- t^*)$ определяется:

- формулой (2.22) при $0 \le z \le l_1$;
- формулой (2.27) при $l_1 < z \le -\lambda_1^- t^*$;

- формулой (2.31) при $-\lambda_1^- t^* < z \le \frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} l_1 - 2\lambda_1^- t^*$;
- формулой (2.41) при $\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} l_1 - 2\lambda_1^- t^* < z < -2\lambda_1^- t^*$.

Функция $\Phi_2^-(z)$ на отрезке $[0\,, -2\lambda_2^- t^*)$ определяется:

- формулой (2.22) при $0 \le z \le l_2$;
- формулой (2.28) при $l_2 < z \le -\lambda_2^- t^*$;
- формулой (2.32) при $-\lambda_2^- t^* < z \le \frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} l_2 - 2\lambda_2^- t^*$;
- формулой (2.44) при $\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} l_2 - 2\lambda_2^- t^* < z \le -2\lambda_2^- t^*$.

Функция $\Phi_1^+(z)$ на отрезке $(l_1 - 2\lambda_1^+ t^*\,, l_1]$ определяется:

- формулой (2.22) при $0 \le z \le l_1$;
- формулой (2.29) при $l_1 - \lambda_1^+ t^* \le z \le 0$;
- формулой (2.33) при $-\lambda_1^+ t^* \le z < l_1 - \lambda_1^+ t^*$;
- формулой (2.45) при $l_1 - 2\lambda_1^+ t^* \le z < -\lambda_1^+ t^*$.

Функция $\Phi_2^+(z)$ на отрезке $(l_2 - 2\lambda_2^+ t^*\,, l_2]$ определяется:

- формулой (2.22) при $0 \le z \le l_2$;
- формулой (2.30) при $l_2 - \lambda_2^+ t^* \le z \le 0$;
- формулой (2.36) при $-\lambda_2^+ t^* \le z < l_2 - \lambda_2^+ t^*$;
- формулой (2.47) при $l_2 - 2\lambda_2^+ t^* \le z < -\lambda_2^+ t^*$.

4. Постановка и решение разностной задачи для волн скорости на двух "равновременных" ребрах. Как отмечалось в предыдущем пункте, для функции $f_1^+(z)$ на полупрямой $z \le l_1 - 2\lambda_1^+ t^*$ выполнено трехточечное рекуррентное соотношение (2.18) с начальным условием $f_1^+(z) = \Phi_1^+(z)$, заданным на отрезке $(l_1 - 2\lambda_1^+ t^*\,, l_1]$.

Введем на полуоси $z \in (-\infty\,, l_1]$ равномерную разностную сетку с узлами $z_j = -j\,h + z_0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, где $h = \lambda_1^+ t^*$, $l_1 - 2\lambda_1^+ t^* < z_0 \le l_1$.

Введем обозначения $y_j = f_1^+(z_j)$, $g_j = g_1^+(z_j)$, $j = 2, 3, \ldots$, $y_1 = \Phi_1^+(z_1)$, $y_0 = \Phi_1^+(z_0)$. Отметим, что значения y_0 и y_1 заданы.

Тогда рекуррентное соотношение (2.18) в узлах разностной сетки принимает вид

$$\begin{cases} y_j - C\, y_{j-1} + A\, y_{j-2} = g_j\,, \quad j = 2, 3, \ldots \quad , \\ y_0 = \Phi_1^+(z_0)\,, \quad y_1 = \Phi_1^+(z_1)\,, \end{cases} \tag{2.49}$$

где $C = k_{1\to1}^0 k_{1\to1}^1 + k_{2\to2}^2 k_{2\to2}^0$, $A = \det T_g$.

Система (2.49) представляет собой задачу Коши для неоднородного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение задачи (2.49), в соответствии с [3], имеет вид:

$$y_j = B_j^0 y_0 + B_j^1 y_1 - \frac{1}{A}\sum_{n=1}^{j-1} \frac{u_j v_n - u_n v_j}{u_{n-1} v_n - u_n v_{n-1}}\, g_{n+1} \quad , \qquad j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.50}$$

Здесь, в случае $C^2 - 4A > 0$,

$$B_j^0 = \frac{q_1\, q_2\, (\, q_1^{j-1} - q_2^{j-1})}{q_2 - q_1}, \qquad B_j^1 = \frac{q_2^j - q_1^j)}{q_2 - q_1}, \qquad u_n = q_1^n, \qquad v_n = q_2^n,$$

где $q_1 = \dfrac{C + \sqrt{C^2 - 4A}}{2}$, $q_2 = \dfrac{C - \sqrt{C^2 - 4A}}{2}$. Заметим, что $q_1\, q_2 = A = \det T_g$.

В случае $C^2 - 4A = 0$

$$B_j^0 = -(j-1)\, q^j\,, \qquad B_j^1 = j\, q^{j-1}, \quad u_n = q^n\,, \qquad v_n = n\, q^n\,,$$

где $q = \sqrt{A}$.

Если $C^2 - 4A < 0$, то

$$B_j^0 = -q^j\, \frac{\sin((j-1)\varphi)}{\sin(\varphi)}, \qquad B_j^1 = -q^{j-1}\, \frac{\sin(j\varphi)}{\sin(\varphi)}, \quad u_n = q^n \cos(n\,\varphi), \qquad v_n = q^n \sin(n\,\varphi),$$

где $q = \sqrt{A}$ $\qquad \sin(\varphi) = \dfrac{\sqrt{4A - C^2}}{2\,q}$ $\quad \cos(\varphi) = \dfrac{C}{2\,q}$.

Используя (2.50), значение искомой функции $f_1^+(z)$ можно представить следующим образом.

Пусть z произвольное значение из области $z \le l_1 - 2\lambda_1^+ t^*$. Для этого z выберем $z_0 = z + N_1^+ \lambda_1^+ t^*$, где $N_1^+ = \left[-\dfrac{z}{\lambda_1^+ t^*} \right]$ (целая часть числа $\dfrac{-z}{\lambda_1^+ t^*}$). Тогда, выбранное z

является узлом z_j разностной сетки при $j = N_1^+$. Следовательно, $f_1^+(z) = y_{N_1^+}$ и в соответствие с (2.50) и ранее введенными обозначениями получаем следующее представление для функции $f_1^+(z)$:

$$f_1^+(z) = B_{N_1^+}^0 \Phi_1^+(z + N_1^+\lambda_1^+ t^*) + B_{N_1^+}^1 \Phi_1^+(z + (N_1^+ - 1)\lambda_1^+ t^*) -$$

$$-\frac{1}{A}\sum_{n=1}^{N_1^+-1} \frac{u_{N_1^+}v_n - u_n v_{N_1^+}}{u_{n-1}v_n - u_n v_{n-1}} g_1^+(z + (N_1^+ - n - 1)\lambda_1^+ t^*) \qquad (2.51)$$

при $z \le l_1 - 2\lambda_1^+ t^*$.

Решение рекуррентного соотношения (2.20) для функции $f_2^+(z)$ на полупрямой $z \le l_2 - 2\lambda_2^+ t^*$ с начальным условием $f_2^+(z) = \Phi_2^+(z)$, заданным на отрезке $(l_2 - 2\lambda_2^+ t^*, l_2]$, строится аналогично.

Введем на полуоси $z \in (-\infty, l_2]$ равномерную разностную сетку с узлами $z_j = -j\,h + z_0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, где $h = \lambda_2^+ t^*$, $l_2 - 2\lambda_2^+ t^* < z_0 \le l_2$.

Введем обозначения $y_j = f_2^+(z_j)$, $g_j = g_2^+(z_j)$, $j = 2, 3, \ldots$, $y_1 = \Phi_2^+(z_1)$, $y_0 = \Phi_2^+(z_0)$. Значения y_0 и y_1 заданы.

Тогда соотношение (2.20) в узлах введенной разностной сетки принимает вид (2.49). Решением разностной задачи Коши (2.49) является сеточная функция (2.50).

Используя (2.50), значение искомой функции $f_2^+(z)$ можно представить следующим образом.

Пусть z произвольное значение из области $z \le l_2 - 2\lambda_2^+ t^*$. Для этого z выберем $z_0 = z + N_2^+\lambda_2^+ t^*$, где $N_2^+ = \left[-\dfrac{z}{\lambda_2^+ t^*}\right]$ (целая часть числа $\dfrac{-z}{\lambda_2^+ t^*}$). Тогда, выбранное z является узлом z_j разностной сетки при $j = N_2^+$. Следовательно, $f_2^+(z) = y_{N_2^+}$ и в соответствие с (2.50) получаем следующее представление для функции $f_2^+(z)$:

$$f_2^+(z) = B_{N_2^+}^0 \Phi_2^+(z + N_2^+\lambda_2^+ t^*) + B_{N_2^+}^1 \Phi_2^+(z + (N_2^+ - 1)\lambda_2^+ t^*) -$$

$$-\frac{1}{A}\sum_{n=1}^{N_2^+-1} \frac{u_{N_2^+}v_n - u_n v_{N_2^+}}{u_{n-1}v_n - u_n v_{n-1}} g_2^+(z + (N_2^+ - n - 1)\lambda_2^+ t^*) \qquad (2.52)$$

при $z \le l_2 - 2\lambda_2^+ t^*$.

Аналогично и для функции $f_1^-(z)$ решается соотношение (2.19) на полупрямой $z \geq -2\lambda_1^- t^*$ с начальным условием $f_1^-(z) = \Phi_1^-(z)$, заданным на отрезке $[\,0\,, -2\lambda_1^- t^*)$.

Введем на полуоси $z \in [0, +\infty)$ равномерную разностную сетку с узлами $z_j = j\,h + z_0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, где $h = -\lambda_1^- t^*$, $0 \leq z_0 < -2\lambda_1^- t^*$.

Введем обозначения $y_j = f_1^-(z_j)$, $g_j = g_1^-(z_j)$, $j = 2\,, 3\,, \ldots$, $y_1 = \Phi_1^-(z_1)$, $y_0 = \Phi_1^-(z_0)$. Значения y_0 и y_1 заданы.

Тогда соотношение (2.19) в узлах введенной разностной сетки принимает вид (2.49). Решением разностной задачи Коши (2.49) является сеточная функция (2.50).

Используя (2.50), значение искомой функции $f_1^-(z)$ можно представить следующим образом.

Пусть z произвольное значение из области $z \geq -2\lambda_1^- t^*$. Для этого z выберем $z_0 = z + N_1^- \lambda_1^- t^*$, где $N_1^- = \left[-\dfrac{z}{\lambda_1^- t^*} \right]$ (целая часть числа $\dfrac{z}{-\lambda_1^- t^*}$). Тогда, выбранное z является узлом z_j разностной сетки при $j = N_1^-$. Следовательно, $f_1^-(z) = y_{N_1^-}$ и в соответствие с (2.50) получаем следующее представление для функции $f_1^-(z)$:

$$f_1^-(z) = B_{N_1^-}^0 \Phi_1^-(z + N_1^- \lambda_1^- t^*) + B_{N_1^-}^1 \Phi_1^-(z + (N_1^- - 1)\lambda_1^- t^*) -$$

$$- \frac{1}{A} \sum_{n=1}^{N_1^- - 1} \frac{u_{N_1^-} v_n - u_n v_{N_1^-}}{u_{n-1} v_n - u_n v_{n-1}} g_1^-(z + (N_1^- - n - 1)\lambda_1^- t^*) \qquad (2.53)$$

при $z \geq -2\lambda_1^- t^*$.

Теперь, наконец, построим решение соотношения (2.21) для функции $f_2^-(z)$ на полупрямой $z \geq -2\lambda_2^- t^*$ с начальным условием $f_2^-(z) = \Phi_2^-(z)$, заданным на отрезке $[\,0\,, -2\lambda_2^- t^*)$.

Введем на полуоси $z \in [0, +\infty)$ равномерную разностную сетку с узлами $z_j = j\,h + z_0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, где $h = -\lambda_2^- t^*$, $0 \leq z_0 < -2\lambda_2^- t^*$.

Введем обозначения $y_j = f_2^-(z_j)$, $g_j = g_2^-(z_j)$, $j = 2\,, 3\,, \ldots$, $y_1 = \Phi_2^-(z_1)$, $y_0 = \Phi_2^-(z_0)$. Значения y_0 и y_1 заданы.

Тогда соотношение (2.21) в узлах введенной разностной сетки принимает вид (2.49). Решением разностной задачи Коши (2.49) является сеточная функция (2.50).

Используя (2.50), значение искомой функции $f_2^-(z)$ можно представить следующим образом.

Пусть z произвольное значение из области $z \geq -2\lambda_2^- t^*$. Для этого z выберем $z_0 = z + N_2^- \lambda_2^- t^*$, где $N_2^- = \left[-\dfrac{z}{\lambda_2^- t^*} \right]$ (целая часть числа $\dfrac{z}{-\lambda_2^- t^*}$). Тогда, выбранное z является узлом z_j разностной сетки при $j = N_2^-$. Следовательно, $f_2^-(z) = y_{N_2^-}$ и в соответствие с (2.50) получаем следующее представление для функции $f_2^-(z)$:

$$f_2^-(z) = B_{N_2^-}^0 \Phi_2^-(z + N_2^- \lambda_2^- t^*) + B_{N_2^-}^1 \Phi_2^-(z + (N_2^- - 1)\lambda_2^- t^*) -$$

$$- \frac{1}{A} \sum_{n=1}^{N_2^- - 1} \frac{u_{N_2^-} v_n - u_n v_{N_2^-}}{u_{n-1} v_n - u_n v_{n-1}} g_2^-(z + (N_2^- - n - 1)\lambda_2^- t^*) \qquad (2.54)$$

при $z \geq -2\lambda_2^- t^*$.

В заключение данного параграфа отметим, что полученные аналитические выражения (2.51) - (2.54) позволяют сделать некоторые выводы о характере поведения во времени амплитуд волн скорости на графе из двух "равновременных" рёбер.

В выражения для $B_N^{0,1}$ входит q, являющееся корнем характеристического уравнения, соответствующего разностному уравнению второго порядка (2.49), в виде q^N. Здесь либо $q = \dfrac{C \pm \sqrt{C^2 - 4A}}{2}$, либо $q = \sqrt{A}$, а параметр N принимает одно из четырех значений $N_{1,2}^{\pm}$. Так как с увеличением времени распространения волн, значения $N_{1,2}^{\pm}$ не ограничено растут, то в случае $|q| > 1$ будет не ограничено расти во времени и $\left| B_N^{0,1} \right|$, что, в соответствие с (2.51) - (2.54), приводит к неограниченному во времени росту амплитуд волн скорости $f_{1,2}^{\pm}$.

Если $|q| \leq 1$ для всех корней характеристического уравнения и функции, заданные в граничных вершинах, не периодичны с периодом $T_k = \dfrac{t^*}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$, то амплитуды волн скорости остаются ограниченными в процессе их распространения.

Если же $\max q = 1$ и хотя бы одна из функций, заданных в граничных вершинах, периодична с периодом $T_k = \dfrac{t^*}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$, то возникает резонанс. При этом амплитуда волн скорости линейно растет во времени.

Отметим так же, что, так как $|q_1||q_2| = |A|$, то достаточным условием неограниченного роста во времени амплитуд волн скорости является выполнение неравенства $|A| = |\det T_g| > 1$.

5. Решение краевой задачи на графе из двух ребер с кратными "характерными" временами. Пусть параметры обоих ребер рассматриваемого графа таковы, что времена прохождения бегущих волн по каждому из двух ребер в обоих направлениях удовлетворяют соотношению $\frac{t_2^*}{t_1^*} = \frac{m}{n}$, $n, m = 1, 2, \ldots$, $(m \geq n)$.

Тогда (2.14)-(2.17) принимают вид следующих рекуррентных соотношений.

Для функции f_1^+:

$$\begin{aligned} f_1^+(z) = k_{1\to1}^1 k_{1\to1}^0 f_1^+(z + \lambda_1^+ t_1^*) + k_{2\to2}^2 k_{2\to2}^0 f_1^+(z + m\lambda_1^+ \frac{t_1^*}{n}) - \\ - \det T_g \cdot f_1^+(z + (m+n)\lambda_1^+ \frac{t_1^*}{n}) + g_1^+(z), \end{aligned} \tag{2.55}$$

где

$$g_1^+(z) = k_{1\to1}^0 \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - \frac{z}{\lambda_1^+}) - \det T^0 \, k_{2\to2}^2 \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - t_2^* - \frac{z}{\lambda_1^+}) + k_{2\to1}^0 \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^-} - \frac{z}{\lambda_1^+})$$

и $\quad z \leq l_1 - \lambda_1^+ (t_1^* + t_2^*)$.

Для функции f_1^-:

$$\begin{aligned} f_1^-(z) = k_{1\to1}^1 k_{1\to1}^0 f_1^-(z + \lambda_1^- t_1^*) + k_{2\to2}^2 k_{2\to2}^0 f_1^-(z + m\lambda_1^- \frac{t_1^*}{n}) - \\ - \det T_g \cdot f_1^-(z + (m+n)\lambda_1^- \frac{t_1^*}{n}) + g_1^-(z), \end{aligned} \tag{2.56}$$

где

$$\begin{aligned} g_1^-(z) = \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^+} - t_1^* - \frac{z}{\lambda_1^-}) - k_{2\to2}^0 \, k_{2\to2}^2 \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^+} - t_1^* - t_2^* - \frac{z}{\lambda_1^-}) + \\ + k_{2\to1}^0 k_{1\to1}^1 \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^-} - t_1^* - \frac{z}{\lambda_1^-}) \end{aligned}$$

и $\quad z \geq -\lambda_1^- (t_1^* + t_2^*)$.

Для функции f_2^+:

$$f_2^+(z) = k_{1\to1}^1 k_{1\to1}^0 f_2^+(z+\lambda_2^+ t_1^*) + k_{2\to2}^2 k_{2\to2}^0 f_2^+(z+m\lambda_2^+ \frac{t_1^*}{n}) - \\ - \det T_g \cdot f_2^+(z+(m+n)\lambda_2^+ \frac{t_1^*}{n}) + g_2^+(z), \tag{2.57}$$

где $g_2^+(z) = k_{1\to2}^0 \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - \frac{z}{\lambda_2^+}) - \det T^0 \; k_{1\to1}^1 \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^-} - t_1^* - \frac{z}{\lambda_2^+}) + k_{2\to2}^0 \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^-} - \frac{z}{\lambda_2^+})$

и $\quad z \le l_2 - \lambda_2^+ t_1^* - \lambda_2^+ t_2^*$.

Для функции f_2^-:

$$f_2^-(z) = k_{1\to1}^1 k_{1\to1}^0 f_2^-(z+\lambda_2^- t_1^*) + k_{2\to2}^2 k_{2\to2}^0 f_2^-(z+m\lambda_2^- \frac{t_1^*}{n}) - \\ - \det T_g \cdot f_2^-(z+(m+n)\lambda_2^- \frac{t_1^*}{n}) + g_2^-(z), \tag{2.58}$$

где

$$g_2^-(z) = \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^+} - t_2^* - \frac{z}{\lambda_2^-}) - k_{1\to1}^0 \; k_{1\to1}^1 \nu_2 \mu_2 (\frac{l_2}{\lambda_2^+} - t_1^* - t_2^* - \frac{z}{\lambda_2^-}) + \\ + k_{1\to2}^0 k_{2\to2}^2 \nu_1 \mu_1 (\frac{l_1}{\lambda_1^-} - t_2^* - \frac{z}{\lambda_2^-})$$

и $\quad z \ge -\lambda_2^-(t_1^* + t_2^*)$.

Из формул (2.55)-(2.58) следует, что для нахождения значений функций f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^- на всей области их определения достаточно знать значения функции f_1^+ на отрезке $(l_1 - \lambda_1^+(t_1^* + t_2^*), l_1]$, значения функции f_1^- на отрезке $[0, -2\lambda_1^-(t_1^* + t_2^*))$, значения функции f_2^+ на отрезке $(l_2 - \lambda_2^+(t_1^* + t_2^*), l_2]$ и значения функции f_2^- на отрезке $[0, -2\lambda_2^-(t_1^* + t_2^*))$.

Функции f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^-, которые обозначим как Φ_1^+, Φ_1^-, Φ_2^+, Φ_2^-, соответственно, на данных начальных отрезках определяются с помощью метода продолжений по схеме, описанной в пункте 3 данного параграфа. Будем считать их известными функциями переменной z.

Рассмотрим рекуррентное соотношение для функции f_1^+, дополненное начальными условиями:

$$\begin{cases} f_1^+(z) = k_{1\to1}^1 k_{1\to1}^0 f_1^+(z+\lambda_1^+ t_1^*) + k_{2\to2}^2 k_{2\to2}^0 f_1^+(z+m\lambda_1^+ \dfrac{t_1^*}{n}) - \\ \qquad - \det T_g \cdot f_1^+(z+(m+n)\lambda_1^+ \dfrac{t_1^*}{n}) + g_1^+(z), \quad z \le l_1 - \lambda_1^+(t_1^* + t_2^*), \\ f_1^+(z) = \Phi_1^+(z), \quad l_1 - \lambda_1^+(t_1^* + t_2^*) < z \le l_1. \end{cases} \tag{2.59}$$

Введем на полуоси $(-\infty, l_1]$ равномерную разностную сетку с узлами $z_j = -jh + z_0$, $j = 0,1,2,...$, где $h = \dfrac{1}{n}\lambda_1^+ t_1^*$, $l_1 - \dfrac{1}{n}\lambda_1^+ t_1^* \le z_0 \le l_1$.

Обозначим $y_j = f_1^+(z_j)$, $g_j = g_1^+(z_j)$. Отметим, что $y_0 = \Phi_1^+(z_0)$, $y_1 = \Phi_1^+(z_1)$,…, $y_{m+n-1} = \Phi_1^+(z_{m+n-1})$ известны.

Тогда система (2.59), записанная в узлах разностной сетки, принимает следующий вид:

$$\begin{cases} y_j - k_{1\to1}^1 k_{1\to1}^0 y_{j-n} - k_{2\to2}^2 k_{2\to2}^0 y_{j-m} + \det T_g y_{j-m-n} = g_{j-m-n} \quad , \quad j \ge n+m, \\ y_0 = \Phi_1^+(z_0) \quad , \\ y_1 = \Phi_1^+(z_1) \quad , \\ ... \\ y_{m+n-1} = \Phi_1^+(z_{m+n-1}) \quad . \end{cases} \tag{2.60}$$

Это задача Коши для неоднородного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами порядка $m+n$. Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (2.60), имеет вид

$$q^{m+n} - k_{1\to1}^1 k_{1\to1}^0 q^m - k_{2\to2}^2 k_{2\to2}^0 q^n + \det T_g = 0 . \tag{2.61}$$

Пусть q_i - корень уравнения (2.61) кратности d_i, $1 \le i \le s$, $d_1 + ... + d_s = m+n$.

Известно [2], что решение уравнения (2.61) имеет вид

$$y_j = \bar{y}_j + \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=0}^{d_i-1} a_k^i j^k\right) q_i^j , \tag{2.62}$$

где a_k^i - константы, определяемые через начальные значения y_0, y_1,…, y_{m+n-1}, а $\bar{y}_j$ - частное решение неоднородного уравнения (2.60).

Рассмотрим соотношение (2.62), которое дает значения функции f_1^+ в точках z_j. Это соотношение представляет собой сумму степеней некратных корней характеристического уравнения и сумму слагаемых вида $j^k q_i^j$ для кратных корней. Таким образом, из (2.62) следует, что если все корни характеристического уравнения

(2.61) по модулю не больше единицы и нет кратных корней по модулю равных единице, то функция f_1^+ является ограниченной. Если хотя бы один из корней характеристического уравнения по модулю больше единицы или существуют кратные корни, по модулю равные единице, то функция f_1^+ оказывается неограниченной.

Заметим, что согласно теореме Виета $q_1^{d_1} ... q_s^{d_s} = (-1)^{m+n} \det T_g$. Поэтому, если $\left|\det T_g\right| > 1$, то хотя бы один из корней уравнения (2.61) по модулю больше единицы. Таким образом, ранее сформулированное достаточное условие неограниченности функции f_1^+ справедливо и в случае двух ребер с кратными "характерными" временами.

Так как коэффициенты в рекуррентных соотношениях для функций f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^- одинаковы, то соответствующие характеристические уравнения для функций f_1^-, f_2^+, f_2^-, совпадают с уравнением (2.61). Поэтому достаточное условие неограниченного роста амплитуды бегущей волны f_1^+ справедливо для всех функций f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^-.

В заключение заметим, что в данном параграфе установлена возможность существования на графе из двух ребер двух режимов эволюции колебаний давления и скорости пульсовых волн. В одном режиме амплитуда колебаний является ограниченной во времени, а во втором амплитуда колебаний растет неограниченно.

§3. Краевая задача на графе «тройник».

1. Постановка краевой задачи. Рассмотрим граф, состоящий из трех ограниченных ребер, соединяющихся в одной вершине. Граф такого типа назовем «тройник». «Тройник» является одним из основных элементов графа сосудов кровеносной системы и его изучение представляет определенный интерес.

Пронумеруем ребра и вершины как указано на рис. 5. Как и в §2, на каждом ребре введем свою систему координат, начало которой на каждом ребре, без ограничения общности рассмотрения, совместим с внутренней вершиной, имеющей номер 0. Вершины 1, 2 и 3 являются граничными вершинами графа.

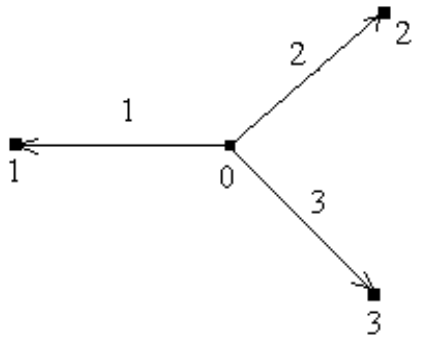


Рис. 5

Постановка краевой задачи на графе "тройник" практически совпадает с постановкой задачи в случае двух ребер. На каждом ребре графа (см. рис. 5) предполагаются выполненными однородные ЛГД уравнения:

$$p_{it} + \overline{u}_i p_{ix_i} + \rho \overline{c}_i^2 u_{ix_i} = 0,$$

$$u_{it} + \frac{1}{\rho} p_{ix_i} + \overline{u}_i u_{ix_i} = 0, \qquad 0 < x_i < l_i, \qquad t > 0, \quad i = 1,2,3, \tag{3.1}$$

а в момент времени $t = 0$ начальные условия

$$p_i(x_i,0) = \varphi_i(x_i), \qquad u_i(x_i,0) = \psi_i(x_i), \qquad 0 \le x_i \le l_i, \qquad i = 1,2,3. \tag{3.2}$$

В граничных вершинах графа предполагаются выполненными условия:

$$\begin{aligned} &\alpha_1^1 p_1(l_1,t) + \beta_1^1 u_1(l_1,t) = \mu_1(t), \\ &\alpha_2^2 p_2(l_2,t) + \beta_2^2 u_2(l_2,t) = \mu_2(t), \\ &\alpha_3^3 p_3(l_3,t) + \beta_3^3 u_3(l_3,t) = \mu_3(t), \quad t \ge 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

которые являются результатом линеаризации граничных условий.

Во внутренней вершине графа выполнены дополнительные условия сопряжения вида:

$$\sum_{j=1}^{3} \bar{s}_j u_j(0,t) + \bar{\theta}_j \bar{u}_j p_j(0,t) = 0, \tag{3.4}$$

$$\alpha_1^0 p_1(0,t) + \beta_1^0 u_1(0,t) = \alpha_2^0 p_2(0,t) + \beta_2^0 u_2(0,t) = \alpha_3^0 p_3(0,t) + \beta_3^0 u_3(0,t), \tag{3.5}$$

где $t \geq 0$.

2. Метод продолжений в применении к краевой задаче на графе «тройник». Как и в §2, представим общее решение ЛГД уравнений (3.1) на каждом i-ом ребре графа в виде комбинации двух бегущих волн произвольной формы, одна из которых f_i^+ распространяется по направлению ребра (волна, уходящая от внутренней вершины 0), а вторая f_i^- распространяется в противоположном направлении (волна, падающая на внутреннюю вершину 0):

$$p_i(x_i,t) = \frac{\rho \bar{c}_i}{2}\left(f_i^+(x_i - \lambda_i^+ t) - f_i^-(x_i - \lambda_i^- t)\right),$$

$$u_i(x_i,t) = \frac{1}{2}\left(f_i^+(x_i - \lambda_i^+ t) + f_i^-(x_i - \lambda_i^- t)\right), \tag{3.6}$$

где $\lambda_i^+ = \bar{u}_i + \bar{c}_i > 0$, $\lambda_i^- = \bar{u}_i - \bar{c}_i < 0$, (т.к. $|\bar{u}_i| < \bar{c}_i$), $i = 1,2,3$.

Конкретный вид функций f_i^+ и f_i^- на области определения каждой из них подбирается так, чтобы выполнялись заданные начальные условия, условия сопряжения и граничные условия (3.2) - (3.5).

Для рассматриваемой задачи при условии $0 \leq x_i \leq l_i$ и $t \geq 0$ областью определения функции $f_i^+(x_i - \lambda_i^+ t)$ является полуось $(-\infty, l_i]$, а область определения функции $f_i^-(x_i - \lambda_i^- t)$ представляет собой полуось $[0, +\infty)$.

Подстановка формул (3.6) в начальные условия (3.2) дает соотношения

$$f_i^+(x_i) = \frac{1}{\rho \bar{c}_i}\varphi_i(x_i) + \psi_i(x_i),$$

$$f_i^-(x_i) = -\frac{1}{\rho \bar{c}_i}\varphi_i(x_i) + \psi_i(x_i), \qquad 0 \leq x_i \leq l_i, \qquad i = 1,2,3, \tag{3.7}$$

определяющие функции f_i^+ и f_i^- на отрезках $[0, l_i]$, являющихся частью их областей определения.

Для нахождения функций f_i^+ и f_i^- на оставшихся частях их областей определения воспользуемся, как и ранее, условиями сопряжения (3.4), (3.5) и граничными условиями (3.3).

Как и прежде, в левых частях получающихся соотношений будем собирать величины, которые для данной вершины соответствуют уходящим от нее волнам, а в правых частях группировать величины, которые соответствуют падающим на данную вершину волнам.

Подстановка формул (3.6) в граничные условия (3.3) дает

$$f_i^-(l_i - \lambda_i^- t) = \nu_i \mu_i(t) + k_{i\to i}^i f_i^+(l_i - \lambda_i^+ t), \qquad t \ge 0,$$

$$i = 1,2,3,$$

(3.8)

где $k_{i\to i}^i = \dfrac{\alpha_i^i \rho\bar{c}_i + \beta_i^i}{\alpha_i^i \rho\bar{c}_i - \beta_i^i}$ - коэффициент отражения волны f_i^+ от вершины с номером «i», $\nu_i = \dfrac{2}{\beta_i^i - \alpha_i^i \rho\bar{c}_i}$.

Из условий сопряжения (3.4), (3.5) следует:

$$(\bar{s}_1 + \bar{\theta}_1\bar{u}_1\rho\bar{c}_1) f_1^+(-\lambda_1^+ t) + (\bar{s}_2 + \bar{\theta}_2\bar{u}_2\rho\bar{c}_2) f_2^+(-\lambda_2^+ t) + (\bar{s}_3 + \bar{\theta}_3\bar{u}_3\rho\bar{c}_3) f_3^+(-\lambda_3^+ t) =$$
$$-(\bar{s}_1 - \bar{\theta}_1\bar{u}_1\rho\bar{c}_1) f_1^-(-\lambda_1^- t) - (\bar{s}_2 - \bar{\theta}_2\bar{u}_2\rho\bar{c}_2) f_2^-(-\lambda_2^- t) - (\bar{s}_3 - \bar{\theta}_3\bar{u}_3\rho\bar{c}_3) f_3^-(-\lambda_3^- t),$$

$$(\alpha_1^0\rho\bar{c}_1 + \beta_1^0) f_1^+(-\lambda_1^+ t) - (\alpha_2^0\rho\bar{c}_2 + \beta_2^0) f_2^+(-\lambda_2^+ t) = (\alpha_1^0\rho\bar{c}_1 - \beta_1^0) f_1^-(-\lambda_1^- t) -$$
$$-(\alpha_2^0\rho\bar{c}_2 - \beta_2^0) f_2^-(-\lambda_2^- t),$$

$$(\alpha_1^0\rho\bar{c}_1 + \beta_1^0) f_1^+(-\lambda_1^+ t) - (\alpha_3^0\rho\bar{c}_3 + \beta_3^0) f_3^+(-\lambda_3^+ t) = (\alpha_1^0\rho\bar{c}_1 - \beta_1^0) f_1^-(-\lambda_1^- t) -$$
$$-(\alpha_3^0\rho\bar{c}_3 - \beta_3^0) f_3^-(-\lambda_3^- t), \qquad t \ge 0.$$

Решая эту систему из трех уравнений относительно функций f_i^+, которые являются волнами, уходящими от вершины с номером 0, получаем:

$$f_1^+(-\lambda_1^+ t) = k_{1\to 1}^0 f_1^-(-\lambda_1^- t) + k_{2\to 1}^0 f_2^-(-\lambda_2^- t) + k_{3\to 1}^0 f_3^-(-\lambda_3^- t),$$

$$f_2^+(-\lambda_2^+ t) = k_{1\to 2}^0 f_1^-(-\lambda_1^- t) + k_{2\to 2}^0 f_2^-(-\lambda_2^- t) + k_{3\to 2}^0 f_3^-(-\lambda_3^- t), \qquad (3.9)$$

$$f_3^+(-\lambda_3^+ t) = k_{1\to 3}^0 f_1^-(-\lambda_1^- t) + k_{2\to 3}^0 f_2^-(-\lambda_2^- t) + k_{3\to 3}^0 f_3^-(-\lambda_3^- t), \qquad t \ge 0,$$

где $k_{i\to j}^0$ $(i, j = 1,2,3)$ – транспортные коэффициенты [11] для вершины с номером 0.

Как и в случае графа из двух ребер, для компактного представления формул (3.8), (3.9) удобно воспользоваться векторной формой записи:

$$V = T_g \widetilde{V} + GM \ .$$

(3.10)

Здесь вектора

$$V = \left(f_1^+(-\lambda_1^+ t), f_2^+(-\lambda_2^+ t), f_3^+(-\lambda_3^+ t), f_1^-(l_1 - \lambda_1^- t), f_2^-(l_2 - \lambda_2^- t), f_3^-(l_3 - \lambda_3^- t)\right)^T,$$

$$\widetilde{V} = \left(f_1^-(-\lambda_1^- t), f_2^-(-\lambda_2^- t), f_3^-(-\lambda_3^- t), f_1^+(l_1 - \lambda_1^+ t), f_2^+(l_2 - \lambda_2^+ t), f_3^+(l_3 - \lambda_3^+ t)\right)^T,$$

$$M = \left(0,0,0,\mu_1(t),\mu_2(t),\mu_3(t)\right)^T,$$

и матрицы

$$T_g = \begin{pmatrix} k_{1\to1}^0 & k_{2\to1}^0 & k_{3\to1}^0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{1\to2}^0 & k_{2\to2}^0 & k_{3\to2}^0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{1\to3}^0 & k_{2\to3}^0 & k_{3\to3}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{1\to1}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{2\to2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{3\to3}^3 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_3 \end{pmatrix}.$$

Элементами матрицы T_g являются транспортные коэффициенты для всех вершин рассматриваемого графа. Заметим, что как и в случае графа из двух ребер, матрица T_g может быть представлена в блочном виде:

$$T_g = \left(\begin{array}{c|c|c|c} T^0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & T^1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & T^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & T^3 \end{array}\right),$$ где

$T^0 = \begin{pmatrix} k_{1\to1}^0 & k_{2\to1}^0 & k_{3\to1}^0 \\ k_{1\to2}^0 & k_{2\to2}^0 & k_{3\to2}^0 \\ k_{1\to3}^0 & k_{2\to3}^0 & k_{3\to3}^0 \end{pmatrix}$ - матрица транспортных коэффициентов вершины с номером 0;

$T^1 = \left(k^1_{1\to1}\right)$ - матрица транспортных коэффициентов вершины с номером 1;

$T^2 = \left(k^2_{2\to2}\right)$ - матрица транспортных коэффициентов вершины с номером 2;

$T^3 = \left(k^3_{3\to3}\right)$ - матрица транспортных коэффициентов вершины с номером 3.

Если соблюсти в векторах V и $\widetilde{V}$ одинаковый порядок следования компонент-функций, то уравнения (3.8) и (3.9) в векторной форме будут записываться с помощью матрицы T, полученной из матрицы T_g перестановкой строк и столбцов. Например, для заданного в векторе V порядка следования компонент матрица T будет иметь вид:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k^0_{1\to1} & k^0_{2\to1} & k^0_{3\to1} \\ 0 & 0 & 0 & k^0_{1\to2} & k^0_{2\to2} & k^0_{3\to2} \\ 0 & 0 & 0 & k^0_{1\to3} & k^0_{2\to3} & k^0_{3\to3} \\ k^1_{1\to1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2_{2\to2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^3_{3\to3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вернемся к построению решения уравнений (3.8), (3.9). Эти соотношения представляют собой систему шести функциональных уравнений относительно шести функций. Решим эту систему относительно каждой из функций. При этом предположим, что значение переменной t в формулах (3.8), (3.9) достаточно велико, так что в ходе всех последующих преобразований мы не выходим за границы областей определения функций $f_i^{\pm}$, $i = 1,2,3$.

Начнем с вывода рекуррентного соотношения для функции f_1^+. Сделаем в соотношениях (3.8) замену переменных $z = l_i - \lambda_i^- t$. В результате получим:

$$f_i^-(z) = \nu_i \mu_i \left(-\frac{z}{\lambda_i^-} + \frac{l_i}{\lambda_i^-}\right) + k^i_{i\to i} f_i^+\left(\frac{\lambda_i^+}{\lambda_i^-} z + t_i^*\right), \qquad i = 1,2,3. \tag{3.11}$$

В соотношениях (3.9) также заменим в формуле для функции f_i^+ комбинацию $-\lambda_i^+ t$ на переменную z:

$$f_1^+(z) = k^0_{1\to1} f_1^-\left(\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+} z\right) + k^0_{2\to1} f_2^-\left(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+} z\right) + k^0_{3\to1} f_3^-\left(\frac{\lambda_3^-}{\lambda_1^+} z\right),$$

$$f_2^+(z) = k^0_{1\to2} f_1^-\left(\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^+} z\right) + k^0_{2\to2} f_2^-\left(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} z\right) + k^0_{3\to2} f_3^-\left(\frac{\lambda_3^-}{\lambda_2^+} z\right), \tag{3.12}$$

$$f_3^+(z) = k_{1\to 3}^0 f_1^-(\frac{\lambda_1^-}{\lambda_3^+}z) + k_{2\to 3}^0 f_2^-(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_3^+}z) + k_{3\to 3}^0 f_3^-(\frac{\lambda_3^-}{\lambda_3^+}z).$$

Теперь в соотношения (3.12) подставим выражения (3.11) для функций f_i^-. В результате от исходной системы из шести функциональных уравнений с шестью неизвестными функциями переходим к системе из трех уравнений с тремя неизвестными функциями:

$$f_1^+(z) = a_{11} f_1^+(z+\lambda_1^+ t_1^*) + a_{12} f_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}z + \lambda_2^+ t_2^*) + a_{13} f_3^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}z + \lambda_3^+ t_3^*) + \xi_1^+(z),$$

$$f_2^+(z) = a_{21} f_1^+(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+}z + \lambda_1^+ t_1^*) + a_{22} f_2^+(z+\lambda_2^+ t_2^*) + a_{23} f_3^+(\frac{\lambda_3^+}{\lambda_2^+}z + \lambda_3^+ t_3^*) + \xi_2^+(z), \qquad (3.13)$$

$$f_3^+(z) = a_{31} f_1^+(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_3^+}z + \lambda_1^+ t_1^*) + a_{12} f_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_3^+}z + \lambda_2^+ t_2^*) + a_{13} f_3^+(z+\lambda_3^+ t_3^*) + \xi_3^+(z),$$

где введены обозначения

$$a_{ij} = k_{j\to i}^0 k_{j\to j}^j, \qquad i,j = 1,2,3,$$

$$\xi_i^+(z) = \sum_{j=1}^3 \nu_j k_{j\to i}^0 \mu_j (-\frac{z}{\lambda_i^+} + \frac{l_j}{\lambda_j^-}), \qquad i = 1,2,3.$$

Вычтем выражение $\sum_{j=1}^3 a_{jj} f_1^+(z+\lambda_1^+ t_j^*)$ из обеих частей первого из соотношений (3.13). Тогда получим:

$$f_1^+(z) - \sum_{j=1}^3 a_{jj} f_1^+(z+\lambda_1^+ t_j^*) = a_{12} f_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}z + \lambda_2^+ t_2^*) + a_{13} f_3^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}z + \lambda_3^+ t_3^*) -$$
$$- a_{22} f_1^+(z+\lambda_1^+ t_2^*) - a_{33} f_1^+(z+\lambda_1^+ t_3^*) + \xi_1^+(z). \qquad (3.14)$$

Рассмотрим соотношения (3.13) заменяя в j-ом уравнении аргумент z на аргумент $\frac{\lambda_j^+}{\lambda_1^+}z + \lambda_j^+ t_j^*$, $j = 2,3$. Также рассмотрим функцию f_1^+ от аргументов $z+\lambda_1^+ t_j^*$, $j = 2,3$. Подставим получающиеся при этом представления для функций $f_j(\frac{\lambda_j^+}{\lambda_1^+}z + \lambda_j^+ t_j^*)$ и $f_1^+(z+\lambda_1^+ t_j^*)$ в правую часть соотношения (3.14). В результате получим:

$$f_1^+(z)-\sum_{j=1}^{3}a_{jj}f_1^+(z+\lambda_1^+t_j^*)=a_{12}a_{21}f_1^+(z+\lambda_1^+(t_1^*+t_2^*))+a_{12}a_{23}f_3^+(\frac{\lambda_3^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_3^+(t_2^*+t_3^*))+$$
$$+a_{13}a_{31}f_1^+(z+\lambda_1^+(t_1^*+t_3^*))+a_{13}a_{32}f_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_2^+(t_2^*+t_3^*))-a_{11}a_{22}f_1^+(z+\lambda_1^+(t_1^*+t_2^*))-$$
$$-a_{22}a_{13}f_3^+(\frac{\lambda_3^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_3^+(t_2^*+t_3^*))-a_{11}a_{33}f_1^+(z+\lambda_1^+(t_1^*+t_3^*))-a_{33}a_{12}f_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_2^+(t_2^*+t_3^*))+ \quad (3.15)$$
$$+a_{12}\xi_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_2^+t_2^*)+a_{13}\xi_3^+(\frac{\lambda_3^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_3^+t_3^*)-a_{22}\xi_1^+(z+\lambda_1^+t_2^*)-a_{33}\xi_1^+(z+\lambda_1^+t_3^*)+\xi_1^+(z).$$

Перенесем в соотношении (3.15) все слагаемые, содержащие функцию f_1^+, в левую часть равенства. Это дает:

$$f_1^+(z)-\sum_{j=1}^{3}a_{jj}f_1^+(z+\lambda_1^+t_j^*)+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})f_1^+(z+\lambda_1^+(t_1^*+t_2^*))+$$
$$+(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})f_1^+(z+\lambda_1^+(t_1^*+t_3^*))=(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})f_3^+(\frac{\lambda_3^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_3^+(t_2^*+t_3^*))+ \quad (3.16)$$
$$+(a_{13}a_{32}-a_{33}a_{12})f_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_2^+(t_2^*+t_3^*))+a_{12}\xi_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_2^+t_2^*)+a_{13}\xi_3^+(\frac{\lambda_3^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_3^+t_3^*)-$$
$$-a_{22}\xi_1^+(z+\lambda_1^+t_2^*)-a_{33}\xi_1^+(z+\lambda_1^+t_3^*)+\xi_1^+(z).$$

Добавим к обеим частям соотношения (3.16) выражение $(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})f_1^+(z+\lambda_1^+(t_2^*+t_3^*))$. Тогда получим следующее соотношение:

$$f_1^+(z)-\sum_{j=1}^{3}a_{jj}f_1^+(z+\lambda_1^+t_j^*)+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}(a_{ii}a_{jj}-a_{ij}a_{ji})f_1^+(z+\lambda_1^+(t_i^*+t_j^*))=$$
$$=(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})f_1^+(z+\lambda_1^+(t_2^*+t_3^*))+(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})f_3^+(\frac{\lambda_3^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_3^+(t_2^*+t_3^*))+ \quad (3.17)$$
$$+(a_{13}a_{32}-a_{33}a_{12})f_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_2^+(t_2^*+t_3^*))+a_{12}\xi_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_2^+t_2^*)+a_{13}\xi_3^+(\frac{\lambda_3^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_3^+t_3^*)-$$
$$-a_{22}\xi_1^+(z+\lambda_1^+t_2^*)-a_{33}\xi_1^+(z+\lambda_1^+t_3^*)+\xi_1^+(z).$$

Рассмотрим выражения (3.13) от аргументов $z+\lambda_1^+(t_2^*+t_3^*)$, $\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_2^+(t_2^*+t_3^*)$, $\frac{\lambda_3^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_3^+(t_2^*+t_3^*)$, соответственно. После подстановки получающихся выражений в правую часть соотношения (3.17) и приведения подобных слагаемых мы получим рекуррентное соотношение для функции $f_1^+(z)$:

$$f_1^+(z)-\sum_{j=1}^{3}a_{jj}f_1^+(z+\lambda_1^+t_j^*)+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}(a_{ii}a_{jj}-a_{ij}a_{ji})f_1^+(z+\lambda_1^+(t_i^*+t_j^*))-$$
$$-(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{21}a_{12}a_{33}- \qquad (3.18)$$
$$-a_{32}a_{23}a_{11})f_1^+(z+\lambda_1^+(t_1^*+t_2^*+t_3^*))=g_1^+(z),$$

где

$$g_1^+(z)=(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})\xi_1^+(z+\lambda_1^+(t_2^*+t_3^*))+(a_{13}a_{32}-a_{33}a_{12})\xi_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_2^+(t_2^*+t_3^*))+$$
$$+(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})\xi_3^+(\frac{\lambda_3^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_3^+(t_2^*+t_3^*))+a_{12}\xi_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_2^+t_2^*)+a_{13}\xi_3^+(\frac{\lambda_3^+}{\lambda_1^+}z+\lambda_3^+t_3^*)-$$
$$-a_{22}\xi_1^+(z+\lambda_1^+t_2^*)-a_{33}\xi_1^+(z+\lambda_1^+t_3^*)+\xi_1^+(z).$$

Соотношение (3.18) допускает и другую форму записи. Можно убедиться в том, что в соотношении (3.18) коэффициенты при слагаемых содержащих $f_1^+(z+\lambda_1^+t_j^*)$ и $f_1^+(z+\lambda_1^+(t_i^*+t_j^*))$ представляют собой комбинации миноров матрицы T, а коэффициент, стоящий при слагаемом содержащем $f_1^+(z+\lambda_1^+(t_1^*+t_2^*+t_3^*))$, есть определитель матрицы T. Таким образом соотношение (3.18) записывается в виде:

$$f_1^+(z)-\sum_{j=1}^{3}M_{j(3+j)}^{j(3+j)}f_1^+(z+\lambda_1^+t_j^*)+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}M_{ij(3+i)(3+j)}^{ij(3+i)(3+j)}f_1^+(z+\lambda_1^+(t_i^*+t_j^*))-$$
$$-\det T\times f_1^+(z+\lambda_1^+(t_1^*+t_2^*+t_3^*))=g_1^+(z).$$

Здесь $M_{i_1\ldots i_m}^{i_1\ldots i_m}$ - минор матрицы T, расположенный на пересечении строк и столбцов с номерами $i_1,\ldots,i_m$.

Из формулы (3.18) следует, что значение функции f_1^+ в произвольной точке $z\le l_1-\lambda_1^+(t_1^*+t_2^*+t_3^*)$ выражается через значения этой же функции в других семи точках, лежащих на оси z правее. К этому добавляется вклад граничных режимов, определяемых функциями μ_1, μ_2, μ_3.

Соотношения для остальных функций f_2^+, f_3^+, f_1^-, f_2^-, f_3^- выводятся аналогично. Приведем их здесь без доказательства.

Для функций $f_i^+(z)$ справедливы соотношения:

$$f_i^+(z)-\sum_{j=1}^{3}M_{j(3+j)}^{j(3+j)}f_i^+(z+\lambda_i^+t_j^*)+\sum_{m=1}^{2}\sum_{j=m+1}^{3}M_{mj(3+m)(3+j)}^{mj(3+m)(3+j)}f_i^+(z+\lambda_i^+(t_m^*+t_j^*))-$$
$$-\det T\times f_i^+(z+\lambda_i^+(t_1^*+t_2^*+t_3^*))=g_i^+(z),\qquad i=2,3,$$

где функция $g_2^+(z)$ имеет вид

$$g_2^+(z) = (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})\xi_2^+(z + \lambda_2^+(t_1^* + t_3^*)) + (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})\xi_1^+(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+}z + \lambda_1^+(t_1^* + t_3^*)) +$$

$$+ (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})\xi_3^+(\frac{\lambda_3^+}{\lambda_2^+}z + \lambda_3^+(t_1^* + t_3^*)) + a_{21}\xi_1^+(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+}z + \lambda_1^+ t_1^*) + a_{23}\xi_3^+(\frac{\lambda_3^+}{\lambda_2^+}z + \lambda_3^+ t_3^*) -$$

$$- a_{11}\xi_2^+(z + \lambda_2^+ t_1^*) - a_{33}\xi_2^+(z + \lambda_2^+ t_3^*) + \xi_2^+(z),$$

а функция $g_3^+(z)$ имеет вид

$$g_3^+(z) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\xi_3^+(z + \lambda_3^+(t_1^* + t_2^*)) + (a_{23}a_{32} - a_{22}a_{31})\xi_1^+(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_3^+}z + \lambda_1^+(t_1^* + t_2^*)) +$$

$$+ (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})\xi_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_3^+}z + \lambda_2^+(t_1^* + t_2^*)) + a_{31}\xi_1^+(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_3^+}z + \lambda_1^+ t_1^*) + a_{32}\xi_2^+(\frac{\lambda_2^+}{\lambda_3^+}z + \lambda_2^+ t_2^*) -$$

$$- a_{11}\xi_3^+(z + \lambda_3^+ t_1^*) - a_{22}\xi_3^+(z + \lambda_3^+ t_2^*) + \xi_3^+(z).$$

Для функций $f_i^-(z)$ справедливы соотношения:

$$f_i^-(z) - \sum_{j=1}^{3} M_{j(3+j)}^{j(3+j)} f_i^-(z - \lambda_i^- t_j^*) + \sum_{m=1}^{2}\sum_{j=m+1}^{3} M_{mj(3+m)(3+j)}^{mj(3+m)(3+j)} f_i^-(z - \lambda_i^-(t_m^* + t_j^*)) -$$

$$- \det T \times f_i^-(z - \lambda_i^-(t_1^* + t_2^* + t_3^*)) = g_i^-(z), \qquad i = 1,2,3,$$

где функция $g_1^-(z)$ имеет вид

$$g_1^-(z) = (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})\xi_1^-(z + \lambda_1^-(t_2^* + t_3^*)) + (a_{13}a_{32} - a_{33}a_{12})\xi_2^-(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^-}z + \lambda_2^-(t_2^* + t_3^*)) +$$

$$+ (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})\xi_3^-(\frac{\lambda_3^-}{\lambda_1^-}z + \lambda_3^-(t_2^* + t_3^*)) + a_{12}\xi_2^-(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^-}z + \lambda_2^- t_2^*) + a_{13}\xi_3^-(\frac{\lambda_3^-}{\lambda_1^-}z + \lambda_3^- t_3^*) -$$

$$- a_{22}\xi_1^-(z + \lambda_1^- t_2^*) - a_{33}\xi_1^-(z + \lambda_1^- t_3^*) + \xi_1^-(z),$$

функция $g_2^-(z)$ имеет вид

$$g_2^-(z) = (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})\xi_2^-(z + \lambda_2^-(t_1^* + t_3^*)) + (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})\xi_1^-(\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^-}z + \lambda_1^-(t_1^* + t_3^*)) +$$

$$+ (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})\xi_3^-(\frac{\lambda_3^-}{\lambda_2^-}z + \lambda_3^-(t_1^* + t_3^*)) + a_{21}\xi_1^-(\frac{\lambda_1^-}{\lambda_2^-}z + \lambda_1^- t_1^*) + a_{23}\xi_3^-(\frac{\lambda_3^-}{\lambda_2^-}z + \lambda_3^- t_3^*) -$$

$$- a_{11}\xi_2^-(z + \lambda_2^- t_1^*) - a_{33}\xi_2^-(z + \lambda_2^- t_3^*) + \xi_2^-(z),$$

а функция $g_3^-(z)$ имеет вид

$$g_3^-(z) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\xi_3^-(z + \lambda_3^-(t_1^* + t_2^*)) + (a_{23}a_{32} - a_{22}a_{31})\xi_1^-(\frac{\lambda_1^-}{\lambda_3^-}z + \lambda_1^-(t_1^* + t_2^*)) +$$

$$+ (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})\xi_2^-(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_3^-}z + \lambda_2^-(t_1^* + t_2^*)) + a_{31}\xi_1^-(\frac{\lambda_1^-}{\lambda_3^-}z + \lambda_1^- t_1^*) + a_{32}\xi_2^-(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_3^-}z + \lambda_2^- t_2^*) -$$

$$- a_{11}\xi_3^-(z + \lambda_3^- t_1^*) - a_{22}\xi_3^-(z + \lambda_3^- t_2^*) + \xi_3^-(z).$$

3. Аналитическое решение краевой задачи на графе из трех «равновременных» ребер. Пусть параметры всех ребер рассматриваемого графа таковы, что время прохождения бегущих волн по каждому ребру графа в каждом направлении одинаково. Данная ситуация является наиболее простым частным случаем, на котором удобно еще раз проиллюстрировать технику получения аналитического решения краевой задачи.

Итак, для введенной системы координат на графе будем предполагать выполненными равенства $\frac{l_1}{\lambda_1^+}=\frac{l_2}{\lambda_2^+}=\frac{l_3}{\lambda_3^+}=t^+$, $\frac{l_1}{\lambda_1^-}=\frac{l_2}{\lambda_2^-}=\frac{l_3}{\lambda_3^-}=t^-$. Из этих равенств следует, что $t_1^*=t_2^*=t_3^*=t^*$ и рекуррентные формулы для $f_i^{\pm}(z)$ (см.(3.18)) принимают вид следующих четырехточечных соотношений:

$$f_i^+(z)+a_1 f_i^+(z+\lambda_i^+ t^*)+a_2 f_i^+(z+2\lambda_i^+ t^*)+a_3 f_i^+(z+3\lambda_i^+ t^*)=g_i^+(z),$$

где $a_1=-\sum_{k=1}^{5}\sum_{j=k+1}^{6}M_{kj}^{kj}$, $\quad a_2=\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=l+1}^{4}\sum_{k=m+1}^{5}\sum_{j=k+1}^{6}M_{nmkj}^{nmkj}$, $\quad a_3=-\det T$,

$z\le l_i-3\lambda_i^+ t^*$, $\quad i=1,2,3$,

$$f_i^-(z)+a_1 f_i^-(z+\lambda_i^- t^*)+a_2 f_i^-(z+2\lambda_i^- t^*)+a_3 f_i^-(z+3\lambda_i^- t^*)=g_i^-(z),$$

где $z\ge -3\lambda_i^- t^*$, $\quad i=1,2,3$.

Из последних соотношений следует, что для нахождения значений функций $f_i^+(z)$ и $f_i^-(z)$ на области их определения достаточно знать их значения в интервалах $(l_i-3\lambda_i^+ t^*, l_i]$ и $[0\ ,\ 3\lambda_i^+ t^*)$, соответственно.

Как и в §2, определим функции $f_i^{\pm}(z)$, которые обозначим как $\Phi_i^{\pm}(z)$, на данных начальных отрезках. Из начальных условий следуют соотношения (3.7), которые определяют искомые функции на отрезках $[0,l_i]$:

$$\Phi_i^{\pm}(z)=W_i^{\pm}(z)=\pm\frac{1}{\rho\bar{c}_i}\varphi_i(z)+\psi_i(z),\qquad 0\le z\le l_i. \tag{3.19}$$

Для определения функций $\Phi_i^{\pm}(z)$ на оставшихся областях необходимо воспользоваться соотношениями (3.11), (3.12), которые удобно записать следующим образом:

$$f_i^-(z)=k_{i\to i}^i f_i^+\left(\frac{\lambda_i^+}{\lambda_i^-}z+\lambda_i^+ t^*\right)+\nu_i\mu_i\left(-\frac{z}{\lambda_i^-}+t^-\right), \tag{3.20}$$

$$f_i^+(z) = \sum_{j=1}^{3} k_{j\to i}^0 f_j^-(\frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^+} z). \qquad (3.21)$$

Пусть в (3.20) комбинация $\frac{\lambda_i^+}{\lambda_i^-} z + \lambda_i^+ t^*$, являющаяся аргументом функции f_i^+, принимает значения из отрезка $0 \le \frac{\lambda_i^+}{\lambda_i^-} z + \lambda_i^+ t^* \le l_i$, в точках которого функция f_i^+ уже определена. То есть $l_i \le z \le -\lambda_i^- t^*$. Тогда воспользовавшись для функции f_i^- формулой (3.20), получим:

$$\Phi_i^-(z) = k_{i\to i}^i W_i^+(\frac{\lambda_i^+}{\lambda_i^-} z + \lambda_i^+ t^*) + \nu_i \mu_i(-\frac{z}{\lambda_i^-} + t^-), \qquad l_i \le z \le -\lambda_i^- t^*. (3.22)$$

Аналогично рассмотрим формулу (3.21). Предположим, что комбинации $\frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^+} z$, являющиеся аргументами функций f_j^-, принимают значения из отрезков $0 \le \frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^+} z \le l_j$, на которых функции f_j^- уже известны. Тогда переменная z принадлежит отрезку $\lambda_i^+ \frac{l_j}{\lambda_j^-} \le z \le 0,\ j = 1,2,3$. Пользуясь тем, что $\frac{l_1}{\lambda_1^-} = \frac{l_2}{\lambda_2^-} = \frac{l_3}{\lambda_3^-} = t^-$, получаем $\lambda_i^+ t^- \le z \le 0$. Тогда, используя для функции f_i^+ формулу (3.21), получим:

$$\Phi_i^+(z) = \sum_{j=1}^{3} k_{j\to i}^0 W_j^-(\frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^+} z), \qquad \lambda_i^+ t^- \le z \le 0. \qquad (3.23)$$

Теперь предположим, что комбинации $\frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^+} z$ принимают значения из отрезков $l_j \le \frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^+} z \le -\lambda_j^- t^*$, то есть переменная z принадлежит отрезку $-\lambda_i^+ t^* \le z \le \lambda_i^+ t^-$. Тогда, пользуясь формулой (3.21), получим:

$$\Phi_i^+(z) = \sum_{j=1}^{3} k_{j\to i}^0 k_{j\to j}^j W_j^+(\frac{\lambda_j^+}{\lambda_i^+} z + \lambda_j^+ t^*) + \sum_{j=1}^{3} k_{j\to i}^0 \nu_j \mu_j(-\frac{z}{\lambda_i^+} + t^-), \qquad (3.24)$$

где $\quad -\lambda_i^+ t^* \le z \le \lambda_i^+ t^-$.

Далее следует еще раз воспользоваться формулами (3.20), (3.21), учитывая вновь полученные выражения для функций $\Phi_i^\pm(z)$.

Итак, пусть в (3.20) комбинация $\frac{\lambda_i^+}{\lambda_i^-}z+\lambda_i^+t^*$ имеет значения из отрезка $\lambda_i^+t^- \le \frac{\lambda_i^+}{\lambda_i^-}z+\lambda_i^+t^* \le 0$. То есть $-\lambda_i^-t^* \le z \le -\lambda_i^-t^*+l_i$. Тогда воспользовавшись для функции f_i^- формулой (3.20), получим:

$$\Phi_i^-(z)=\sum_{j=1}^{3}k_{i\to i}^{i}k_{j\to i}^{0}W_j^-(\frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^-}z+\lambda_j^-t^*)+\nu_i\mu_i(-\frac{z}{\lambda_i^-}+t^-), \qquad (3.25)$$

где $-\lambda_i^-t^* \le z \le -\lambda_i^-t^*+l_i$.

Теперь пусть в (3.20) $-\lambda_i^+t^* \le \frac{\lambda_i^+}{\lambda_i^-}z+\lambda_i^+t^* \le \lambda_i^+t^-$, из чего следует, что $-\lambda_i^-t^*+l_i \le z \le -2\lambda_i^-t^*$. Тогда, пользуясь формулой (3.20), получим:

$$\begin{aligned}\Phi_i^-(z)=&\sum_{j=1}^{3}k_{i\to i}^{i}k_{j\to i}^{0}k_{j\to j}^{j}W_j^+(\frac{\lambda_j^+}{\lambda_i^-}z+2\lambda_j^+t^*)+\sum_{j=1}^{3}k_{i\to i}^{i}k_{j\to i}^{0}\nu_j\mu_j(-\frac{z}{\lambda_i^-}-t^*+t^-)+\\&+\nu_i\mu_i(-\frac{z}{\lambda_i^-}+t^-),\end{aligned}, \qquad (3.26)$$

где $-\lambda_i^-t^*+l_i \le z \le -2\lambda_i^-t^*$.

Теперь пусть комбинации $\frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^+}z$ в (3.21) принимают значения из отрезков $-\lambda_j^-t^* \le \frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^+}z \le -\lambda_j^-t^*+l_j$, то есть переменная z принадлежит отрезку $-\lambda_i^+t^*+\lambda_i^+t^- \le z \le -\lambda_i^+t^*$. Тогда, пользуясь формулой (3.21), получим:

$$\Phi_i^+(z)=\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}k_{l\to i}^{0}k_{l\to l}^{l}k_{j\to l}^{0}W_j^-(\frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^+}z+\lambda_j^+t^*)+\sum_{l=1}^{3}k_{l\to i}^{0}\nu_l\mu_l(-\frac{z}{\lambda_i^+}+t^-), \qquad (3.27)$$

где $-\lambda_i^+t^*+\lambda_i^+t^- \le z \le -\lambda_i^+t^*$.

Аналогично пусть комбинации $\frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^+}z$ в (3.21) принимают значения из отрезков $-\lambda_j^-t^*+l_j \le \frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^+}z \le -2\lambda_j^-t^*$, то есть $-2\lambda_i^+t^* \le z \le -\lambda_i^+t^*+\lambda_i^+t^-$. Тогда, формула (3.21) дает:

$$\Phi_i^+(z) = \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} k_{l\to i}^0 k_{l\to l}^l k_{j\to l}^0 k_{j\to j}^j W_j^+(\frac{\lambda_j^+}{\lambda_i^+} z + 2\lambda_j^+ t^*) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} k_{l\to i}^0 k_{l\to l}^l k_{j\to l}^0 \nu_j \mu_j (-\frac{z}{\lambda_i^+} - t^* + t^-) + \sum_{l=1}^{3} k_{l\to i}^0 \nu_l \mu_l (-\frac{z}{\lambda_i^+} + t^-), \qquad (3.28)$$

где $\quad -2\lambda_i^+ t^* \le z \le -\lambda_i^+ t^* + \lambda_i^+ t^-$.

Для определения функций $f_i^+(z)$ и $f_i^-(z)$ в интервалах $(l_i - 3\lambda_i^+ t^*, l_i]$ и $[0\,,\, -3\lambda_i^- t^*)$ осталось сделать еще один шаг, вновь воспользовавшись формулами (3.20), (3.21) и полученными соотношениями для функций $\Phi_i^{\pm}(z)$.

Итак, пусть в (3.20) комбинация $\frac{\lambda_i^+}{\lambda_i^-} z + \lambda_i^+ t^*$ принимает значения из отрезка $-\lambda_i^+ t^* + \lambda_i^+ t^- \le \frac{\lambda_i^+}{\lambda_i^-} z + \lambda_i^+ t^* \le -\lambda_i^+ t^*$. То есть $-2\lambda_i^- t^* \le z \le -2\lambda_i^- t^* + l_i$. Тогда воспользовавшись для функции f_i^- формулой (3.20), получим:

$$\Phi_i^-(z) = \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} k_{i\to i}^i k_{l\to i}^0 k_{l\to l}^l k_{j\to l}^0 W_j^-(\frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^-} z + 2\lambda_j^- t^*) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{3} k_{i\to i}^i k_{l\to i}^0 \nu_l \mu_l (-\frac{z}{\lambda_i^+} - t^* + t^-) + \nu_i \mu_i (-\frac{z}{\lambda_i^-} + t^-), \qquad (3.29)$$

где $\quad -2\lambda_i^- t^* \le z \le -2\lambda_i^- t^* + l_i$.

Теперь пусть в (3.20) $-2\lambda_i^+ t^* \le \frac{\lambda_i^+}{\lambda_i^-} z + \lambda_i^+ t^* \le -\lambda_i^+ t^* + \lambda_i^+ t^-$, из чего следует, что $-2\lambda_i^- t^* + l_i \le z \le -3\lambda_i^- t^*$. Тогда, пользуясь формулой (3.20), получим:

$$\Phi_i^-(z) = \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} k_{i\to i}^i k_{l\to i}^0 k_{l\to l}^l k_{j\to l}^0 k_{j\to j}^j W_j^+(\frac{\lambda_j^+}{\lambda_i^-} z + 3\lambda_j^+ t^*) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} k_{i\to i}^i k_{l\to i}^0 k_{l\to l}^l k_{j\to l}^0 \nu_j \mu_j (-\frac{z}{\lambda_i^-} - 2t^* + t^-) + \qquad (3.30)$$
$$+ \sum_{l=1}^{3} k_{i\to i}^i k_{l\to i}^0 \nu_l \mu_l (-\frac{z}{\lambda_i^-} - t^* + t^-) + \nu_i \mu_i (-\frac{z}{\lambda_i^-} + t^-),$$

где $\quad -2\lambda_i^- t^* + l_i \le z \le -3\lambda_i^- t^*$.

На этом построение функций $\Phi_i^-(z)$ на отрезках $[0\,,\, -3\lambda_i^- t^*)$ закончено. Осталось построить функции $\Phi_i^+(z)$ на отрезках $(l_i - 3\lambda_i^+ t^*, l_i]$. Пусть комбинации

$\frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^+}z$ в (3.21) принимают значения из отрезков $-2\lambda_j^- t^* \le \frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^+}z \le -2\lambda_j^- t^* + l_j$, то есть переменная z принадлежит отрезку $-2\lambda_i^+ t^* + \lambda_i^+ t^- \le z \le -2\lambda_i^+ t^*$. Тогда, пользуясь формулой (3.21), получим:

$$\begin{aligned}\Phi_i^+(z) = &\sum_{m=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} k_{m\to i}^0 k_{m\to m}^m k_{l\to m}^0 k_{l\to l}^l k_{j\to l}^0 W_j^-\left(\frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^+}z + 2\lambda_j^- t^*\right) + \\ &+ \sum_{m=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} k_{m\to i}^0 k_{m\to m}^m k_{l\to m}^0 \nu_l \mu_l\left(-\frac{z}{\lambda_i^+} - t^* + t^-\right) + \sum_{m=1}^{3}\nu_m\mu_m\left(-\frac{z}{\lambda_i^+} + t^-\right),\end{aligned} \tag{3.31}$$

где $\quad -2\lambda_i^+ t^* + \lambda_i^+ t^- \le z \le -2\lambda_i^+ t^*$.

Аналогично пусть комбинации $\frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^+}z$ в (3.21) принимают значения из отрезков $-2\lambda_j^- t^* + l_j \le \frac{\lambda_j^-}{\lambda_i^+}z \le -3\lambda_j^- t^*$, то есть $-3\lambda_i^+ t^* \le z \le -2\lambda_i^+ t^* + \lambda_i^+ t^-$. Тогда, формула (3.21) дает:

$$\begin{aligned}\Phi_i^+(z) = &\sum_{m=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} k_{m\to i}^0 k_{m\to m}^m k_{l\to m}^0 k_{l\to l}^l k_{j\to l}^0 k_{j\to j}^j W_j^+\left(\frac{\lambda_j^+}{\lambda_i^+}z + 3\lambda_j^+ t^*\right) + \\ &+ \sum_{m=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} k_{m\to i}^0 k_{m\to m}^m k_{l\to m}^0 k_{l\to l}^l k_{j\to l}^0 \nu_j \mu_j\left(-\frac{z}{\lambda_i^+} - 2t^* + t^-\right) + \\ &+ \sum_{m=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} k_{m\to i}^0 k_{m\to m}^m k_{l\to m}^0 \nu_l \mu_l\left(-\frac{z}{\lambda_i^+} - t^* + t^-\right) + \sum_{m=1}^{3}\nu_m\mu_m\left(-\frac{z}{\lambda_i^+} + t^-\right),\end{aligned} \tag{3.32}$$

где $\quad -3\lambda_i^+ t^* \le z \le -2\lambda_i^+ t^* + \lambda_i^+ t^-$.

На этом построение функций $\Phi_i^{\pm}(z)$ закончено. Итак, функции $\Phi_i^+(z)$ на отрезках $(l_i - 3\lambda_i^+ t^*, l_i]$ определяются формулами (3.19), (3.23), (3.24), (3.27), (3.28), (3.31), (3.32). Функции $\Phi_i^-(z)$ на отрезках $[0\ ,\ 3\lambda_i^+ t^*)$ определяются формулами (3.19), (3.22), (3.25), (3.26), (3.29), (3.30).

Таким образом, для каждой из функций $f_i^{\pm}$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{cases} f_i^+(z) + a_1 f_i^+(z + \lambda_i^+ t^*) + a_2 f_i^+(z + 2\lambda_i^+ t^*) + a_3 f_i^+(z + 3\lambda_i^+ t^*) = g_i^+(z), \\ \quad при \quad z \le l_i - 3\lambda_i^+ t^*, \\ f_i^+(z) = \Phi_i^+(z), \quad при \quad l_i - 3\lambda_i^+ t^* \le z \le l_i, \end{cases} \tag{3.33}$$

$$\begin{cases} f_i^-(z) + a_1 f_i^-(z+\lambda_i^- t^*) + a_2 f_i^-(z+2\lambda_i^- t^*) + a_3 f_i^-(z+3\lambda_i^- t^*) = g_i^-(z), \\ \quad при \quad z \ge -3\lambda_i^- t^*, \\ f_i^-(z) = \Phi_i^-(z), \quad при \quad 0 \le z \le -3\lambda_i^+ t^*. \end{cases} \tag{3.34}$$

Рассмотрим рекуррентное соотношение для функций f_i^+. Введем на полуоси $(-\infty, l_i]$ равномерную разностную сетку с уздами $z_j = -jh + z_0$, $j = 0,1,2,...$, где $h = \lambda_i^+ t^*$, $l_i - \lambda_i^+ t^* \le z_0 \le l_i$.

Обозначим $y_j = f_i^+(z_j)$, $g_j = g_i^+(z_j)$. Отметим, что $y_0 = \Phi_i^+(z_0)$, $y_1 = \Phi_i^+(z_1)$, $y_2 = \Phi_i^+(z_2)$ известны.

Тогда соотношение (3.33), записанное в узлах разностной сетки, принимает следующий вид:

$$\begin{cases} y_j + a_1 y_{j-1} + a_2 y_{j-2} + a_3 y_{j-3} = g_j \quad , \quad j \ge 3, \\ y_0 = \Phi_i^+(z_0), \\ y_1 = \Phi_i^+(z_1), \\ y_2 = \Phi_i^+(z_2). \end{cases} \tag{3.35}$$

Это задача Коши для неоднородного линейного разностного уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Уравнению $y_j + a_1 y_{j-1} + a_2 y_{j-2} + a_3 y_{j-3} = g_j$ соответствует характеристическое уравнение

$$q^3 + a_1 q^2 + a_2 q + a_3 = 0 \tag{3.36}$$

Подстановка $x = q - \frac{a_1}{3}$ приводит уравнение (3.36) к виду:

$$x^3 + b_1 x + b_2 = 0, \tag{3.37}$$

где $b_1 = a_2 - \frac{a_1^2}{3}$, $b_2 = \frac{2a_1^3}{27} + a_3 - \frac{a_1 a_2}{9}$.

Далее в соответствии с [14] возможны четыре случая при решении уравнения (3.37).

1) Пусть выполнено условие $\frac{b_2^2}{4} + \frac{b_1^3}{27} < 0$.

В этом случае все три корня уравнения (3.37) вещественные и равны:

$$x = 2\sqrt{\frac{-b_1}{3}} \cos\frac{\varphi + 2\pi k}{3}, \qquad k = 0,1,2, \qquad \cos\varphi = -\frac{b_2}{2\sqrt[3]{\frac{-b_1}{3}}}.$$

2) Пусть выполнены условия $\frac{b_2^2}{4}+\frac{b_1^3}{27}>0,\ b_1<0$.

В этом случае уравнение (3.37) имеет один вещественный корень и два мнимых:

$$x_1=\frac{-2\sqrt{\frac{-b_1}{3}}}{\sin 2\varphi},\qquad x_{2,3}=\frac{\sqrt{\frac{-b_1}{3}}}{\sin 2\varphi}\pm i\sqrt{-b_1}ctg2\varphi,$$

где $\quad tg\varphi=\sqrt[3]{tg\frac{\omega}{2}},\qquad \sin\omega=\frac{2\sqrt{\frac{-b_1^3}{27}}}{b_2}.$

3) Пусть выполнены условия $\frac{b_2^2}{4}+\frac{b_1^3}{27}>0,\ b_1>0$.

В этом случае уравнение (3.37) также имеет один вещественный корень и два мнимых:

$$x_1=-2\sqrt{\frac{b_1}{3}}ctg2\varphi,\qquad x_{2,3}=\sqrt{\frac{b_1}{3}}ctg2\varphi\pm\frac{i\sqrt{b_1}}{\sin 2\varphi},$$

где $\quad tg\varphi=\sqrt[3]{tg\frac{\omega}{2}},\qquad tg\omega=\frac{2\sqrt{\frac{b_1^3}{27}}}{b_2}.$

4) Пусть выполнено равенство $\frac{b_2^2}{4}+\frac{b_1^3}{27}=0$.

В этом случае уравнение (3.37) имеет два вещественных корня, один из которых кратный:

$$x_{1,2}=signb_2\sqrt{\frac{-b_1}{3}},\qquad x_3=\frac{3b_2}{b_1}.$$

Зная x_1, x_2, x_3, корни характеристического уравнения (3.36) вычисляют по формуле $\quad q=x+\frac{a_1}{3}$.

Для первых трех случаев введем в рассмотрение функции $v_1(j)=q_1^j$, $v_2(j)=q_2^j$, $v_3(j)=q_3^j$, а для последнего случая рассмотрим функции $v_1(j)=q_1^j$, $v_2(j)=jq_1^j$, $v_3(j)=q_3^j$.

Общее решение разностного уравнения системы (3.35) имеет вид [2]:

$$y_j=\overline{\overline{y}}_j+\sum_{k=1}^{3}c_kv_k(j),\ j=0,1,2,... \qquad (3.38)$$

где c_k - произвольные константы, а $\overline{\overline{y}}_j$ - частное решение неоднородного уравнения, которое можно записать в виде:

$$\bar{y}_j = \sum_{k=0}^{j-3} \frac{\det\begin{vmatrix} v_1(k+1) & v_2(k+1) & v_3(k+1) \\ v_1(k+2) & v_2(k+2) & v_3(k+2) \\ v_1(j) & v_2(j) & v_3(j) \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} v_1(k+1) & v_2(k+1) & v_3(k+1) \\ v_1(k+2) & v_2(k+2) & v_3(k+2) \\ v_1(k+3) & v_2(k+3) & v_3(k+3) \end{vmatrix}} g_{k+3} \tag{3.39}$$

Для решения задачи (3.35) необходимо найти коэффициенты c_k. Они находятся с помощью начальных данных из системы линейных алгебраических уравнений $\begin{pmatrix} v_1(0) & v_2(0) & v_3(0) \\ v_1(1) & v_2(1) & v_3(1) \\ v_1(2) & v_2(2) & v_3(2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ например, по правилу Крамера:

$$c_1 = \frac{\det\begin{vmatrix} y_0 & v_2(0) & v_3(0) \\ y_1 & v_2(1) & v_3(1) \\ y_2 & v_2(2) & v_3(2) \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} v_1(0) & v_2(0) & v_3(0) \\ v_1(1) & v_2(1) & v_3(1) \\ v_1(2) & v_2(2) & v_3(2) \end{vmatrix}}, \qquad c_2 = \frac{\det\begin{vmatrix} v_1(0) & y_0 & v_3(0) \\ v_1(1) & y_1 & v_3(1) \\ v_1(2) & y_2 & v_3(2) \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} v_1(0) & v_2(0) & v_3(0) \\ v_1(1) & v_2(1) & v_3(1) \\ v_1(2) & v_2(2) & v_3(2) \end{vmatrix}},$$

$$c_3 = \frac{\det\begin{vmatrix} v_1(0) & v_2(0) & y_0 \\ v_1(1) & v_2(1) & y_1 \\ v_1(2) & v_2(2) & y_2 \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} v_1(0) & v_2(0) & v_3(0) \\ v_1(1) & v_2(1) & v_3(1) \\ v_1(2) & v_2(2) & v_3(2) \end{vmatrix}}.$$

Пусть z - произвольное значение из области $z \le l_i - 3\lambda_i^+ t^*$. Для этого значения z выберем $z_0 = z + N^+\lambda_i^+ t^*$, где $N^+ = \left[\dfrac{z}{\lambda_i^+ t^*}\right]$. Тогда $z_j = z$ при значении $j = N^+$, то есть выбранное z совпадает с узлом z_{N^+} разностной сетки. Следовательно $y_{N^+} = f_i^+(z)$ и с учетом (3.38) получаем выражение:

$$f_i^+(z) = \sum_{k=0}^{N^+-3} \frac{\det\begin{vmatrix} v_1(k+1) & v_2(k+1) & v_3(k+1) \\ v_1(k+2) & v_2(k+2) & v_3(k+2) \\ v_1(j) & v_2(j) & v_3(j) \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} v_1(k+1) & v_2(k+1) & v_3(k+1) \\ v_1(k+2) & v_2(k+2) & v_3(k+2) \\ v_1(k+3) & v_2(k+3) & v_3(k+3) \end{vmatrix}} g_i^+(z + (N^+ - k - 3)\lambda_i^+ t^*) + \sum_{k=1}^{3} c_k v_k(N^+)$$

Формулы для функций $f_i^-(z)$ выводятся аналогично. Приведем их без доказательства:

$$f_i^-(z)=\sum_{k=0}^{N^--3}\frac{\det\begin{vmatrix} v_1(k+1) & v_2(k+1) & v_3(k+1)\\ v_1(k+2) & v_2(k+2) & v_3(k+2)\\ v_1(j) & v_2(j) & v_3(j)\end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} v_1(k+1) & v_2(k+1) & v_3(k+1)\\ v_1(k+2) & v_2(k+2) & v_3(k+2)\\ v_1(k+3) & v_2(k+3) & v_3(k+3)\end{vmatrix}}g_i^-(z+(N^--k-3)\lambda_i^-t^*)+\sum_{k=1}^{3}c_kv_k(N^-),$$

где $N^-=\left[\dfrac{z}{-\lambda_i^-t^*}\right]$.

Рассмотрим соотношения для функций $f_i^{\pm}(z)$. Эти соотношения по сути представляет собой сумму степеней корней характеристического уравнения. Нетрудно видеть, что если все корни характеристического уравнения (3.36) по модулю не превосходят единицы и нет кратных корней по модулю равных единице, то функции $f_i^{\pm}(z)$ являются ограниченными. Если хотя бы один из корней характеристического уравнения по модулю больше единицы или существуют кратные корни, по модулю равные единице, то функции $f_i^{\pm}(z)$ являются неограниченными.

Заметим, что по теореме Виета $q_1q_2q_3=-\det T$. Поэтому, если $|\det T|>1$ (напомним, что $|\det T|=|\det T_g|$), то хотя бы у одного кореня уравнения (3.36) модуль больше единицы и решение (3.39) будет неограниченным.

Таким образом условие $|\det T_g|>1$ является достаточным условием неограниченного роста амплитуды колебаний давления и скорости пульсовых волн и на графе "тройник".

Отметим, что привязка к системе координат, осуществленная в данном параграфе, сделана для упрощения выкладок и является необязательной. Достаточное условие неограниченности решения остается справедливым и в случае любой другой ориентации ребер графа.

§4. Система функциональных уравнений с запаздывающими аргументами.

В предыдущих параграфах, посвященных решению краевых задач на графе из двух ребер и на графе «тройник», были выведены рекуррентные соотношения для функций $f_i^{\pm}(z)$ (например, формулы (2.14), (3.18)). В этом параграфе будет сформулировано утверждение, которое позволяет получать аналогичные рекуррентные соотношения на произвольном графе.

Перед тем, как сформулировать общую теорему, еще раз вернемся к соотношениям (2.10), (2.11), возникающим на графе из двух ребер:

$$\begin{pmatrix} f_1^+(-\lambda_1^+ t) \\ f_2^+(-\lambda_2^+ t) \\ f_1^-(l_1-\lambda_1^- t) \\ f_2^-(l_2-\lambda_2^- t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} f_1^+(l_1-\lambda_1^+ t) \\ f_2^+(l_2-\lambda_2^+ t) \\ f_1^-(-\lambda_1^- t) \\ f_2^-(-\lambda_2^- t) \end{pmatrix} + GM\ , \tag{4.1}$$

где $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{1\to1}^0 & k_{2\to1}^0 \\ 0 & 0 & k_{1\to2}^0 & k_{2\to2}^0 \\ k_{1\to1}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{2\to2}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \end{pmatrix}$, $M = \left(0\ ,0\ ,\mu_1(t)\ ,\mu_2(t)\right)^T$.

Введем обозначения:

$$z = -\lambda_1^+ t\ , \qquad F_i^+(z) = f_i^+\left(\frac{\lambda_i^+}{\lambda_1^+} z\right), \quad F_i^-(z) = f_i^-\left(l_i + \frac{\lambda_i^-}{\lambda_1^+} z\right), \qquad t_i^{\pm} = \pm\frac{l_i}{\lambda_i^{\pm}},$$

$$i = 1,2\ . \tag{4.2}$$

Тогда (4.1) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} F_1^+(z) \\ F_2^+(z) \\ F_1^-(z) \\ F_2^-(z) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} F_1^+(z+\lambda_1^+ t_1^+) \\ F_2^+(z+\lambda_1^+ t_2^+) \\ F_1^-(z+\lambda_1^+ t_1^-) \\ F_2^-(z+\lambda_1^+ t_2^-) \end{pmatrix} + GM\ . \tag{4.3}$$

Для графа «тройник» введение замены (4.2) приводит соотношения (3.8), (3.10) для функций $f_i^{\pm}(z)$ к виду:

$$\begin{pmatrix} F_1^+(z) \\ F_2^+(z) \\ F_3^+(z) \\ F_1^-(z) \\ F_2^-(z) \\ F_3^-(z) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} F_1^+(z+\lambda_1^+ t_1^+) \\ F_2^+(z+\lambda_1^+ t_2^+) \\ F_3^+(z+\lambda_1^+ t_3^+) \\ F_1^-(z+\lambda_1^+ t_1^-) \\ F_2^-(z+\lambda_1^+ t_2^-) \\ F_3^-(z+\lambda_1^+ t_3^-) \end{pmatrix} + GM \,. \qquad (4.4)$$

Уравнения (4.3), (4.4) являются частными случаями системы функциональных уравнений, для которой в следующем пункте формулируется и доказывается соответствующая теорема.

1. Рекуррентное соотношение для системы однородных функциональных уравнений. Рассмотрим однородную систему функциональных уравнений следующего вида:

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} f_1(z+a_1) \\ f_2(z+a_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(z+a_n) \end{pmatrix}, \qquad (4.5)$$

где $T = (t_{ij}) \in R^{n\times n}$, константы $a_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, n - размерность системы однородных функциональных уравнений. Функции f_i определены на полуосях $(-\infty, l_i]$.

<u>Теорема.</u>

Функции $f_i(z)$, являющиеся решением системы (4.5), на области $z < l_i - a_1 - \dots - a_n$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$f_i(z) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m) \\ 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} M_{i_1\dots i_m}^{i_1\dots i_m} f_i(z + a_{i_1} + \dots + a_{i_m}), \quad i = \overline{1,n}. \qquad (4.6)$$

Замечание.

Здесь $M_{i_1\dots i_m}^{i_1\dots i_m}$ - минор матрицы T, расположенный на пересечении строк и столбцов с номерами $i_1,\dots,i_m$. Внешнее суммирование в (4.6) ведется по всем значениям параметра m от 1 до n, а для каждого значения m - по всем комбинациям номеров $i_1,\dots,i_m$, удовлетворяющих условию $1 \le i_1 < \dots < i_m \le n$.

<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим любую из функций $f_k(z)$ из (4.5) и покажем для нее справедливость соотношения (4.6). Из системы (4.5) следует, что уравнение для каждой функции $f_j(z)$ имеет вид:

$$f_j(z) = \sum_{i=1}^{n} t_{ji} f_i(z + a_i), \quad j = 1,...,n. \tag{4.7}$$

Отдельно запишем уравнение для выбранной функции $f_k(z)$:

$$f_k(z) = \sum_{j=1}^{n} t_{kj} f_j(z + a_j), \tag{4.8}$$

Будем преобразовывать соотношение (4.8), создавая в его левой части структуру, аналогичную формуле (4.6). Слагаемое в формуле (4.6), соответствующее значению $m = 1$, имеет вид $\sum_{j=1}^{n} t_{jj} f_k(z + a_j)$. Вычтем это выражение из обеих частей соотношения (4.7). Тогда получим:

$$f_k(z) - \sum_{j=1}^{n} t_{jj} f_k(z + a_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(t_{kj} f_j(z + a_j) - t_{jj} f_k(z + a_j) \right). \tag{4.9}$$

Рассмотрим (4.7), (4.8), заменяя в них аргумент z на аргумент $z + a_j$. Подставим получающиеся при этом представления для функций $f_j(z + a_j)$ и $f_k(z + a_j)$ в правую часть соотношения (4.9). В результате получим:

$$f_k(z) - \sum_{j=1}^{n} t_{jj} f_k(z + a_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (t_{kj} t_{ji} - t_{ki} t_{jj}) f_i(z + a_j + a_i). \tag{4.10}$$

Заметим, что при $i = j$ слагаемые в правой части формулы (4.10) равны нулю. Поэтому перепишем (4.10) в виде:

$$f_k(z) - \sum_{j=1}^{n} t_{jj} f_k(z + a_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} (t_{kj} t_{ji} - t_{ki} t_{jj}) f_i(z + a_j + a_i). \tag{4.11}$$

Преобразуем правую часть соотношения (4.11). Отдельно выделим в ней слагаемые при $i = 1$ и $i = n$, а в оставшейся двойной сумме внутреннюю сумму разобьем на две подсуммы. Тогда получим:

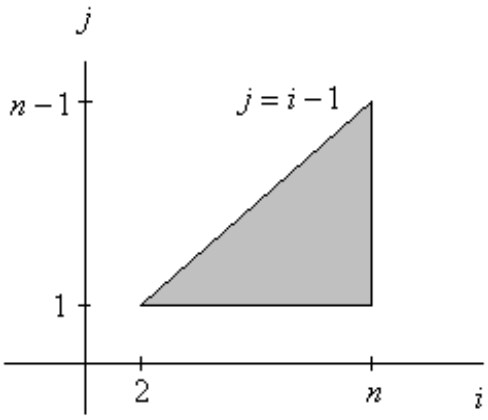
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}(t_{kj}t_{ji}-t_{ki}t_{jj})f_i(z+a_j+a_i)=\sum_{j=2}^{n}(t_{kj}t_{j1}-t_{k1}t_{jj})f_1(z+a_j+a_1)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}(t_{kj}t_{jn}-t_{kn}t_{jj})f_n(z+a_j+a_n)+\sum_{i=2}^{n-1}[\sum_{j=1}^{i-1}(t_{kj}t_{ji}-t_{ki}t_{jj})f_i(z+a_j+a_i)+$$

$$+\sum_{j=i+1}^{n}(t_{kj}t_{ji}-t_{ki}t_{jj})f_i(z+a_j+a_i)]=\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(t_{kj}t_{ji}-t_{ki}t_{jj})f_i(z+a_j+a_i)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(t_{kj}t_{ji}-t_{ki}t_{jj})f_i(z+a_j+a_i). \qquad (4.12)$$

Рассмотрим область изменения индексов выражения $\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(t_{kj}t_{ji}-t_{ki}t_{jj})f_i(z+a_j+a_i)$ (см. рисунок).



Здесь при фиксированном индексе i индекс j изменяется в пределах от $j=1$ до $j=i-1$.

Поменяем порядок суммирования в рассматриваемом выражении. Заметим, что при фиксированном значении индекса j, индекс i меняется в пределах от $i=j+1$ до $i=n$. В результате получим:

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(t_{kj}t_{ji}-t_{ki}t_{jj})f_i(z+a_j+a_i)=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(t_{kj}t_{ji}-t_{ki}t_{jj})f_i(z+a_j+a_i). \qquad (4.13)$$

В правой части соотношения (4.13) заменим индекс i на индекс j, и индекс j на индекс i, и перепишем (4.12) в виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}(t_{kj}t_{ji}-t_{ki}t_{jj})f_i(z+a_j+a_i)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(t_{kj}t_{ji}-t_{ki}t_{jj})f_i(z+a_j+a_i)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(t_{ki}t_{ij}-t_{kj}t_{ii})f_j(z+a_j+a_i)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}((t_{kj}t_{ji}-t_{ki}t_{jj})f_i(z+a_j+a_i)+$$

$$+(t_{ki}t_{ij}-t_{kj}t_{ii})f_j(z+a_j+a_i)).$$

Подстановка последнего соотношения в (4.11) дает:

$$f_k(z)-\sum_{j=1}^{n} t_{jj} f_k(z+a_j)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}((t_{kj}t_{ji}-t_{ki}t_{jj})f_i(z+a_j+a_i)+ \\ +(t_{ki}t_{ij}-t_{kj}t_{ii})f_j(z+a_j+a_i)). \tag{4.14}$$

Рассмотрим выражение $t_{kj}t_{ji}-t_{ki}t_{jj}$, являющееся коэффициентом при функции $f_i(z+a_j+a_i)$ в правой части соотношения (4.14). Это выражение представляет собой комбинацию элементов матрицы T, которые расположены в строках с номерами k, j и столбцах с номерами j, i. Сравнивая рассматриваемое выражение с минором матрицы T, расположенным на пересечении указанных строк и столбцов, получим:

$$t_{kj}t_{ji}-t_{ki}t_{jj}=\begin{cases}-M_{ij}^{kj}, & при\ \ k<j,\\ 0, & при\ \ k=j,\\ M_{ij}^{jk}, & при\ \ k>j.\end{cases} \tag{4.15}$$

Аналогично рассматривая коэффициент при функции $f_j(z+a_j+a_i)$ в правой части соотношения (4.14), получим:

$$t_{ki}t_{ij}-t_{kj}t_{ii}=\begin{cases}M_{ij}^{ki}, & при\ \ k<i,\\ 0, & при\ \ k=i,\\ -M_{ij}^{ik}, & при\ \ k>i.\end{cases} \tag{4.16}$$

Из двух приведенных соотношений следует, что при значении $k=1$ формулы (4.15), (4.16) принимают вид:

$$t_{kj}t_{ji}-t_{ki}t_{jj}=t_{1j}t_{ji}-t_{1i}t_{jj}=-M_{ij}^{1j}, \tag{4.17}$$

$$t_{ki}t_{ij}-t_{kj}t_{ii}=t_{1i}t_{ij}-t_{1j}t_{ii}=\begin{cases}0, & при\ i=1,\\ M_{ij}^{1i}, & при\ i>1.\end{cases} \tag{4.18}$$

Таким образом, выбор $k=1$ упрощает выкладки в процессе доказательства. Поэтому сначала покажем справедливость формулы (4.6) для функции $f_1(z)$. После этого докажем теорему для всех функций $f_i(z)$, $i=\overline{1,n}$.

При значении $k=1$ соотношение (4.14) с учетом формул (4.17), (4.18) принимает вид:

$$f_1(z)-\sum_{j=1}^{n} t_{jj} f_1(z+a_j)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(M_{ij}^{1i} f_j(z+a_j+a_i)-M_{ij}^{1j} f_i(z+a_j+a_i)). \tag{4.19}$$

В правой части соотношения (4.19) отдельно выделим слагаемые, соответствующие значению индекса $i=1$ и перенесем их в левую часть соотношения. Тогда получим

$$f_1(z)-\sum_{j=1}^{n} t_{jj} f_1(z+a_j)+\sum_{j=2}^{n} M_{1j}^{1j} f_1(z+a_1+a_j)= \\ =\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(M_{ij}^{1i} f_j(z+a_j+a_i)-M_{ij}^{1j} f_i(z+a_j+a_i)). \tag{4.20}$$

Рассмотрим слагаемое в формуле (4.6), соответствующее значению $m=2$. Это слагаемое имеет вид:

$$\sum_{\substack{(i,j)\\ 1\le i<j\le n}}^{n} M_{ij}^{ij} f_1(z+a_i+a_j)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} M_{ij}^{ij} f_1(z+a_i+a_j)= \\ =\sum_{j=2}^{n} M_{1j}^{1j} f_1(z+a_1+a_j)+\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} M_{ij}^{ij} f_1(z+a_i+a_j).$$

Из последнего соотношения видно, что для получения в левой части (4.20) второго слагаемого формулы (4.6) ($m=2$) к обеим частям (4.20) следует прибавить выражение $\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} M_{ij}^{ij} f_1(z+a_i+a_j)$. Тогда получим:

$$f_1(z)-\sum_{j=1}^{n} t_{jj} f_1(z+a_j)+\sum_{\substack{(i_1,i_2)\\ 1\le i_1<i_2\le n}}^{n} M_{i_1 i_2}^{i_1 i_2} f_1(z+a_{i_1}+a_{i_2})= \\ =\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(M_{ij}^{1i} f_j(z+a_j+a_i)-M_{ij}^{1j} f_i(z+a_j+a_i)+M_{ij}^{ij} f_1(z+a_i+a_j)). \tag{4.21}$$

Рассмотрим (4.7), (4.8), заменяя в них аргумент z на аргумент $z+a_j+a_i$. Подстановка получающихся при этом соотношений в правую часть (4.21) дает:

$$f_1(z)-\sum_{j=1}^{n} t_{jj} f_1(z+a_j)+\sum_{\substack{(i_1,i_2)\\ 1\le i_1<i_2\le n}}^{n} M_{i_1 i_2}^{i_1 i_2} f_1(z+a_{i_1}+a_{i_2})= \\ =\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(t_{jl} M_{ij}^{1i}-t_{il} M_{ij}^{1j}+t_{1l} M_{ij}^{ij}) f_l(z+a_l+a_j+a_i) \tag{4.22}$$

На этом закончено формирование второго слагаемого из формулы (4.6) в левой части исходного соотношения (4.8) для функции $f_1(z)$.

Теперь покажем, что после окончания m-го шага ($m\ge 2$) получается соотношение следующего вида:

$$f_1(z)-\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_j)\\1\le i_1<\dots<i_j\le n}}M_{i_1\dots i_j}^{i_1\dots i_j}f_1(z+a_{i_1}+\dots+a_{i_j})=I_m^*, \tag{4.21}$$

где

$$I_m^*=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=2}^{n-m+1}\sum_{i_3=i_2+1}^{n-m+2}\dots\sum_{i_{m+1}=i_m+1}^{n}(t_{i_{m+1}i_1}^{g}M_{i_2\dots i_{m+1}}^{1i_2\dots i_m}-t_{i_mi_1}^{g}M_{i_2\dots i_{m+1}}^{1i_2\dots i_{m-1}i_{m+1}}+\dots+(-1)^{m+1}t_{i_2i_1}^{g}M_{i_2\dots i_{m+1}}^{1i_3\dots i_{m+1}}+$$
$$+(-1)^m t_{1i_1}^{g}M_{i_2\dots i_{m+1}}^{i_2\dots i_{m+1}})\times f_{i_1}(z+a_{i_1}+\dots+a_{i_{m+1}}). \tag{4.22}$$

Доказательство этого утверждения проведем по индукции.

Для значения $m=2$ утверждение верно (см. (4.20)). Пусть соотношение (4.21) верно для значения $m=k$. Докажем, что тогда (4.21) верно и для значения $m=k+1$.

Рассмотрим выражение I_k^* (формула (4.22) при значении $m=k$). Также рассмотрим подматрицу матрицы T, расположенную в строках и столбцах с номерами $1,i_1,i_2,\dots,i_{k+1}$. Заметим, что если $i_1\in\{i_2,\dots,i_{k+1}\}$, то в аргументе суммирования в (4.22) элементы i_1-го столбца умножаются на алгебраические дополнения к соответствующим элементам 1-го столбца. По теореме о фальшивом разложении определителя в этом случае аргумент суммирования в (4.22) равен нулю.

Если же $i_1\notin\{i_2,\dots,i_{k+1}\}$, то

$$t_{i_{k+1}i_1}^{g}M_{i_2\dots i_{k+1}}^{1i_2\dots i_k}-t_{i_ki_1}^{g}M_{i_2\dots i_{k+1}}^{1i_2\dots i_{k-1}i_{k+1}}+\dots+(-1)^{k+1}t_{i_2i_1}^{g}M_{i_2\dots i_{k+1}}^{1i_3\dots i_{k+1}}+(-1)^k t_{1i_1}^{g}M_{i_2\dots i_{k+1}}^{i_2\dots i_{k+1}}=$$
$$=\begin{cases}(-1)^{k+2}M_{i_1i_2\dots i_{k+1}}^{1i_2\dots i_{k+1}}, & \text{если}\quad 1\le i_1<i_2,\\ -(-1)^{k+2}M_{i_2i_1\dots i_{k+1}}^{1i_2\dots i_{k+1}}, & \text{если}\quad i_2<i_1<i_3,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ M_{i_2\dots i_{k+1}i_1}^{1i_2\dots i_{k+1}}, & \text{если}\quad i_{k+1}<i_1.\end{cases} \tag{4.23}$$

Рассмотрим область изменения индексов в выражении, определяющем I_k^*: $\{1\le i_1\le n, 2\le i_2\le n-k+1, i_2+1\le i_3\le n-k+2,\dots,i_k+1\le i_{k+1}\le n\}$. Разобьем ее на подобласти в соответствии с соотношением (4.23).

Учитывая (4.23) и перенося в (4.21) члены с индексом $i_1=1$ в левую часть, соотношение (4.21) можно переписать в виде:

$$f_1(z)-\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_j)\\1\le i_1<\dots<i_j\le n}}M_{i_1\dots i_j}^{i_1\dots i_j}f_j(z+a_{i_1}+\dots+a_{i_j})-$$
$$-\sum_{i_2=2}^{n-k+1}\sum_{i_3=i_2+1}^{n-k+2}\dots\sum_{i_k=i_{k-1}+1}^{n}(-1)^{k+2}M_{1i_2\dots i_k}^{1i_2\dots i_k}f_1(z+a_1+\dots+a_{i_k})=I_{k+1}, \tag{4.24}$$

где введено обозначение

$$I_{k+1}=\sum_{i_1=2}^{n-k}\sum_{i_2=i_1+1}^{n-k+1}\sum_{i_3=i_2+1}^{n-k+2}\dots\sum_{i_k=i_{k-1}+1}^{n}(-1)^k M_{i_1 i_2\dots i_k}^{1 i_2\dots i_k} f_{i_1}(z+a_{i_1}+\dots+a_{i_k})-$$
$$-\sum_{i_2=2}^{n-k}\sum_{i_1=i_2+1}^{n-k+1}\sum_{i_3=i_1+1}^{n-k+2}\dots\sum_{i_k=i_{k-1}+1}^{n}(-1)^k M_{i_2 i_1\dots i_k}^{1 i_2\dots i_k} f_{i_1}(z+a_{i_1}+\dots+a_{i_k})+\dots+ \qquad (4.25)$$
$$+\sum_{i_2=2}^{n-k}\sum_{i_3=i_2+1}^{n-k+1}\dots\sum_{i_k=i_{k-1}+1}^{n-1}\sum_{i_1=i_k+1}^{n} M_{i_2\dots i_k i_1}^{1 i_2\dots i_k} f_{i_1}(z+a_{i_1}+\dots+a_{i_k}).$$

Меняя индексы суммирования во всех слагаемых (4.25) кроме первого, получим:

$$I_{k+1}=\sum_{i_1=2}^{n-1}\sum_{i_2=i_1+1}^{n-1}\sum_{i_3=i_2+1}^{n}\dots\sum_{i_{k+1}=i_k+1}^{n}(M_{i_1 i_2\dots i_{k+1}}^{1 i_2\dots i_k} f_{i_{k+1}}(z+a_{i_1}+\dots+a_{i_{k+1}})-$$
$$-M_{i_1 i_2\dots i_{k+1}}^{1 i_1\dots i_{k-1} i_{k+1}} f_{i_k}(z+a_{i_1}+\dots+a_{i_{k+1}})+\dots+(-1)^{k+2} M_{i_1 i_2\dots i_{k+1}}^{1 i_2\dots i_{k+1}} f_{i_1}(z+a_{i_1}+\dots+a_{i_{k+1}})]. \qquad (4.26)$$

Добавим к обеим частям (4.24) выражение $-\sum_{i_1=2}^{n-k}\sum_{i_2=i_1+1}^{n-k+1}\sum_{i_3=i_2+1}^{n-k+2}\dots\sum_{i_{k+1}=i_k+1}^{n}(-1)^{k+2} M_{i_1 i_2\dots i_{k+1}}^{i_1 i_2\dots i_{k+1}} f_1(z+a_{i_1}+\dots+a_{i_{k+1}})$. Тогда получим следующее соотношение:

$$f_1(z)-\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j+1}\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_j)\\ 1\le i_1<\dots<i_j\le n}} M_{i_1\dots i_j}^{i_1\dots i_j} f_1(z+a_{i_1}+\dots+a_{i_j})=I_{k+1}-$$
$$-\sum_{i_1=2}^{n}\sum_{i_2=i_1+1}^{n}\sum_{i_3=i_2+1}^{n}\dots\sum_{i_{k+1}=i_k+1}^{n}(-1)^{k+2} M_{i_1 i_2\dots i_{k+1}}^{i_1 i_2\dots i_{k+1}} f_1(z+a_{i_1}+\dots+a_{i_{k+1}}). \qquad (4.27)$$

Подставляя в правую часть (4.27) функции из (4.7), (4.8) получим в точности соотношение (4.21) при $m=k+1$. На этом доказательство по индукции завершено.

Теперь заметим, что I_{n-1}^* представляет собой последний член в формуле (4.6) (при $m=n$), то есть $I_{n-1}^*=(-1)^{n+1}M_{12\dots n}^{12\dots n}=(-1)^{n+1}\det T$.

Таким образом на $n-1$-ом шаге доказательство формулы (4.6) для значения $k=1$ заканчивается.

Теперь покажем, что для любой функции f_i можно получить аналогичное представление. Рассмотрим соотношение (4.5). Поменяем в векторах неизвестных соотношения (4.5) элементы с номерами 1 и i. Тогда в матрице T поменяются местами строки и столбцы с номерами 1 и i. Обозначая новую матрицу $\widetilde{T}$, получим следующее соотношение

$$\begin{pmatrix} f_i(z) \\ f_2(z) \\ \dots\dots\dots \\ f_1(z) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = \widetilde{T} \begin{pmatrix} f_i(z+a_i) \\ f_2(z+a_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_1(z+a_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(z+a_n) \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

Тогда для компоненты $f_i(z)$, как было доказано ранее, верно представление в виде

$$f_i(z) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m) \\ 1 \le i_1 < \dots < i_m \le n}} \widetilde{M}_{i_1 \dots i_m}^{i_1 \dots i_m} f_i(z + a_{i_1} + \dots + a_{i_m})), \tag{4.29}$$

где $\widetilde{M}_{i_1 \dots i_m}^{i_1 \dots i_m}$ - минор матрицы $\widetilde{T}$, расположенный в строках и столбцах с номерами $i_1,\dots,i_m$.

Заметим, что если $i_1,\dots,i_m \notin \{1,i\}$, то $\widetilde{M}_{i_1 \dots i_m}^{i_1 \dots i_m} = M_{i_1 \dots i_m}^{i_1 \dots i_m}$, поскольку все элементы этих миноров совпадают. Далее $\widetilde{M}_{1 i i_1 \dots i_m}^{1 i i_1 \dots i_m} = M_{1 i i_1 \dots i_m}^{1 i i_1 \dots i_m}$, так как один минор получается из другого двумя перестановками строк и столбцов. Также заметим, что $\widetilde{M}_{1 i_1 \dots i_m}^{1 i_1 \dots i_m} = M_{i i_1 \dots i_m}^{i i_1 \dots i_m}$ и $\widetilde{M}_{i i_1 \dots i_m}^{i i_1 \dots i_m} = M_{1 i_1 \dots i_m}^{1 i_1 \dots i_m}$.

Таким образом, получаем, что коэффициенты в правых частях соотношений для функций $f_1(z)$ и $f_i(z)$ совпадают, а сами соотношения имеют одинаковую структуру. Теорема доказана.

2. Рекуррентное соотношение для системы неоднородных функциональных уравнений.

Теперь рассмотрим неоднородную систему функциональных уравнений с запаздывающими аргументами:

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} f_1(z+a_1) \\ f_2(z+a_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(z+a_n) \end{pmatrix} + V(z), \tag{4.30}$$

где $V(z) = \begin{pmatrix} v_1(z) \\ v_2(z) \\ \dots\dots \\ v_n(z) \end{pmatrix}$ - вектор заданных функций.

Система (4.30) отличается от системы (4.5) наличием в правой части слагаемого $V(z)$. Проделаем с системой (4.30) все те же действия, что были выполнены при доказательстве теоремы из пункта 1 для однородных функциональных уравнений. Наличие в правой части (4.30) добавки $V(z)$ приводит к тому, что на каждом шаге доказательства в соответствующих соотношениях появляются линейные комбинации функций v_i, которые представляют собой сумму произведений элементов матрицы T на функции v_i от некоторых аргументов.

Объединяя вместе все линейные комбинации v_i, получим, что представление для функций $f_i(z)$ из (4.30), отличается от представления (4.6) наличием дополнительного слагаемого в правой части:

$$f_i(z) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m) \\ 1 \le i_1 < \dots < i_m \le n}} M_{i_1 \dots i_m}^{i_1 \dots i_m} f_i(z + a_{i_1} + \dots + a_{i_m}) + G_i(z),$$

где $\quad G_i(z) = G_i(v_1(z),\dots,v_n(z + a_1 + \dots + a_n)), \qquad i = \overline{1,n}$.

Отметим, что $G_i(z)$ являются ограниченными функциями при условии ограниченности функций $v_i(z)$. Это следует из того, что $G_i(z)$ представляют собой линейные комбинации функций $v_i(z)$.

§5. Краевая задача на произвольном графе.

1. Постановка краевой задачи. Рассмотрим произвольный граф, состоящий из n ограниченных ребер, соединяющих m вершин. Введем нумерацию ребер натуральными числами от 1 до n, а вершин числами от 1 до m. Обозначим через l_i, $i = 1,...,n$ длину ребра графа. На каждом ребре графа введем свою систему координат так, что один конец ребра имеет координату $x_i = 0$, а другой конец ребра имеет координату $x_i = l_i$, $i = 1,...,n$. Направление координатной оси на ребре примем за направление этого ребра.

Рассмотрим произвольную вершину графа с номером j. Обозначим $\Omega(j)$ множество номеров ребер, соединяющихся в вершине с номером j. Рассмотрим ребро графа с номером i такое, что $i \in \Omega(j)$. Введем параметр

$$z_i^j = \begin{cases} -, & \textit{если } i-\textit{ое ребро графа выходит из } j-\textit{ой вершины}, \\ +, & \textit{если } i-\textit{ое ребро графа входит в } j-\textit{ю вершину}. \end{cases}$$

Будем предполагать, что на каждом ребре графа выполнены ЛГД уравнения:

$$p_{it} + \overline{u}_i p_{ix_i} + \rho \overline{c}_i^2 u_{ix_i} = 0,$$

$$u_{it} + \frac{1}{\rho} p_{ix_i} + \overline{u}_i u_{ix_i} = 0, \qquad 0 < x_i < l_i, \qquad t > 0, \quad i = 1,...,n, \tag{5.1}$$

и заданные начальные условия

$$p_i(x_i,0) = \varphi_i(x_i), \qquad u_i(x_i,0) = \psi_i(x_i), \qquad 0 \le x_i \le l_i, \qquad i = 1,...,n. \tag{5.2}$$

Пусть также в каждой вершине графа выполнены дополнительные условия на функции $p_i(x_i,t)$, $u_i(x_i,t)$. Так, если вершина графа с номером j является внутренней вершиной графа, то значения функций $p_i(x_i,t)$ и $u_i(x_i,t)$ в граничных точках ребер, соединяющихся в вершине с номером j, связаны между собой соотношениями:

$$\sum_{i \in \Omega(j)} z_i^j (\overline{s}_i u_i(x_{i,гр},t) + \overline{\theta}_i \overline{u}_i p_i(x_{i,гр},t)) = 0, \tag{5.3}$$

$$\gamma_i p_i(x_{i,гр},t) + \delta_i u_i(x_{i,гр},t) = \gamma_k p_k(x_{k,гр},t) + \delta_k u_k(x_{k,гр},t), \quad t \ge 0, \quad \forall i,k \in \Omega(j). \tag{5.4}$$

Здесь переменная $x_{i,гр}$ совпадает с значением координаты граничной точки i-го ребра, соединенного с j-ой вершиной графа и равна либо 0, либо l_i.

В случае, если j-ая вершина графа является граничной, то в точке $x_{i,гр}$ ребра с номером i, соединенного с j-ой вершиной, выполнены однородные краевые условия:

$$\alpha_i p_i(x_{i,гр},t)+\beta_i u_i(x_{i,гр},t)=0, \quad t\ge 0. \tag{5.5}$$

2. Метод продолжений в применении к краевой задаче на произвольном графе. Как обычно, будем искать решение уравнений (3.1) на i-ом ребре графа в виде комбинации двух бегущих волн произвольного вида:

$$p_i(x_i,t)=\frac{\rho\bar{c}_i}{2}\left(f_i^+(x_i-\lambda_i^+t)-f_i^-(x_i-\lambda_i^-t)\right),$$
$$u_i(x_i,t)=\frac{1}{2}\left(f_i^+(x_i-\lambda_i^+t)+f_i^-(x_i-\lambda_i^-t)\right), \tag{5.6}$$

где $\lambda_i^+=\bar{u}_i+\bar{c}_i$, $\lambda_i^-=\bar{u}_i-\bar{c}_i$, $i=1,...,n$.

Рассмотрим произвольную внутреннюю вершину графа с номером j. Как и в предыдущих параграфах, воспользуемся дополнительными условиями (5.3), (5.4) для получения соотношений между падающими и отраженными волнами в j-ой вершине графа.

Обозначим $i_{1j},\ldots,i_{sj}$ номера ребер, соединяющихся в рассматриваемой вершине, то есть $\{i_{1j},...,i_{sj}\}=\Omega(j)$. Тогда для этой вершины волны $f_{i_{lj}}^{-z_{i_{lj}}^j}$, $l=1,...,s$, являются отраженными, а волны $f_{i_{lj}}^{z_{i_{lj}}^j}$, $l=1,...,s$, являются падающими. Заметим, что для вершин, которые находятся с других концов рассматриваемых ребер, наоборот, волны $f_{i_{lj}}^{z_{i_{lj}}^j}$ являются отраженными, а волны $f_{i_{lj}}^{-z_{i_{lj}}^j}$ являются падающими.

Как и в §4, не ограничивая общности рассмотрения, введем обозначения:

$$z=-\lambda_1^+t, \qquad F_i^+(z)=f_i^+(\frac{\lambda_i^+}{\lambda_1^+}z), \quad F_i^-(z)=f_i^-(l_i+\frac{\lambda_i^-}{\lambda_1^+}z), \qquad t_i^{\pm}=\pm\frac{l_i}{\lambda_i^{\pm}}, \qquad i=1,...,n.$$

Тогда, подставляя (5.6) в условия сопряжения (5.3), (5.4), точно так же, как в случае графов из двух и трех ребер, получим:

$$\begin{pmatrix} F_{i_{1j}}^{-z_{i_{1j}}^j}(z) \\ F_{i_{2j}}^{-z_{i_{2j}}^j}(z) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{i_{sj}}^{-z_{i_{sj}}^j}(z) \end{pmatrix} = T^j \begin{pmatrix} F_{i_{1j}}^{z_{i_{1j}}^j}(z+\lambda_1^+t_{i_{1j}}^{z_{i_{1j}}^j}) \\ F_{i_{2j}}^{z_{i_{2j}}^j}(z+\lambda_1^+t_{i_{2j}}^{z_{i_{2j}}^j}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{i_{sj}}^{z_{i_{sj}}^j}(z+\lambda_1^+t_{i_{sj}}^{z_{i_{sj}}^j}) \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

где T^j - матрица, состоящая из транспортных коэффициентов в j-ой вершине графа.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда вершина с номером j является граничной. В этом случае для получения соотношений между падающими и отраженными

волнами необходимо воспользоваться краевыми условиями (5.5). Подставляя соотношения (5.6) в граничные условия (5.5), получим:

$$F_i^{-z_i^j}(z) = T^j F_i^{z_i^j}(z + \lambda_1^+ t_i^{z_i^j}), \qquad (5.8)$$

где i - ребро, входящее в j - ю вершину, а T^j - матрица, состоящая из единственного числа $k_{i\to i}^j$, которое является коэффициентом отражения от j-ой граничной вершины графа.

Заметим, что соотношение (5.8), относящееся к граничной вершине, по форме записи не отличается от соотношения (5.7), относящегося к внутренней вершине. Равенства вида (5.7), записанные для всех вершин $j = 1,...,m$, связывают падающие и отраженные волны на всем графе. Заметим, что таких волн $2n$, так как каждая волна для одной вершины является падающей, а для противоположной ей вершине на том те ребре графа является отраженной.

Рассмотрим соотношение (5.7) для всех вершин графа $j = 1,...,m$. Как и в случае графа из двух или из трех ребер, для компактного представления формул (5.7) удобно воспользоваться векторной формой записи. Объединяя все функции, входящие в эти соотношения, в вектора неизвестных, получим:

$$V = T_g \widetilde{V}. \qquad (5.9)$$

Здесь $V = (F_{i_{11}}^{-z_{i_{11}}^1}(z),...,F_{i_{s1}}^{-z_{i_{s1}}^1}(z),...,F_{i_{1m}}^{-z_{i_{1m}}^m}(z),...,F_{i_{sm}}^{-z_{i_{sm}}^m}(z))^T$,

$$\widetilde{V} = (F_{i_{11}}^{z_{i_{11}}^1}(z + \lambda_1^+ t_{i_{11}}^{z_{i_{11}}^1}),...,F_{i_{s1}}^{z_{i_{s1}}^1}(z + \lambda_1^+ t_{i_{s1}}^{z_{i_{s1}}^1}),...,F_{i_{1m}}^{z_{i_{1m}}^m}(z + \lambda_1^+ t_{i_{1m}}^{z_{i_{1m}}^m}),...,F_{i_{sm}}^{z_{i_{sm}}^m}(z + \lambda_1^+ t_{i_{sm}}^{z_{i_{sm}}^m}))^T, \qquad (5.10)$$

а T_g - блочная диагональная матрица, на диагонали которой находятся матрицы T^j, $j = 1,...,m$.

Элементами матрицы T_g являются транспортные коэффициенты для всех вершин графа. Заметим, что как и в случае графов из двух и трех ребер, матрица T_g имеет блочную структуру:

$$T_g = \begin{pmatrix} \boxed{T^1} & & & \\ & \boxed{T^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{T^m} \end{pmatrix}$$

Переставим компоненты в векторе $\widetilde{V}$ так, чтобы в векторах V и $\widetilde{V}$ был одинаковый порядок следования компонент-функций. В этом случае уравнения (5.7) в векторной форме будут записываться с помощью матрицы T, полученной из матрицы T_g перестановкой строк и столбцов. Не ограничивая общности, зададим в векторе V следующий порядок следования компонент-функций:

$$V = (F_1^+(z),...,F_n^+(z),...,F_1^-(z),...,F_n^-(z))^T .$$

Тогда вектор $\widetilde{V}$ принимает вид:

$\widetilde{V} = (F_1^+(z+\lambda_1^+ t_1^+),...,F_n^+(z+\lambda_1^+ t_n^+),...,F_1^-(z+\lambda_1^+ t_1^-),...,F_n^-(z+\lambda_1^+ t_n^-))^T$ и соотношение (5.9) записывается следующим образом:

$$V = T\widetilde{V} . \qquad (5.10)$$

Важным для дальнейшего является то, что матрица T получена из матрицы T_g перестановкой строк и столбцов, а следовательно определитель матрицы T с точностью до знака равен определителю матрицы T_g.

Применим к соотношению (5.10) теорему, доказанную в §4. Дальнейшие рассуждения проведем на примере первой компоненты вектора V, то есть функции $F_1^+(z) = f_1^+(z)$.

Рекуррентное соотношение для функции $f_1^+(z)$, в соответствие с доказанной теоремой (см. §4), имеет следующий вид:

$$f_1^+(z) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{(i_1,...,i_k) \\ 1 \le i_1 < ... < i_k \le n}} M_{i_1...i_k i_1+n...i_k+n}^{i_1...i_k i_1+n...i_k+n} f_1^+(z+\lambda_1^+(t_{i_1}^* + ... + t_{i_k}^*))), \qquad (5.11)$$

где $M_{i_1...i_k i_1+n...i_k+n}^{i_1...i_k i_1+n...i_k+n}$ - минор матрицы T, расположенный в строках и столбцах с номерами $i_1,...,i_k,(i_1+n),...,(i_k+n)$.

Из формулы (5.11) следует, что значение функции f_1^+ в произвольной точке $z \le l_1 - \lambda_1^+(t_1^* + ... + t_n^*)$ выражается через значения этой же функции в других точках, лежащих на оси z правее.

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть параметры сосудов удовлетворяют условиям $t_1^* = ... = t_n^* = t^*$. Будем также предполагать, что функция f_1^+ известна на начальном интервале $l_1 - \lambda_1^+(t_1^* + ... + t_n^*) \le z \le l_1$ и равна $f_1^+(z) = \Phi_1^+(z)$. В каждом

конкретном случае функцию $\Phi_1^+(z)$ можно определить с помощью методики, описанной в параграфах, посвященных графам из одного, двух и трех ребер.

Введем на полуоси $(-\infty, l_1]$ равномерную разностную сетку с узлами $z_j = -jh + z_0$, $j = 0,1,2,...$, где $h = \lambda_1^+ t^*$, $l_1 - \lambda_1^+ t^* \le z_0 \le l_1$. Обозначим $y_j = f_1^+(z_j)$. Отметим, что $y_0 = \Phi_1^+(z_0)$, … $y_{n-1} = \Phi_1^+(z_{n-1})$ заданы.

Тогда рекуррентное соотношение (5.11), записанное в узлах разностной сетки, принимает вид:

$$y_j + a_1 y_{j-1} + ... + a_n y_{j-n} = 0, \tag{5.12}$$

где a_i - константы, равные соответствующим минорам, а $a_n = (-1)^{n+1} \det T$. В совокупности с значениями $y_0, \ldots, y_{n-1}$ соотношение (5.12) представляет собой задачу Коши для однородного разностного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение для уравнения (5.12) имеет вид

$$q^n + a_1 q^{n-1} + ... + a_n = 0. \tag{5.13}$$

Пусть q_i - корень уравнения (5.13) кратности d_i, $1 \le i \le s$, $d_1 + ... + d_s = n$.

Известно [2], что решение уравнения (5.12) имеет вид

$$y_k = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=0}^{d_j - 1} c_j^i k^j \right) q_i^k \tag{5.14}$$

где c_j^i - константы, определяющиеся через начальные значения y_0, $y_1, \ldots, y_{n-1}$.

Формула (5.14) дает значения функции f_1^+ в точке z_j. Для произвольного значения z, выбирая z_0 из промежутка $l_1 - \lambda_1^+ t^* \le z_0 \le l_1$ так, чтобы z совпало с узлом z_j дискретной сетки, получаем, что формула (5.14) является соотношением, позволяющее находить значение функции f_1^+ в любой точке z промежутка $(-\infty, l_1]$.

Из соотношения (5.14) следует, что если все корни характеристического уравнения (5.13) по модулю не превосходят единицы и нет кратных корней по модулю равных единице, то функция f_1^+ является ограниченной. Если хотя бы один из корней характеристического уравнения по модулю больше единицы или существуют кратные корни, по модулю равные единице, то функция f_1^+ не является ограниченной.

Заметим, что по теореме Виета $q_1^{d_1}...q_s^{d_s} = (-1)^n \det T$. Поэтому, если $|\det T| > 1$, то хотя бы один корень уравнения (5.13) по модулю больше единицы.

Вспомним, что матрица T отличается от матрицы T_g перестановкой строк и столбцов, а значит их определители по модулю равны $|\det T| = |\det T_g|$.

Также вспомним, что матрица T_g имеет блочную структуру, а значит

$$|\det T| = |\det T_g| = \left|\prod_{j=1}^{m} \det T^j\right|. \qquad (5.15)$$

Следовательно, достаточное условие роста амплитуды колебаний на произвольном графе в случае $t_1^* = ... = t_n^* = t^*$, исходя из равенства (5.15), принимает вид:

$$\left|\prod_{j=1}^{m} \det T^j\right| > 1. \qquad (5.16)$$

Неравенство (5.16) является удобным для проверки и может эффективно использоваться для прогнозирования аномальных ситуаций на графе кровеносной системы человека.

§6. Численное решение краевой задачи для уравнений гемодинамики на графе из двух ребер.

1. Постановка расчетной задачи. Рассмотрим граф, описанный в §2 (см. рис.1). Пусть на каждом ребре графа выполняются уравнения:

$$\begin{aligned}
&S_{it} + (S_i U_i)_{x_i} = 0, \\
&U_{it} + \left(\frac{U_i^2}{2} + \frac{P_i}{\rho}\right)_{x_i} = 0, \quad 0 < x_i < l_i, \quad t > 0, \\
&S_i = S_i(P_i), \\
&P_i(x_i, 0) = \overline{p}_i + \varphi_i(x_i), \\
&U_i(x_i, 0) = \overline{u}_i + \psi_i(x_i), \quad 0 \le x_i \le l_i, \quad i = 1,2,
\end{aligned} \tag{6.1}$$

в граничных вершинах графа задано постоянное давление:

$$P_i(l_i, t) = \overline{p}_i, \quad t \ge 0, \quad i = 1,2, \tag{6.2}$$

а во внутренней вершине графа функции $P_i(x_i, t)$ и $U_i(x_i, t)$ связаны дополнительными условиями равенства потоков и равенства давлений:

$$\begin{aligned}
&S_1(0,t)U_1(0,t) = S_2(0,t)U_2(0,t), \\
&P_1(0,t) = P_2(0,t), \quad t \ge 0.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

В качестве $S_i(P_i)$, $i = 1,2$, использовались функции вида [7]:

$$S_i(P_i) = S_{\min i} + \frac{S_{\max i} - S_{\min i}}{P_{\max i} - P_{\min i}}(P_i - P_{\min i}), \quad P_{\min i} < P_i < P_{\max i}. \tag{6.4}$$

Начальные возмущения стационарного значения давления задавались формулами:

$$\varphi_1(x_1) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_1 \in [0, y_1] \cup [y_2, l_1], \\ A, \text{ если } x_1 \in (y_1, y_2), \end{cases} \tag{6.5}$$

$$\varphi_2(x_2) = 0.$$

Начальные возмущения стационарного значения скорости полагались равными нулю.

Задаче (6.1)-(6.3) соответствует линеаризованная задача (2.1)-(2.4), (2.7) с параметрами $\alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \alpha_1^0 = \alpha_2^0 = 1$, $\beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_1^0 = \beta_2^0 = 0$ и граничными условиями $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$. Задача (6.1)–(6.3) решается численно с помощью комплекса программ CVSS [7]. Проводится сравнение численного решения задачи (6.1)-(6.3) с аналитическим решением задачи (2.1)-(2.4), (2.7) на начальных этапах развития колебаний [9].

В расчетах параметры стационарных решений полагались равными $\overline{p}_1 = \overline{p}_2 = 100$ мм.рт.ст., $\overline{u}_1 = \overline{u}_2 = 20$ см/с, $\overline{s}_1 = \overline{s}_2 = 6\,\text{см}^2$. Параметры функции $S_1(P_1)$ полагались равными $P_{\min 1}$=80мм.рт.ст., $P_{\max 1}$=120мм.рт.ст., $S_{\min 1} = 4\,\text{см}^2$, $S_{\max 1} = 8\,\text{см}^2$, параметры функции $S_2(P_2)$ варьировались. Длина первого сосуда равна $l_1 = 5$ см. Параметры функции $\varphi_1(x_1)$ полагались равными $y_1 = 1$ см, $y_2 = 2$ см, $A = 1$ мм.рт.ст. Длина второго сосуда варьировалась для получения различных значений отношения $\dfrac{t_1^*}{t_2^*}$.

Результаты расчетов приведены в виде графиков зависимости лишь давления от времени в фиксированной точке первого сосуда с координатой $x = 4$ см. Графики для скорости в первом сосуде и результаты расчетов давления и скорости во втором сосуде имеют аналогичный качественный вид.

2. Результаты расчетов в случае двух "равновременных" ребер. В пункте 4 § 2 для случая $t_1^* = t_2^*$ показано, что если корни q_1, q_2 характеристического уравнения различны и по модулю не превосходят единицы, то решение линеаризованной задачи является ограниченным. Если же хотя бы один из корней по модулю больше единицы, то амплитуда решения будет неограниченно расти во времени.

Были проведены расчеты для случая $t_1^* = t_2^* = 0{,}036\,c$. Результаты численных расчетов подтверждают выводы, сделанные в §2. Проиллюстрируем полученные результаты на следующем примере. Будем варьировать параметры функции $S_2(P_2)$ для получения различных значений корней q_1, q_2, а длину l_2 подберем из условия $t_1^* = t_2^*$.

На рисунке 2а представлен результат расчета с $q_1 = 1.0$, $q_2 = -0.9$. Такие значения корней получаются при следующем выборе параметров функции $S_2(P_2)$: $P_{\min 2}$=90мм.рт.ст., $P_{\max 2}$=110мм.рт.ст., $S_{\min 2} = 3\,\text{см}^2$, $S_{\max 2} = 9\,\text{см}^2$. На рисунке 2б представлен результат расчета с $P_{\min 2}$=80мм.рт.ст., $P_{\max 2}$=120мм.рт.ст., $S_{\min 2} = 3\,\text{см}^2$, $S_{\max 2} = 9\,\text{см}^2$, которые дают $q_1 = 1.0$, $q_2 = -0.97$.

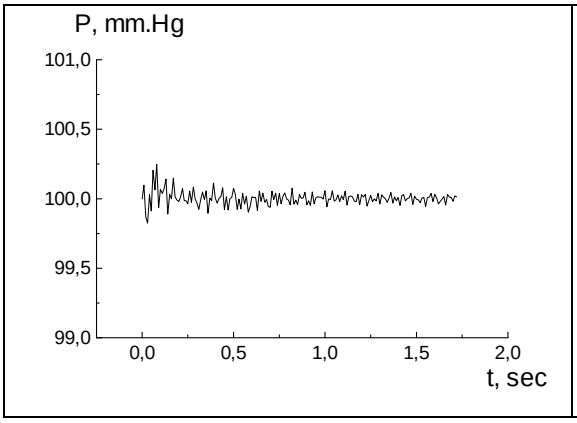


Рис. 2а

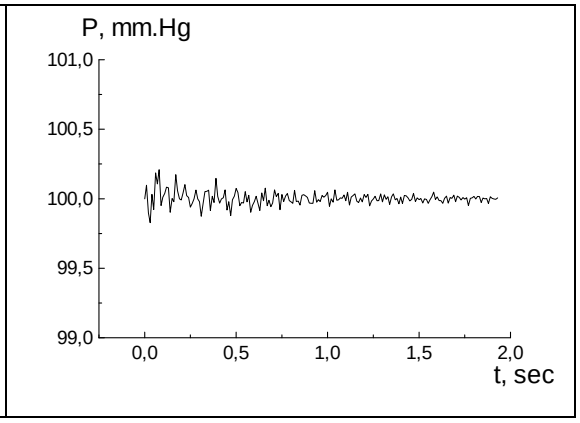


Рис. 2б

Из приведенных графиков видно, что в обоих случаях решение является ограниченным. В случае с меньшим по модулю корнем q_2 (рис. 2а) затухание начального импульса происходит быстрее. Полного исчезновения отклонений решения от значения $\overline{p}_1$ не происходит, что согласуется с выводами, следующими из аналитических выражений (2.51)-(2.54), в которых один из корней характеристического уравнения равен единице.

На рисунке 3а представлен результат расчета с $q_1 = 1.0$, $q_2 = -1.04$. Такие значения корней получаются при следующих значениях параметров функции $S_2(P_2)$: $P_{\min 2}$=80мм.рт.ст., $P_{\max 2}$=120мм.рт.ст., $S_{\min 2} = 5\,\text{см}^2$, $S_{\max 2} = 7\,\text{см}^2$. На рисунке 3б представлен результат расчета с $P_{\min 2}$=70мм.рт.ст., $P_{\max 2}$=130мм.рт.ст., $S_{\min 2} = 5\,\text{см}^2$, $S_{\max 2} = 7\,\text{см}^2$, которые дают $q_1 = 1.0$, $q_2 = -1.06$.

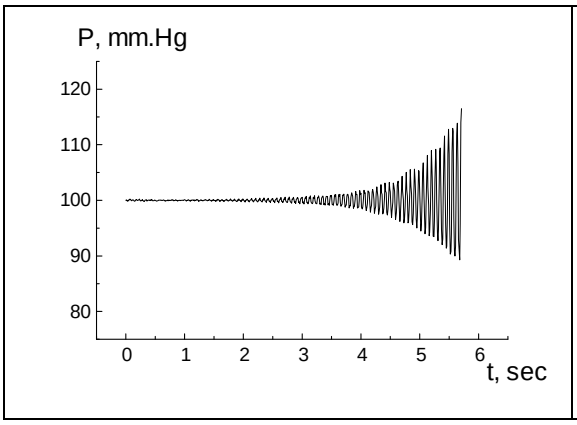


Рис. 3а

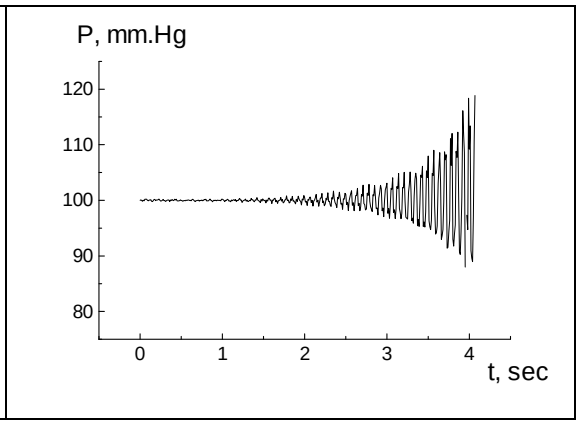


Рис. 3б

Из приведенных результатов видно, что на начальной линейной стадии процесса наблюдается экспоненциальный по времени рост амплитуды колебаний численного решения (рис. 3а, 3б). В случае большего по модулю значения q_2 (рис.3б) рост амплитуды колебаний происходит быстрее. Заметим, что в данных двух случаях

$\left|\det T_g\right| = \left|q_1 q_2\right| > 1$, то есть достаточное условие неограниченного роста амплитуды колебаний выполнено.

На рисунке 4 представлена зависимость от времени площади поперечного сечения, имеющего пространственную координату $x_1 = 4$ см, первого сосуда для случая $P_{\min 2}$=70мм.рт.ст., $P_{\max 2}$=130мм.рт.ст., $S_{\min 2} = 5\,\text{см}^2$, $S_{\max 2} = 7\,\text{см}^2$.

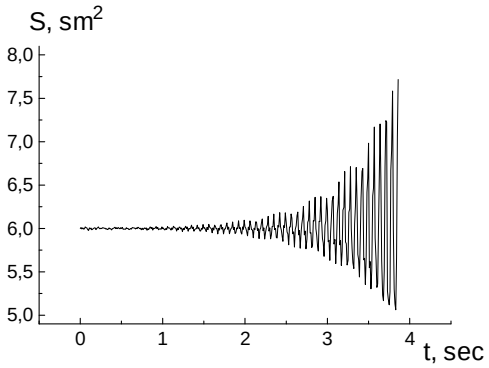


Рис. 4

Из приведенного графика видно, что характер изменения площади поперечного сечения совпадает с характером поведения давления, что обусловлено линейностью функции $S(P)$ на промежутке $[P_{\min 1}, P_{\max 1}]$.

На рисунках 5а, 5б и 5в представлены зависимости площади поперечного сечения первого сосуда от пространственной координаты, меняющейся вдоль оси сосуда. На каждом из рисунков, изображены зависимости площади поперечного сечения от пространственной переменной на три последовательные моменты времени в пределах временного промежутка между ближайшими друг к другу временными значениями, в которые достигаются минимальное и максимальное значение площади поперечного сечения (рис.4). На рисунке 5а маркером 1 помечен профиль площади поперечного сечения на момент времени $t = 3.25$ с. Маркером 2 обозначен профиль площади поперечного сечения на момент времени $t = 3.26$ с, а маркером 3 - профиль на момент времени $t = 3.27$ с. На рисунке 5б маркер 1 соответствует профилю на момент времени $t = 3.54$ с, маркером 2 обозначен профиль на момент времени $t = 3.55$ с, а маркером 3 - профиль на момент времени $t = 3.56$ с. На рисунке 5в маркер 1 соответствует профилю на момент времени $t = 3.75$ с, маркер 2 - профилю на момент времени $t = 3.76$ с, а маркер 3 - профилю на момент времени $t = 3.77$ с.

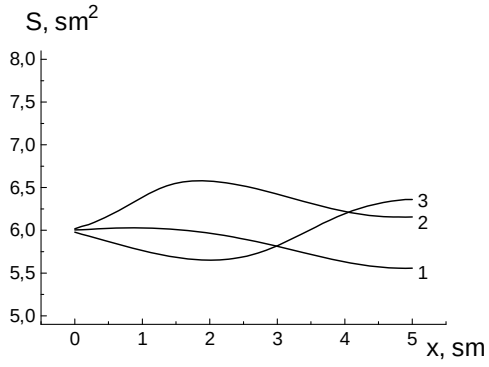
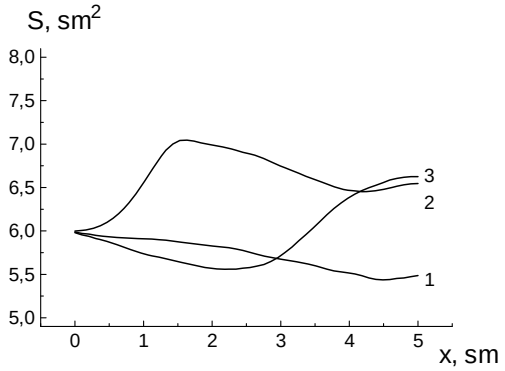


Рис. 5а



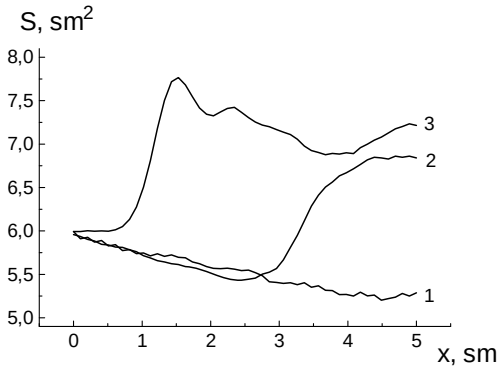


Рис. 5б Рис. 5в

Приведенные рисунки иллюстрируют процесс распространения волн по первому сосуду в режиме с нарастающей амплитудой. На графиках, помеченных маркером 1, волна давления только входит в первый сосуд из второго сосуда. На графиках, соответствующих маркеру 2, она доходит приблизительно до середины сосуда, а на графиках, обозначенных маркером 3, волна давления почти достигает конца сосуда. Видно, что амплитуда приведенных профилей растет с течением времени, что отражает процесс роста амплитуды колебаний давления. Когда амплитуда распространяющейся волны давления невелика (рис. 5а), она представляет собой пологую кривую. С течением времени амплитуда волны увеличивается (рис. 5б) и у нее появляется фронт. Когда сечение сосуда близко к значениям $S_{\min 1}, S_{\max 1}$ (рис.5в), фронт волны становится почти перпендикулярным к направлению ее распространения. Заметим, что на рисунке 5а после прохождения волны по сосуду, стенки сосуда стремятся вернутся в исходное стационарное состояние. На рисунках 5б и 5в этого уже не происходит.

На рисунке 6 показан процесс формирования волны в первом сосуде на разные моменты времени. Маркером 1 помечен профиль площади поперечного сечения сосуда

на момент времени $t = 3.26$ с, маркером 2 обозначен профиль на момент времени $t = 3.55$ с, а маркером 3 - профиль на момент времени $t = 3.76$ с.

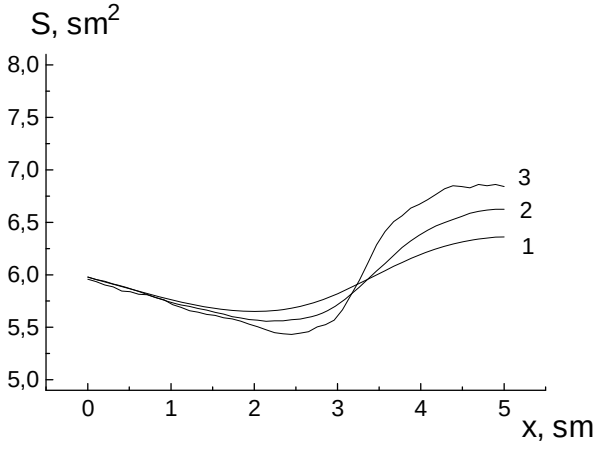


Рис. 6

Из приведенных графиков видно, как происходит рост крутизны фронта волны в режиме с нарастающей амплитудой колебаний давления и скорости пульсовой волны.

3. Результаты расчетов в случае двух ребер с неравными "характерными" временами. В пункте 5 § 2 для случая $t_1^* \neq t_2^*$ показано в линейном приближении, что если определитель матрицы T_g по модулю больше единицы, то амплитуда колебаний давления и скорости пульсовой волны неограниченно растет.

В расчетах данного пункта параметры функции $S_2(P_2)$ варьировались для получения различных значений $\det T_g$ и параметра t_2^*, а длина второго сосуда полагалась равной $l_2 = 15$ см**.**

На рисунке 7а представлен результат расчета с $\det T_g = -1.01$ и $t_2^* = 0{,}092$ с. Для получения этого значения параметры функции $S_2(P_2)$ полагались равными $P_{\min 2}$=80мм.рт.ст., $P_{\max 2}$=120мм.рт.ст., $S_{\min 2} = 4.5$ см^2, $S_{\max 2} = 7.5$ см^2. На рисунке 7б представлен результат расчета с $\det T_g = -1.07$, $t_2^* = 0{,}092$ с. Здесь $P_{\min 2}$=80мм.рт.ст., $P_{\max 2}$=120мм.рт.ст., $S_{\min 2} = 5.5$ см^2, $S_{\max 2} = 6.5$ см^2.

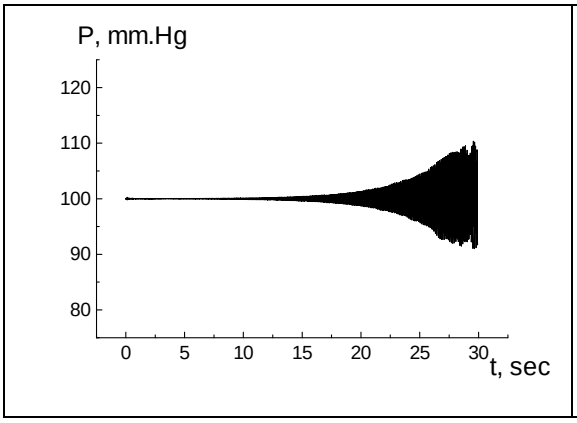


Рис. 7а

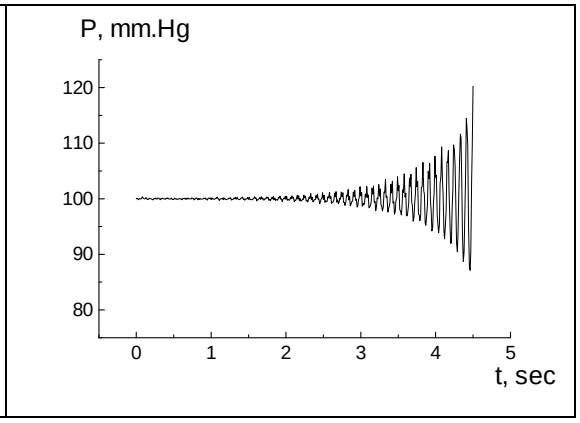


Рис. 7б

Из приведенных результатов видно, что на начальной линейной стадии процесса наблюдается экспоненциальный по времени рост амплитуды колебаний давления в численном решении (рис. 7а, 7б). В случае с большим по модулю значением определителя рост амплитуды колебаний решения происходит быстрее. Отметим, что наблюдается насыщение роста амплитуды колебаний из-за нелинейности процесса.

§7. Примеры численного решения некоторых краевых задач для уравнений гемодинамики.

1. Краевая задача на графе «тройник».

Постановка расчетной задачи. Рассмотрим граф, состоящий из трех ограниченных ребер, соединяющихся в одной вершине. Пронумеруем ребра числами от 1 до 3, а вершины числами от 0 до 3 (см. рис. 8). Как и в §6, на каждом ребре введем свою систему координат, начало которой на каждом ребре совместим с внутренней вершиной.

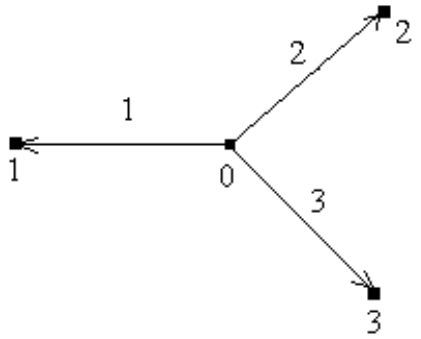


Рис. 8

Постановка расчетной задачи в трех сосудах практически совпадает с постановкой в случае двух сосудов. На каждом ребре графа предполагаются

выполненными уравнения гемодинамики (6.1). В граничных вершинах поддерживается постоянное давление, совпадающее со стационарным. Во внутренней вершине графа считаются выполненными закон сохранения потоков и условие равенства давлений. Начальное отклонение давления от стационарного фона в первом сосуде задается формулой (6.4), в остальных сосудах начальное отклонение равно нулю. Начальные возмущения скорости во всех сосудах равны нулю.

Параметры стационарных решений выбраны равными $\overline{p}_1 = \overline{p}_2 = \overline{p}_3 = 100$ мм.рт.ст., $\overline{u}_1 = -40$ см/с, $\overline{u}_2 = \overline{u}_3 = 20$ см/с, $\overline{s}_1 = \overline{s}_2 = \overline{s}_3 = 6\,\text{см}^2$. Параметры функции $S_1(P_1)$, $S_2(P_2)$ равны: $P_{\min 1}$=80мм.рт.ст., $P_{\max 1}$=120мм.рт.ст., $S_{\min 1}=4\,\text{см}^2$, $S_{\max 1}=8\,\text{см}^2$, $P_{\min 2}$=70мм.рт.ст., $P_{\max 2}$=130мм.рт.ст., $S_{\min 2}=5\,\text{см}^2$, $S_{\max 2}=7\,\text{см}^2$. Параметры функции $S_3(P_3)$ варьировались для получения разных значений определителя матрицы T_g и параметра t_3^*. Длины сосудов равны: $l_1 = 5$ см, $l_2 = 4$ см, $l_3 = 6$ см. При этом характерные времена равны: $t_1^* = 0{,}036$ с, $t_2^* = 0{,}066$ с. Параметры функции $\varphi_1(x_1)$ равны: $y_1 = 1$ см, $y_2 = 2$ см, $A = 1$ мм.рт.ст.

Результаты расчетов приведены в виде графиков зависимости давления от времени в фиксированной точке первого сосуда с координатой $x = 4$ см.

Результаты расчетов. Численные расчеты показали совпадение численного решения поставленной нелинейной задачи с аналитическим решением задачи (3.1)-(3.5) на начальных этапах развития колебаний.

Рисунок 9а иллюстрирует результат расчета, соответствующего значению $\det T_g = -1.008$ и $t_3^* = 0{,}052$ с. Для получения этого значения параметры функции $S_3(P_3)$ полагались равными $P_{\min 3}$=80мм.рт.ст., $P_{\max 3}$=120мм.рт.ст., $S_{\min 3}=3\,\text{см}^2$, $S_{\max 3}=9\,\text{см}^2$. На рисунке 9б представлен результат расчета с $\det T_g = -1.02$ и $t_3^* = 0{,}047$ с. Для получения таких значений параметры функции $S_3(P_3)$ полагались равными $P_{\min 3}$=80мм.рт.ст., $P_{\max 3}$=120мм.рт.ст., $S_{\min 3}=3.5\,\text{см}^2$, $S_{\max 3}=8.5\,\text{см}^2$. На рисунке 9в представлен результат расчета с $P_{\min 3}$=80мм.рт.ст., $P_{\max 3}$=120мм.рт.ст., $S_{\min 3}=5\,\text{см}^2$, $S_{\max 3}=7\,\text{см}^2$, которые дают значения $\det T_g = -1.07$ и $t_3^* = 0{,}03$ с.

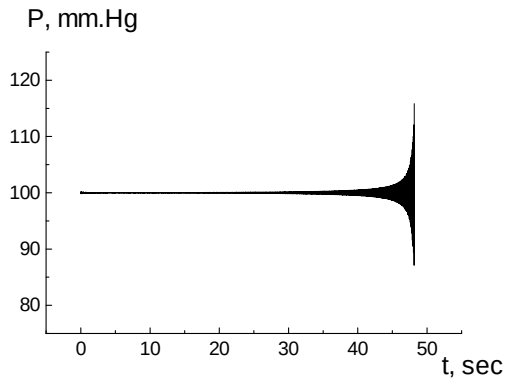


Рис. 9а

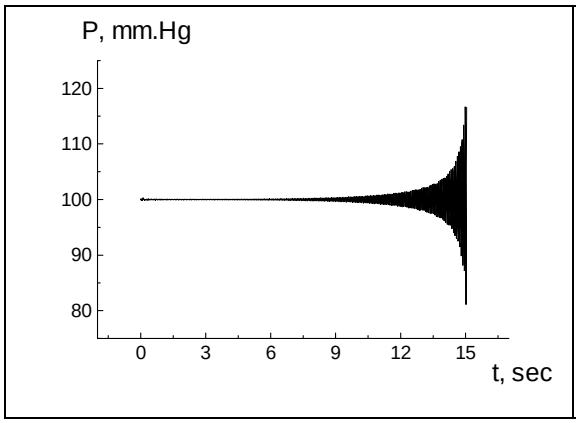


Рис. 9б

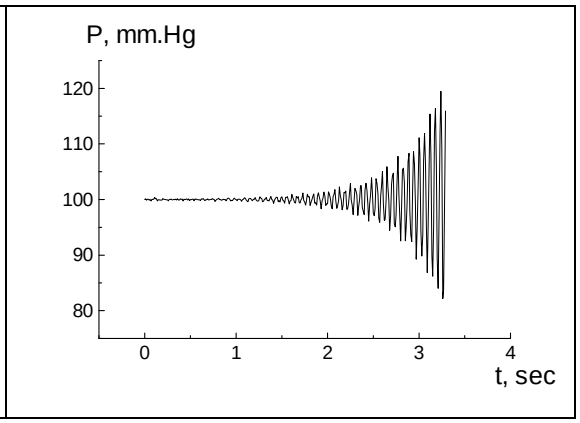


Рис. 9в

Из приведенных графиков видно, что на начальной линейной стадии процесса наблюдается экспоненциальный по времени рост амплитуды колебаний численного решения (рис. 9а, 9б, 9в), причем в случае с большим по модулю значением определителя рост амплитуды решения происходит быстрее.

2. Краевая задача на графе из трех сосудов, соединенных последовательно.

Постановка расчетной задачи. Рассмотрим граф, состоящий из трех ограниченных ребер, соединяющих четыре вершины (см. рис.10).

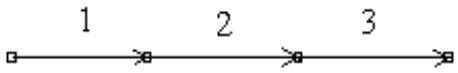


Рис. 10

Введем нумерацию ребер натуральными числами от 1 до 3, а вершин числами от 0 до 3. На каждом ребре графа введем свою систему координат так, что начало ребра имеет координату $x_i = 0$, а конец ребра имеет координату $x_i = l_i$, $i = 1,2,3$, причем конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего. Направление

координатной оси на ребре примем за направление этого ребра. Постановка расчетной задачи для данного графа совпадает с постановкой расчетной задачи из пункта 1.

В расчетах параметры стационарных решений полагались равными $\overline{p}_1 = \overline{p}_2 = \overline{p}_3 = 100$ мм.рт.ст., $\overline{u}_1 = \overline{u}_2 = \overline{u}_3 = 20$ см/с, $\overline{s}_1 = \overline{s}_2 = \overline{s}_3 = 6\,\text{см}^2$. Параметры функции $S_1(P_1)$, $S_2(P_2)$ равны: $P_{\min 1}$=80мм.рт.ст., $P_{\max 1}$=120мм.рт.ст., $S_{\min 1}=4\,\text{см}^2$, $S_{\max 1}=8\,\text{см}^2$, $P_{\min 2}$=80мм.рт.ст., $P_{\max 2}$=120мм.рт.ст., $S_{\min 2}=5\,\text{см}^2$, $S_{\max 2}=7\,\text{см}^2$. Параметры функции $S_3(P_3)$ варьировались для получения разных значений определителя матрицы T_g и характерного времени t_3^*. Длины сосудов равны: $l_1 = 5$ см, $l_2 = 3$ см, $l_3 = 6$ см. При этом характерные времена равны: $t_1^* = 0{,}036$ с, $t_2^* = 0{,}015$ с. Параметры функции $\varphi_1(x_1)$ равны: $y_1 = 1$ см, $y_2 = 2$ см, $A = 1$ мм.рт.ст.

Результаты расчетов приведены в виде графиков зависимости давления от времени в фиксированной точке первого сосуда с координатой $x = 4$ см.

Результаты расчетов. На рисунке 11а представлен результат расчета с $\det T_g = 1.06$ и $t_3^* = 0{,}024$ с. Для получения этого значения параметры функции $S_3(P_3)$ полагались равными $P_{\min 3}$=70мм.рт.ст., $P_{\max 3}$=130мм.рт.ст., $S_{\min 3}=5\,\text{см}^2$, $S_{\max 3}=7\,\text{см}^2$. На рисунке 11б представлен результат расчета с $P_{\min 3}$=75мм.рт.ст., $P_{\max 3}$=125мм.рт.ст., $S_{\min 3}=4\,\text{см}^2$, $S_{\max 3}=8\,\text{см}^2$, которые дают значения $\det T_g = 1.01$ и $t_3^* = 0{,}04$ с.

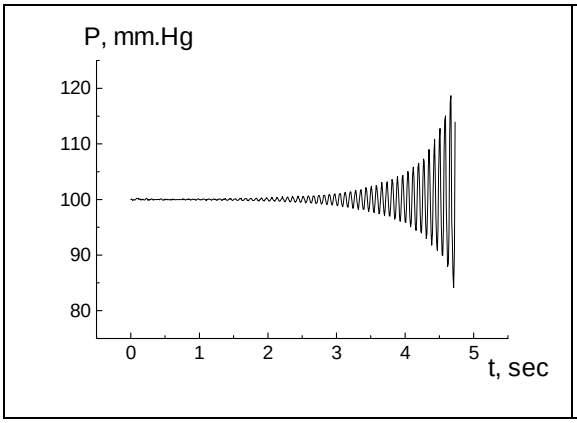


Рис. 11а

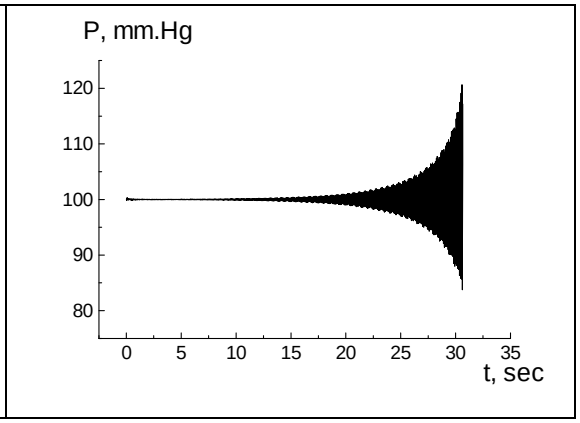


Рис. 11б

Из приведенных графиков видно, что на начальной линейной стадии процесса наблюдается экспоненциальный по времени рост амплитуды колебаний численного решения (рис. 11а, 11б), причем в случае с большим по модулю значением

определителя матрицы T_g рост амплитуды решения происходит быстрее, что соответствует результатам аналитического решения задачи (3.1)-(3.5).

3. Краевая задача на графе из четырех ребер с циклом.

Постановка расчетной задачи. Рассмотрим граф, представленный на рисунке 12.

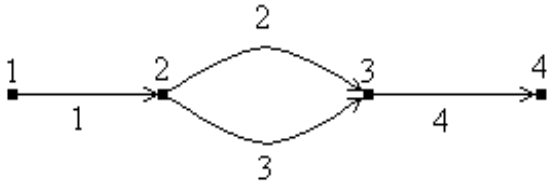


Рис. 12

Значения параметров, с которыми проводились численные расчеты приведены в таблице 1. Параметры функции $S_4(P_4)$ варьировались для получения разных значений определителя матрицы T_g.

Таблица 1

	$\overline{p}$, мм.рт.ст	$\overline{s}$, $см^2$	$\overline{u}$, см/с	$P_{\min}$, мм.рт.ст	$P_{\max}$, мм.рт.ст	$S_{\min}$, $см^2$	$S_{\max}$, $см^2$	l, см	t^*, с
1	100	6	40	80	120	4	8	5	0,036
2	100	6	20	70	130	5	7	3	0,024
3	100	6	20	80	120	5	7	4	0,01
4	100	6	40					5	

Параметры функции $\varphi_1(x_1)$ полагались равными $y_1 = 1$см, $y_2 = 2$см, $A = 1$мм.рт.ст.

Результаты расчетов. На рисунке 13а представлен результат расчета с $\det T_g = -1.07$ и $t_4^* = 0{,}015$с. Для получения этих значений параметры функции $S_4(P_4)$ полагались равными $P_{\min 4}$=75мм.рт.ст., $P_{\max 4}$=125мм.рт.ст., $S_{\min 4} = 5$см^2, $S_{\max 4} = 7$см^2. На рисунке 13б представлен результат расчета с $P_{\min 4}$=77мм.рт.ст., $P_{\max 4}$=123мм.рт.ст., $S_{\min 4} = 4$см^2, $S_{\max 4} = 8$см^2, которые дают значения $\det T_g = -1.01$ и $t_4^* = 0{,}033$с.

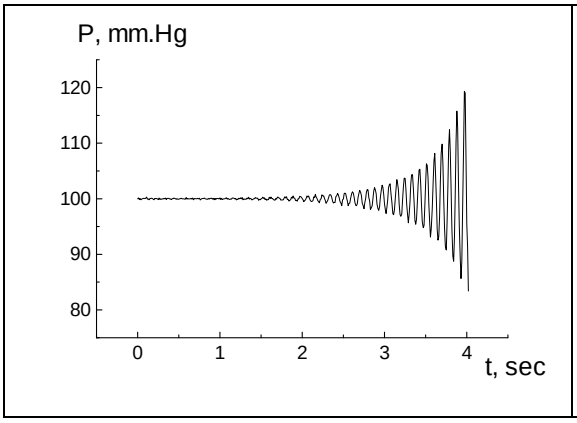


Рис. 13а

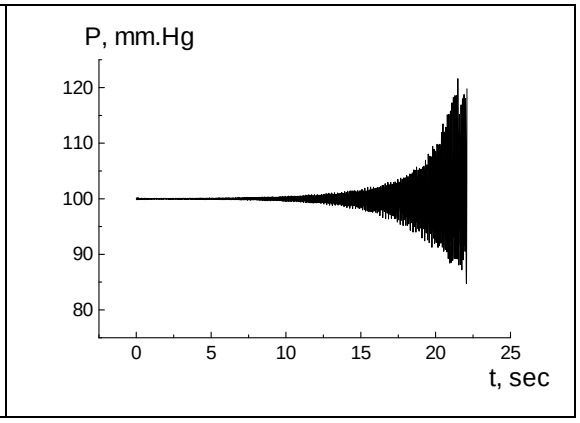


Рис. 13б

Для расчетов, представленных в данном пункте, характерны те же самые выводы, что были сделаны для ранее обсуждавшихся расчетов.

Литература.

1. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики.-М., Наука, 1972.
2. А.А.Самарский, Е.С.Николаев. Методы решения сеточных уравнений.-М., Наука, 1978.
3. А.А.Самарский, А.В.Гулин. Численные методы.-М., Наука, 1989.
4. М.В.Абакумов, К.В.Гаврилюк, Н.Б.Есикова, В.Б.Кошелев, А.В.Лукшин, С.И.Мухин, Н.В.Соснин, В.Ф.Тишкин, А.П.Фаворский. Математическая модель гемодинамики сердечно-сосудистой системы. Дифференциальные уравнения, 1997, 33(7), с. 892-898.
5. И.В.Ашметков, С.И.Мухин, Н.В.Соснин, А.П.Фаворский, А.Б.Хруленко. Анализ и сравнение некоторых аналитических и численных решений уравнений гемодинамики. Дифференциальные уравнения, 2000, т.36, №7.
6. М.В.Абакумов, И.В.Ашметков, Н.Б.Есикова, В.Б.Кошелев, С.И.Мухин, Н.В.Соснин, В.Ф.Тишкин, А.П.Фаворский, А.Б.Хруленко. Методика математического моделирования сердечно-сосудистой системы. Математическое моделирование, 2000, т.12, № 2,106-117.
7. М.В.Абакумов, Н.Б.Есикова, С.И.Мухин, Н.В.Соснин, В.Ф.Тишкин, А.П.Фаворский. Разностная схема решения задач гемодинамики на графе. Препринт. М., Диалог-МГУ, 1998, 17с.
8. И.В.Ашметков, С.И.Мухин, Н.В.Соснин, А.П.Фаворский, А.Б.Хруленко. Частные решения уравнений гемодинамики. Препринт. М., Диалог-МГУ, 1999, 43с.
9. И.В.Ашметков, С.И.Мухин, Н.В.Соснин, А.П.Фаворский, А. Б. Хруленко. Численное исследование свойств разностной схемы для уравнений гемодинамики. Препринт. М., Диалог-МГУ, 1999, 14с.
10. И.В.Ашметков, С.И.Мухин, Н.В.Соснин, А.П.Фаворский. Решение общей задачи для ЛГД уравнений на одном сосуде. Препринт. М., МАКС Пресс, 2001, 22с.
11. С.И.Мухин, Н.В.Соснин, А.П.Фаворский, А. Б. Хруленко. Линейный анализ волн давления и скорости в системе эластичных сосудов. Препринт. М., МАКС Пресс, 2001, 37с.
12. Caro C.G., Pedley T.J., Schroter R.S., Seed W.A. The mechanics of the circulation. Oxford University Press, New York – Toronto, 1978. – 624с.
13. Olsen J.H., Shapiro A.H. Large amplitude unsteady flow in liquid-filled elastic tubes. J. Fluid Mech., V29 (1967), №3, pp. 513-538.
14. В.И.Смирнов. Курс высшей математики. М., Наука, 1967.