

Содержание

Секция «Вычислительные методы»

О вычислении трансцендентов Пенлеве (Абрамов А. А., Юхно Л. Ф.)	11
Разностные методы решения краевых задач для уравнения диффузии дробного, переменного и распределенного порядков (Алиханов А. А.)	14
К оценке гладкости регулярной составляющей решения одномерного сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии (Андреев В. Б.)	16
Сеточные методы решения смешанных вариационных неравенств с операторами монотонного типа (Бадриев И. Б.)	18
Приближенные методы решения стационарных задач теории мягких сетчатых оболочек (Бадриев И. Б., Бандеров В. В.)	21
Локально-одномерные схемы для уравнения диффузии дробного порядка с переменными коэффициентами в произвольной области (Баззаев А. К., Шхануков – Лафишев М. Х.)	23
Метод решения задачи о треугольной интерфейсной трещине в телах сложной формы (Безродных С. И., Власов В. И., Скороходов С. Л.)	25
Численные методы решения сверхжестких задач Коши (Белов А. А., Калиткин Н. Н., Пошивайло И. П.)	27
Разностные методы решения краевых задач для вырождающегося псевдопараболического уравнения с переменными коэффициентами (Бештоков М. Х.)	30
Уравнения газовой динамики с «тепловым следом» (Богомолов С. В., Гудич И. Г., Есикова Н. Б.)	32
Трехслойные схемы попеременно-треугольного метода А.А. Самарского (Вабищевич П. Н.)	34
О сходимости МКЭ для решения нелинейных параболических уравнений с нелокальным пространственным оператором (Глазырина О. В., Павлова М. Ф.)	36
К теории устойчивости разностных схем в подпространствах (Гулин А. В., Морозова В. А.)	38

Оценки точности решений DG и HDG схем для квазилинейных эллиптических уравнений (Даутов Р. З., Федотов Е. М.)	40
Метод Ньютона для вычисления понижающих подпространств регулярных матричных пучков (Демьянко К. В., Нечепуренко Ю. М., Садкан М.)	42
Численное решение задачи квадратичной минимизации с эллипсоидальным ограничением и слабо компактным множеством корректности (Дряженков А. А., Потапов М. М.)	44
Вычислительные методы, сохраняющие глобальные свойства решений задачи Коши для гамильтоновых систем (Еленин Г. Г.)	46
О решении нелинейной стационарной неоднородной задачи фильтрации при наличии точечного источника (Задворнов О. А., Задворнова Г. О.)	48
Исследование задачи о равновесии незакрепленной оболочки в рамках геометрически нелинейной модели (Карчевский М. М.)	51
Об одной модификации уравнений Навье-Стокса (Кобельков Г. М.)	52
О сходимости и устойчивости разностных схем для нелинейных задач математической физики (Матус П. П.)	53
Об аппроксимации дробных разрешающих семейств (Пискарев С. И.)	55
Численный расчёт движения вязкой сжимаемой жидкости для уравнений Навье-Стокса (Попов И. В., Фрязинов И. В.)	57
Аппроксимация задач на собственные значения в гильбертовом пространстве (Соловьёв С. И.)	58
Апостериорные оценки ошибок схем МКЭ для вырождающихся эллиптических краевых задач (Тимербаев М. Р.)	61
Численные методы на основе тензорных разложений (Тыртышников Е. Е.)	63
Numerical Upscaling and Solution Methods for Simulation of Flows in Heterogeneous Porous Media (Efendiev Y., Lazarov R., Shi S.)	64

Секция «Математическое моделирование»

Математическое моделирование гемодинамики (Абакумов М. В., Борзов А. Г., Буничева А. Я., Мухин С. И., Соснин Н. В., Фаворский А. П., Хруленко А. Б., Древаль А. В., Кошелев В. Б.)	66
Многомасштабное моделирование распределения и подвижности носителей заряда в полупроводниковых гетероструктурах (Абгарян К. К., Ревизников Д. Л.)	68
Численные методы для многомерных задач аномальной диффузии (Абрашина-Жадаева Н. Г., Тимощенко И. А.)	71

Математическое исследование процессов происходящих внутри глаза и на его поверхности (Анпилов С. В., Ильютко В. П., Мокин А. Ю., Савенкова Н. П., Складчиков С. А., Кузьмин Р. Н., Новодережкин В. В.,)	72
Моделирование теплового режима работы электролизной ванны (Анпилов С. В., Ильютко В. П., Калмыков А. В., Савенкова Н. П., Кузьмин Р. Н.,)	75
Применение метода конечных элементов для моделирования волновода с би-изотропным заполнением (Боголюбов А. Н., Свешников А. Г., Мухартова Ю. В.)	78
Вычислительная плазмостатика в моделях магнитных ловушек-галатей (Брушлинский К. В., Гольдич А. С.)	80
Численное исследование одного нового класса волн в нелинейной теплопроводной среде (Васильева Д. П., Димова С. Н., Димова М. Г.)	82
Разработка программной платформы сопровождения вычислительного эксперимента Теметос (Галанин М. П., Горбунов-Посадов М. М., Ермаков А. В., Лукин В. В., Родин А. С.)	85
Моделирование селективного лазерного спекания – результаты исследований, новые задачи и разработка программного обеспечения вычислительных экспериментов на высокопроизводительных ЭВМ (Гасилов В. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Мирзаде Ф. Х., Низьев В. Г.)	86
Схема Кабаре. История развития (Головизнин В. М.)	88
Об одной нелокальной контактной задаче (Гордезиани Д. Г., Давиташвили Т. Д., Меладзе Г. В., Меладзе Ю. Г.)	89
Применение модифицированной Транспортной Модели Канонических Профилей (ТМКП) к моделированию импульсов DIII-D и MAST (Данилов А. В., Днестровский А. Ю., Днестровский Ю. Н., Лысенко С. Е., Черкасов С. В., Костомаров Д. П., Войцехович И., Романелли М.)	91
Интегральные уравнения электродинамики (Дмитриев В. И.)	93
Двухэтапный итерационный процесс для реализации консервативной разностной схемы для расчета полупроводниковой плазмы во внешнем электрическом поле (Егоренков В. А., Логинова М. М., Трофимов В. А.)	95
Математическое моделирование лазерных мишеней термоядерного синтеза (Змитренко Н. В.)	97
Уравнение Самарского-Курдюмова (Змитренко Н. В., Михайлов А. П.)	97

Интегральные уравнения в задачах дифракции электромагнитных волн (<i>Ильинский А. С., Самохин А. Б.</i>)	98
Миграция малых тел и пыли к планетам земной группы (<i>Ипатов С. И., Маров М. Я.</i>)	101
Принцип консервативности в задачах с подвижными границами (<i>Мажорова О. С., Попов Ю. П., Щерица О. В.</i>)	104
Normality and boundary behavior of arbitrary and meromorphic functions along simple curves (<i>Marković M., Pavićević Ž.</i>)	106
Проблемы моделирования коротковолнового источника излучения для нанолитографии (<i>Новиков В. Г.</i>)	109
О задачах граничного управления для квазилинейных систем уравнений гиперболического типа (<i>Холодов Я. А., Холодов А. С.</i>)	111
Mathematical modelling of turbulence in free shear flows (<i>Chechetkin V. M., Lugovsky A. Yu., Popov Yu. P.</i>)	114

Секция «Уравнения математической физики»

О разрешимости одной задачи сложного теплообмена (<i>Амосов А. А.</i>)	115
Точный в среднем асимптотический метод решения задач сопряжения. Успехи и проблемы (<i>Ахметова О. В., Ковальский А. А., Михайлов П. Н., Филиппов А. И.</i>)	116
Задача Дирихле для параболических систем в плоских областях с движущимися боковыми границами (<i>Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.</i>)	119
О t -локальной разрешимости обратных задач рассеяния для уравнения Клейна-Гордона и системы Дирака (<i>Баев А. В.</i>)	121
Сингулярно возмущенные задачи с кратным корнем вырожденного уравнения (<i>Бутузов В. Ф.</i>)	124
Модельные краевые задачи для эллиптических уравнений в конусах (<i>Васильев В. Б.</i>)	126
Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве (<i>Власов В. В., Ортиз Р. П.</i>)	129
Асимптотическое решение задачи о течении жидкости в двумерном канале с малыми периодическими неровностями на стенках (<i>Гайдуков Р. К., Данилов В. Г.</i>)	131
Единственность решения обратной задачи для квазилинейной системы уравнений в частных производных с нелокальным краевым условием (<i>Денисов А. М.</i>)	133
О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений с ограниченными коэффициентами (<i>Денисов В. Н.</i>)	134
О некоторых задачах для систем уравнений Пуассона и Стокса (<i>Дубинский Ю. А.</i>)	136

Задача Трикоми для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа с замкнутой линией вырождения (<i>Зарубин А. Н.</i>)	137
О численном решении гиперсингулярных интегральных уравнений для краевых задач дифракции электромагнитных волн (<i>Захаров Е. В., Рыжиков Г. В., Сетуха А. В.</i>)	139
О сходимости метода Галеркина для решения интегрального уравнения электрического поля для поглощающих сред (<i>Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г.</i>)	142
Об одной обратной задаче офтальмологии (<i>Ирошников Н. Г., Ларичев А. В., Николаев И. П., Разгулин А. В., Старостин А. С.</i>)	145
Разрешимость задачи Навье-Стокса в весовом пространстве (<i>Кальменов Т. Ш.</i>)	147
Обратные задачи одновременного определения двух коэффициентов в параболическом уравнении (<i>Камынин В. Л.</i>)	149
О кратных корнях спектральной задачи, возникающей при решении одной смешанной задачи для уравнения теплопроводности со смешанной производной в граничном условии (<i>Капустин Н. Ю.</i>)	150
Задача сопряжения для неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка (<i>Кожанов А. И.</i>)	152
О постановке граничных задач для гиперболических уравнений третьего порядка и их классические решения (<i>Козловская И. С., Корзюк В. И., Мандрик А. А.</i>)	153
Классические решения задач с интегральными условиями для одномерного волнового уравнения (<i>Козловская И. С., Корзюк В. И., Моисеев Е. И.</i>)	155
Разрушение решений нелинейных уравнений типа Кадомцева-Петвиашвили и Захарова-Кузнецова (<i>Корпусов М. О., Свешников А. Г., Юшков Е. В.</i>)	158
О краевых задачах для оператора Штурма-Лиувилля с неклассической асимптотикой спектра (<i>Макин А. С.</i>)	161
Об одной задаче оптимального граничного управления силой с однородным граничным условием типа торможения (<i>Моисеев Е. И., Холомеева А. А.</i>)	163
Неклассические постановки задач для уравнения Лаврентьева-Бицадзе и их свойства (<i>Моисеев Т. Е.</i>)	165
О начально-краевой задаче процесса нагрева неоднородной среды «ТЭН-песок-воздух» (<i>Наимов А. Н., Сеницын А. А.</i>)	168
О нелокальных внутреннекраевых условиях, возникающих при дискретизации краевых задач для уравнений математической физики (<i>Нахушев А. М.</i>)	170

О математических моделях фрактального броуновского движения (Нахушев В. А.)	172
Нелокальная эллиптическая краевая задача типа задачи Бицадзе-Самарского (Нахушева З. А.)	174
Асимптотический принцип сравнения в нелинейных задачах математической физики (Нефедов Н. Н.)	176
Об одной нелокальной граничной задаче для гиперболического уравнения в гильбертовом пространстве (Орловский Д. Г.) . .	178
О граничных задачах в полупространствах и задачах сопряжения на гиперплоскости для систем уравнений с частными производными (Плещинский Н. Б.)	180
Multidimensional Protter-Morawetz Problem (Pоріванов N.)	182
Обратные и прямые нелокальные по времени задачи для эволюционных уравнений (Прилепко А. И.)	184
Краевая задача для уравнения в частных производных дробного порядка (Псху А. В.)	185
Задача с нелокальным начальным условием для волнового уравнения (Пулькина Л. С.)	187
Об одной задаче Лакса (внутренняя турбулентность) (Радкевич Е. В.)	189
Аналог задачи Трикоми-Франкля для уравнения смешанного типа с частной дробной производной (Репин О. А.)	190
Неклассические релаксационные колебания в сингулярно возмущенных системах дифференциальных уравнений (Розов Н. Х.)	191
Обратные коэффициентные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа (Сабитов К. Б.)	192
Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с не усиленно регулярными краевыми условиями (Садыбеков М. А.)	194
Nonlocal Problems for Vlasov Equations in Infinite Cylinder (Skubachevskii A. L.)	196
Об едином подходе к постановкам краевых задач для уравнений смешанного типа (Солдатов А. П.)	197
Обратные задачи для уравнения эллиптического типа (Соловьёв В. В.)	199
Взрывные решения в прямых и обратных задачах для эволюционных уравнений (Тихонов И. В.)	201
Об одной характеристической задаче для системы функционально-дифференциальных уравнений первого порядка (Уткина Е. А.)	203

Уточнение асимптотики решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка с помощью локализованных законов сохранения максвелловского типа (<i>Хенкин Г. М., Шанинин А. А.</i>)	206
Прохождение плоской звуковой волны через слой композита с компонентами из упругого и вязкоупругого материалов (<i>Шамеев А. С., Шумилова В. В.</i>)	208
О дифференциальных пучках на графе с циклом (<i>Юрко В. А.</i>) . . .	209
Именной указатель	211

СЕКЦИЯ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ»

О ВЫЧИСЛЕНИИ ТРАНСЦЕНДЕНТОВ ПЕНЛЕВЕ

Абрамов Александр Александрович¹

Юхно Людмила Филипповна²

1: *д.ф – м. н., профессор, Вычислительный центр имени
А. А. Дородницына РАН, Москва, Россия*

2: *к.ф – м. н., Институт прикладной математики имени М. В.
Келдыша РАН, Москва, Россия*

E-mail: alalabr@ccas.ru, yukhno@imamod.ru

Трансценденты Пенлеве играют важную роль в нелинейной математической физике (см. [1]). В докладе излагается численный метод решения задачи Коши для всех шести уравнений Пенлеве. Трудность состоит в том, что решения могут иметь особые точки типа полюса, а сами уравнения имеют особенности в точках, где решения принимают некоторые значения, причем все такие точки являются подвижными. (Эти точки названы критическими). Всего для шести уравнений Пенлеве, в зависимости от значений их числовых параметров, имеется 23 вида критических точек. В процессе численного решения требуется обнаружить критическую точку и определить ее тип, найти ее положение, пройти через нее, а также получить удобное представление решения в окрестности этой точки. Основа предложенного метода (см. [2-7]) состоит в переходе в окрестности критической точки от исходного уравнения к соответствующей эквивалентной системе, решение которой, а также уравнения не имеют особенностей в этой окрестности. Приводятся результаты расчетов для всех уравнений Пенлеве, демонстрирующие эффективность метода. Для примера показан график решения задачи Коши для уравнения Пенлеве II с параметром уравнения $\mu = 10$ и начальными условиями $y(0) = y'(0) = 1$.

Иллюстрации

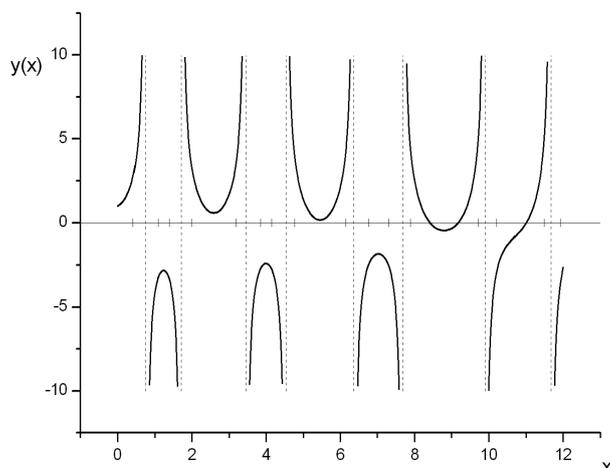


Рис. 1: Уравнение Пенлеве II

Список литературы

1. Итс А. Р., Капаев А. А., Новокшенов В. Ю., Фокас А. С. Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ 'Регулярная и хаотическая динамика', 2005.
2. Абрамов А. А., Юхно Л. Ф. Численное решение задачи Коши для уравнений Пенлеве I, II // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52, № 3. С. 379 – 387.
3. Абрамов А. А., Юхно Л. Ф. Численное решение задачи Коши для уравнения Пенлеве III // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 7. С. 925 – 934.
4. Абрамов А. А., Юхно Л. Ф. Численное решение уравнения Пенлеве IV // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52, № 11. С. 2023 – 2032.
5. Абрамов А. А., Юхно Л. Ф. Численное решение уравнения Пенлеве V // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 1. С. 58 – 71.
6. Абрамов А. А., Юхно Л. Ф. Численное решение уравнения Пенлеве VI // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 2. С. 249 – 262.

7. Абрамов А. А., Южно Л. Ф. Об одном методе численного решения уравнений Пенлеве // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 5. С. 702 – 726.

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО, ПЕРЕМЕННОГО И РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКОВ

Алиханов Анатолий Алиевич

к.ф – м. н., декан математического факультета

E-mail: alikhanov-tom@yandex.ru

Кабардино-Балкарский государственный университет имени

Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия

В данной работе как для дифференциальных так и для разностных задач получены априорные оценки для решения уравнения диффузии дробного, переменного и распределенного порядков.

1. Первая краевая задача. В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ рассматривается первая краевая задача

$$\mathbb{P}_{(\omega)}^{(\theta)} (\partial_{0t}) u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t)u + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

где

$$\mathbb{P}_{(\omega)}^{(\theta)} (\partial_{0t}) u(x, t) = \int_{\alpha}^{\beta} d\gamma \sum_{r=1}^m \omega_r(x, \gamma) \partial_{0t}^{\theta_r(x, \gamma)} u(x, t),$$

$$\alpha < \beta, \quad 0 < \theta_r(x, \gamma) < 1, \quad \omega_r(x, \gamma) \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad \text{для всех}$$

$$(x, \gamma) \in [0, l] \times [\alpha, \beta], \quad \int_{\alpha}^{\beta} d\gamma \sum_{r=1}^m \omega_r(x, \gamma) > 0, \quad \theta_r(x, \gamma) \in C[0, l] \times [\alpha, \beta],$$

$$0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2, \quad q(x, t) \geq 0 \quad \text{всюду на } \bar{Q}_T,$$

$\partial_{0t}^{\theta_r(x, \gamma)} u(x, \eta) = \int_0^t u_{\eta}(x, \eta) (t - \eta)^{-\theta_r(x, \gamma)} d\eta / \Gamma(1 - \theta_r(x, \gamma))$ - дробная производная Капуто порядка $\theta_r(x, \gamma)$.

Теорема 1. Если $k(x, t) \in C^{1,0}(\bar{Q}_T)$, $q(x, t), f(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$, $k(x, t) \geq c_1 > 0$, $q(x, t) \geq 0$ всюду на \bar{Q}_T , тогда для решения $u(x, t)$ задачи (1)–(2) справедлива априорная оценка:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \mathbb{P}_{(\omega)}^{(\theta-1)} (D_{0t}) u^2(x, t) dx + c_1 \int_0^t \|u_x(x, s)\|_0^2 ds \leq \\ & \leq \frac{l^2}{2c_1} \int_0^t \|f(x, s)\|_0^2 ds + \int_0^l u_0^2(x) dx \int_{\alpha}^{\beta} d\gamma \sum_{r=1}^m \frac{\omega_r(x, \gamma) t^{1-\theta_r(x, \gamma)}}{\Gamma(2 - \theta_r(x, \gamma))}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbb{P}_{(\omega)}^{(\theta-1)}(D_{0t}) = \int_{\alpha}^{\beta} d\gamma \sum_{r=1}^m \omega_r(x, \gamma) D_{0t}^{\theta_r(x, \gamma)-1}$.

Из априорной оценки (3) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1)–(2) от входных данных.

В прямоугольнике \bar{Q}_T вводится равномерная сетка $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_{\tau}$, где $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = l\}$, $\bar{\omega}_{\tau} = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0, \tau j_0 = T\}$.

Задаче (1)–(3) ставится в соответствие следующая разностная схема

$$\mathbb{P}_{(\omega)}^{(\theta)}(\Delta_{0t_{j+1}}) y_i = \Lambda y_i^{j+1} + \varphi_i^{j+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, j_0-1, \quad (4)$$

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_{\tau}, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (5)$$

где $\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x - dy$, $a_i^{j+1} = k(x_{i-1/2}, t_{j+1})$, $d_i^{j+1} = q(x_i, t_{j+1})$, $\varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+1})$, $\Delta_{0t_j}^{\theta_r(x_i, \gamma)} y_i = \sum_{s=0}^j (t_{j-s+1}^{1-\theta_r(x_i, \gamma)} - t_{j-s}^{1-\theta_r(x_i, \gamma)}) y_{t,i}^s / \Gamma(2 - \theta_r(x_i, \gamma))$ - разностный аналог дробной производной Капуто порядка $\theta_r(x_i, \gamma)$.

Разностная схема (4)–(5) имеет порядок аппроксимации $O(h^2 + \tau^{2-\theta_{\max}})$, где $\theta_{\max} = \max_{r, x, \gamma} \{\theta_r(x, \gamma)\}$.

Теорема 2. *Разностная схема (4)–(5) абсолютно устойчива и для её решения справедлива априорная оценка*

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\gamma \sum_{r=1}^m \left(\frac{\omega_r(x_i, \gamma)}{\Gamma(2 - \theta_r(x_i, \gamma))}, \sum_{s=0}^j (t_{j-s+1}^{1-\theta_r(x_i, \gamma)} - t_{j-s}^{1-\theta_r(x_i, \gamma)}) (y_i^{s+1})^2 \right) +$$

$$+ c_1 \sum_{s=0}^j \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 \tau \leq \frac{l^2}{2c_1} \sum_{s=0}^j \|\varphi^s\|_0^2 \tau + \int_{\alpha}^{\beta} d\gamma \sum_{r=1}^m \left(\frac{\omega_r(x_i, \gamma) t_{j+1}^{1-\theta_r(x_i, \gamma)}}{\Gamma(2 - \theta_r(x_i, \gamma))}, u_0^2(x_i) \right), \quad (6)$$

где $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$, $(y, v) = \sum_{i=1}^N y_i v_i h$, $\|y\|_0^2 = (y, y)$, $\|y\|_0^2 = (y, y)$.

Из априорной оценки (6) следует устойчивость и сходимость разностной схемы (4)–(5) к решению задачи (1)–(2) со скоростью $O(h^2 + \tau^{2-\theta_{\max}})$.

Аналогичные результаты получены для третьей краевой задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект №14-01-31246).

Список литературы

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
2. Alikhanov A. A. Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation, arXiv preprint arXiv:1311.2035, 2013

**К ОЦЕНКЕ ГЛАДКОСТИ РЕГУЛЯРНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ РЕШЕНИЯ
ОДНОМЕРНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ
КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ**

Андреев Владимир Борисович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: andreev@смс.msu.su

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Ищется решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) + r(x)u'(x) + q(x)u(x) &= f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) &= u_0, \quad u(1) = u_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Предполагается, что

$$r(x) \geq 2r_0 = \text{const} > 0$$

и, кроме того,

$$r(x), q(x), f(x) \in C^{k,\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad 0 \leq \lambda < 1, \quad (2)$$

где $C^{k,\lambda}$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций, у которых k -я производная удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ .

При малых ε задача (1) имеет в окрестности правого конца отрезка $[0, 1]$ пограничный слой, где решение быстро меняется, а его k -е производные пропорциональны ε^{-k} . При анализе численных методов решения задачи (1) необходима отдельная информация о гладкости искомого решения вне пограничного слоя и внутри него. Обычно эта информация содержится в декомпозиции решения

$$u(x) = v(x) + w(x),$$

где $v(x)$ — регулярная, а $w(x)$ — погранслойная составляющие. При этом требуется равномерная по ε оценка гладкости регулярной составляющей. Этому и посвящена данная работа.

Сначала коэффициенты и правая часть уравнения продолжают с сохранением класса и нормы с отрезка $[0, 1]$ на полуось $x \geq 0$. На полуоси рассматривается задача

$$\begin{aligned} -\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} u^*(x) + r^*(x) \frac{du^*}{dx}(x) + q^*(x)u^*(x) &= f^*(x), & 0 < x < \infty, \\ u^*(0) &= u_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |u^*(x)| < \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Сужение решения задачи (3) на отрезок $[0, 1]$ объявляется регулярной составляющей $v(x)$ решения задачи (1). Для нее при выполнении условий (2)

получены априорные оценки

$$\varepsilon |v|_{C^{k+2,\lambda}} + \|v\|_{C^{k+1}} \leq (\|f\|_{C^{k,\lambda}} + |u_0|), \quad (4)$$

где c — положительная постоянная, не зависящая от ε . Эти оценки выводятся из соответствующих оценок для решения $u^*(x)$ задачи (3), а те, в свою очередь, получаются с использованием разбиения единицы и оценок для уравнения с постоянными коэффициентами на полуоси. Последние находятся с использованием функции Грина.

Оценка (4) является неулучшаемой в том смысле, что имеет место и обратная оценка

$$\|f\|_{C^{k,\lambda}} + |u_0| \leq \frac{1}{c} (\varepsilon |v|_{C^{k+2,\lambda}} + \|v\|_{C^{k+1}}).$$

Ранее в предположениях (2) оценка (4) была известна только для $\lambda = 0$ и $k = 0, 1$. При более сильных предположениях аналогичная оценка была известна для $\lambda = 0$ и $k = 0, 1, \dots$.

Аппарат, использованный в данной работе для получения оценок (4), допускает обобщение на аналогичные двумерные задачи с переменными коэффициентами.

Список литературы

1. Miller J. J. H., O’Riordan E., Shishkin G. I. Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Singapore, World Scientific, 1996.
2. Linss T. Layer-adapted meshes for reaction-convection-diffusion problems. Vol. 1985 of Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Springer, 2010.
3. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОПЕРАТОРАМИ МОНОТОННОГО ТИПА

Бадриев Ильдар Бурханович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: ildar.badriev1@mail.ru

ИВМиИТ КФУ, Казань, Россия

Рассматриваются вариационные неравенства с операторами монотонного типа. Такие неравенства возникают при математическом описании процессов, протекающих в различных областях механики, физики, экономики и т.д. При нахождении решений вариационных неравенств используются, как правило, приближенные методы. Эти методы основаны на предварительной сеточной аппроксимации рассматриваемых нелинейных задач и последующим применением для их реализации итерационных методов.

Приводятся примеры задач, приводящих к вариационным неравенствам. Во-первых, это задачи подземной фильтрации несжимаемой жидкости и задачи об определении границ предельно равновесных целиков остаточной вязко-пластической нефти [1, 2]. Обобщенные постановки сформулированы в виде смешанного вариационного неравенства с монотонным оператором и выпуклым, липшиц-непрерывным, но, вообще говоря, недифференцируемым функционалом. Во-вторых это задачи об определении положения равновесия мягких оболочек [3], закрепленных по краям, находящихся под воздействием массовой и поверхностной нагрузки, для плоского (бесконечно длинная цилиндрическая оболочка) при наличии препятствия и пространственного (осесимметричная оболочка) случаев. Задачи сформулированы математически в виде вариационных неравенств с псевдомонотонным оператором. Ограничения в задаче об осесимметричной оболочке возникают из-за естественного условия недопущения самопересечения оболочки.

Как для задач фильтрации, так и для задач об определении положения равновесия мягких сетчатых оболочек, сформулированы условия на функции, задающие закон фильтрации и физические соотношения в оболочке, обеспечивающие разрешимость задач. Исследованы свойства решений задач.

Рассматриваются итерационные методы решения вариационных и неравенств на выпуклых замкнутых множествах с псевдомонотонным, коэрцитивным, потенциальным оператором, удовлетворяющим условию типа ограниченной липшиц-непрерывности, и собственным, выпуклым, полунепрерывным снизу, вообще говоря, недифференцируемым функционалом. Для решения вариационного неравенства предложен метод итеративной регуляризации, позволяющий рассматриваемую задачу к вариационному неравенству второго рода с оператором двойственности вместо исходного псевдомонотонного оператора и регуляризованным функционалом, решение ко-

того можно проводить известными методами. Доказано, что итерационная последовательность ограничена, и все ее слабо предельные точки являются решениями исходного вариационного неравенства. В случае гильбертова пространства, когда оператор вместо условия типа ограниченной липшиц-непрерывности и псевдомонотонности удовлетворяет условию обратной сильной монотонности, доказана сходимость всей итерационной последовательности. Для решения вариационного неравенства можно рассматривать итерационный метод без регуляризации функционала. При этом при исследовании сходимости метода можно отказаться от условия потенциальности оператора. Исследование сходимости удалось провести благодаря тому, что оператор перехода этого метода был выписан в явном виде. Этот оператор перехода является проксимальным отображением. Установлено, что множество неподвижных точек оператора перехода совпадает с множеством решений вариационного неравенства. Доказано, что оператор перехода является нерастягивающим. Более того, установлено неравенство, более сильное, чем неравенство нерастягиваемости, что и позволило доказать его асимптотическую регулярность, а также слабую сходимость итерационной последовательности. Если оператор, входящий в вариационное неравенство, удовлетворяет более жестким условиям, чем условие обратной сильной монотонности, а именно, является сильно монотонным и липшиц-непрерывным, доказана сильная сходимость итерационного метода и получена оценка его скорости сходимости.

Далее изучен случай, когда функционал, входящий в смешанное вариационное неравенство, является суммой двух, один из которых есть суперпозиция выпуклого, собственного, полунепрерывного функционала и линейного непрерывного оператора. Такие функционалы характерны, в частности, для задач фильтрации.

Рассматриваются особенности применения рассмотренных выше итерационных методов решения вариационных неравенств к задачам фильтрации и теории мягких сетчатых оболочек, в частности проведено построение сеточных аппроксимаций и исследование их сходимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-00955, 12-01-97022).

Список литературы

1. Badriev I. B., Nechaeva L. A. Mathematical simulation of steady filtration with multivalued law // PNRPU Mechanics Bulletin. 2013. Is. 3. P. 37 – 65.
2. Badriev I. B. On the Solving of Variational Inequalities of Stationary Problems of Two-Phase Flow in Porous Media // Applied Mechanics and Materials. 2013. V. 392. P. 183 – 187.

3. Badriev I. B., Banderov V. V., Zadvornov O. A. On the Equilibrium Problem of a Soft Network Shell in the Presence of Several Point Loads // Applied Mechanics and Materials. 2013. V. 392. P. 188 – 190.

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ
МЯГКИХ СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК**

Бандеров Виктор Викторович, Бадриев Ильдар Бурханович

к.ф – м. н., доцент; д.ф – м. н., профессор

E-mail: victor.banderov@kpfu.ru, ildar.badriev1@mail.ru

ИВМиИТ КФУ, Казань, Россия

Рассматриваются задачи об определении положения равновесия мягких оболочек [1, 2], закрепленных по краям, находящихся под воздействием массовой и поверхностной нагрузки, для плоского (бесконечно длинная цилиндрическая оболочка) и пространственного (осесимметричная оболочка) случаев. Деформации и перемещения оболочек допускаются конечными. В плоском случае допускается также, что оболочка может быть ограничена в перемещении препятствием, материал которого считается абсолютно твердым, а его поверхность – абсолютно гладкой, т.е. препятствие при воздействии на него не деформируется и порождает усилия только в направлении внешней нормали к своей поверхности. Предполагается, что поверхность препятствия описывается достаточно гладкой (не обязательно выпуклой) функцией. В плоском случае, исходя из уравнений равновесия, записанных в декартовой системе координат, сформулирована поточечная задача. Затем на основе принципа виртуальных перемещений получена вариационная формулировка. Установлена эквивалентность поточечной и вариационных задач. При условии, что функция, определяющая зависимость модуля силы натяжения в оболочке от ее деформации, имеет степенной рост, поставлена обобщенная задача в виде квазивариационного неравенства.

Пространственная осесимметричная задача также при условии, что функция, определяющая зависимость модуля силы натяжения в оболочке от ее деформации, имеет степенной рост, сформулирована математически в виде вариационного неравенства с псевдомонотонным оператором. Ограничения в данной задаче возникают из-за естественного условия недопущения самопересечения оболочки.

Сформулированы условия на функции, задающие физические соотношения в оболочке, обеспечивающие разрешимость задач. Исследованы свойства решений задач.

Рассматриваются итерационные методы решения вариационных и квазивариационных неравенств с операторами монотонного типа в банаховых и гильбертовых пространствах. Сначала рассматривается задача решения квазивариационного неравенства с псевдомонотонным, коэрцитивным, потенциальным оператором, удовлетворяющим условию типа ограниченной липшиц-непрерывности. Для решения квазивариационного неравенства предлагается итерационный процесс, каждый шаг которого состоит в

решении вариационного неравенства с оператором двойственности, обладающего лучшими свойствами по сравнению с исходным псевдомонотонным оператором. Установлено, что итерационная последовательность ограничена, и все ее слабо предельные точки являются решениями квазивариационного неравенства.

Аналогичные результаты получены и для вариационного неравенства.

Для модельных задач теории оболочек итерационные методы были реализованы численно. Результаты численных экспериментов подтвердили эффективность предложенных методов.

Для модельных задач

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-00955, 12-01-97022).

Список литературы

1. Badriev I. B., Banderov V. V., Zadvornov O. A. On the Equilibrium Problem of a Soft Network Shell in the Presence of Several Point Loads // Applied Mechanics and Materials. 2013. V. 392. P. 188 – 190.
2. Badriev I. B., Banderov V. V., Zadvornov O. A. Badriev, I.B., Banderov, V.V., Zadvornov, O.A. On the solving of equilibrium problem for the soft network shell with a load concentrated at the point // PNRPU Mechanics Bulletin. 2013. Is. 3. P. 17 – 35.

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Баззаев Александр Казбекович¹
Шхануков – Лафишев Мухамед Хабалович²

1: к.ф – м. н., факультет математики и информационных технологий
 СОГУ имени К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия

2: д.ф – м. н., профессор, заведующий кафедрой вычислительной
 математики КБГУ имени Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия

E-mail: alexander.bazzaev@gmail.com,
 lafishhev2014@yandex.ru

В цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leq t \leq T]$ рассмотрим следующую задачу для уравнения диффузии дробного порядка:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha u &= Lu + f(x, t), \quad L = \sum_{\beta=1}^p L_\beta, \quad (x, t) \in Q_T, \\ u|_\Gamma &= \mu(x, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad L_\beta u = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(k_\beta(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right), \quad \beta = 1, 2, \dots, p, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$0 < c_0 \leq k_\beta \leq c_1, \quad \partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{u}(x, \eta)}{(t-\eta)^\alpha} d\eta - \text{дробная производная}$$

Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$, $\dot{u} = \partial u / \partial t$, Γ — граница области G , $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ — точка p -мерного евклидова пространства R_p .

для задачи (1) построены локально-одномерные разностные схемы

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+\beta} \left(t_{j+\frac{\beta-s}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{\beta-s}{p}}^{1-\alpha} \right) y_t^{\frac{s}{p}} &= \Lambda_\beta \left(\sigma_\beta y^{j+\frac{\beta}{p}} - (1-\sigma_\beta) y^{j+\frac{\beta-1}{p}} \right) + \varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}}, \\ x &\in \omega_h, \quad \beta = 1, 2, \dots, p, \\ y^{j+\frac{\beta}{p}} &= \mu^{j+\frac{\beta}{p}}, \quad x \in \gamma_{h,\beta}, \quad \beta = 1, 2, \dots, p, \quad j = 0, 1, \dots, j_0, \\ y(x, 0) &= u_0(x), \\ \mu^{j+\frac{\beta}{p}} &= \mu \left(x, t_{j+\frac{\beta}{p}} \right), \quad \varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}} = f_\beta \left(x, t_{j+\frac{\beta}{p}} \right), \quad \beta = 1, 2, \dots, p, \end{aligned} \quad (2)$$

σ_β — произвольные параметры, $\gamma_{h,\beta}$ — множество граничных по направлению x_β узлов, разностный оператор $\Lambda_\beta \sim L_\beta$ имеет вид:

1) в регулярных узлах

$$\Lambda_\beta y_{(\beta)} = (a_\beta(x, \bar{t}) y_{\bar{x}_\beta})_{x_\beta}, \quad 0 < c_1 \leq a_\beta \leq c_2. \quad (3)$$

2) в нерегулярных узлах

$$\Lambda_{\beta} y_{(\beta)} = (a_{\beta} y_{\bar{x}_{\beta}})_{\hat{x}_{\beta}} = \begin{cases} \frac{1}{h_{\beta}} \left(a_{\beta, i_{\beta}+1} \frac{y^{(+1\beta)} - y}{h_{\beta}} - a_{\beta, i_{\beta}} \frac{y - y^{(-1\beta)}}{h_{\beta}^*} \right), & x^{(-1\beta)} \in \gamma_{h, \beta}, \\ \frac{1}{h_{\beta}} \left(a_{\beta, i_{\beta}+1} \frac{y^{(+1\beta)} - y}{h_{\beta}^*} - a_{\beta, i_{\beta}} \frac{y - y^{(-1\beta)}}{h_{\beta}} \right), & x^{(+1\beta)} \in \gamma_{h, \beta}, \end{cases} \quad (4)$$

где h_{β}^* — расстояние от нерегулярного узла x до граничного узла $x^{(+1\beta)}$ или $x^{(-1\beta)}$. Если оба соседних с $x \in \omega_{h, \beta}^*$ узла $x^{(+1\beta)}$ и $x^{(-1\beta)}$ являются граничными, т.е. $x^{(\pm 1\beta)} \in \gamma_{h, \beta}$, то

$$\Lambda_{\beta} y_{(\beta)} = \frac{1}{h_{\beta}} \left(a_{\beta, i_{\beta}+1} \frac{y^{(+1\beta)} - y}{h_{\beta}^*} - a_{\beta, i_{\beta}} \frac{y - y^{(-1\beta)}}{h_{\beta}^*} \right),$$

где h_{β}^* — расстояния между x и $x^{(\pm 1\beta)}$, $h_{\beta}^* \leq h_{\beta}$.

В регулярных узлах Λ_{β} имеет второй порядок аппроксимации, $\Lambda_{\beta} u - L_{\beta} u = O(h_{\beta}^2)$, а в нерегулярных узлах $\Lambda_{\beta} u - L_{\beta} u = O(1)$ (см. [1], стр. 232).

Теорема 1. Пусть задача (1) имеет единственное непрерывное в \bar{Q}_T решение и существуют непрерывные в Q_T производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_{\beta}^2 \partial x_{\nu}^2}, \frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_{\beta}^2 \partial t^{\alpha}}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\beta}^2}, \quad 1 \leq \beta, \nu \leq p, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \quad h^2 = o(\tau^{1-\alpha}).$$

Тогда решение разностной задачи (2) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (1) со скоростью

$$O\left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right), \quad 1/2 < \alpha \leq 1.$$

Список литературы

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука. 1977.

**МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТРЕУГОЛЬНОЙ ИНТЕРФЕЙСНОЙ ТРЕЩИНЕ В
ТЕЛАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**

**Безродных Сергей Игоревич, Власов Владимир Иванович,
Скороходов Сергей Леонидович**

к.ф. – м. н.; к.ф. – м. н.; с. н. с

E-mail: vlasov@ccas.ru

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва, Россия

В пространстве \mathbf{R}^3 определим область Ω с треугольной трещиной как разность $\Omega = \Omega_0 \setminus \mathcal{K}$ между гомеоморфной шару областью $\Omega_0 \ni \{0\}$ с липшицевой границей $\partial\Omega_0$ и лежащим в плоскости $\{x_2 = 0\}$ углом \mathcal{K} раствора $\alpha \in (0, \pi)$ с вершиной в начале координат $x = 0$. Обозначив через Γ поверхность $\partial\Omega_0 \setminus \mathcal{K}$, а через γ часть угла \mathcal{K} , лежащую в $\overline{\Omega_0}$, т.е. $\gamma = \overline{\Omega_0} \cap \mathcal{K}$, видим, что граница области Ω состоит из двух частей, Γ и γ .

В области Ω рассматривается задача Дирихле для уравнения $\operatorname{div}(\rho(x)\operatorname{grad}\psi) = 0$ в пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega, \gamma)$ с условиями $\psi|_{\gamma} = 0$, $\psi|_{\Gamma} = h \in \overset{\circ}{W}_2^{1/2}(\partial\Omega, \gamma)$, где $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega, \gamma)$ — подпространство функций из $W_2^1(\Omega)$, имеющих нулевой след на γ , а $\overset{\circ}{W}_2^{1/2}(\partial\Omega, \gamma)$ — подпространство функций из $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$, обращающихся в нуль на γ . Коэффициент $\rho(x)$ положителен и кусочно-постоянен с поверхностью разрыва $\{x_2 = 0\}$. Обобщенное решение $\psi \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega, \gamma)$ задачи понимается в смысле интегрального тождества $\int_{\Omega} (\nabla\psi, \nabla\eta) \rho(x) dx = 0$ для всех пробных функций $\eta \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, где (\cdot, \cdot) обозначает скалярное произведение в \mathbf{R}^3 .

Метод решения этой задачи, являющийся развитием [1], основан на представлении решения виде предела $\psi = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi^N$ последовательности линейных комбинаций $\psi^N = \sum_{k=1}^N a_k^N \Psi_k$ функций (мультиполей) $\Psi_k(\rho, \theta, \varphi)$, $k = 1, 2, \dots$, представляемых в виде $\Psi_k = r^\mu U(\mu; \theta, \varphi)$, $\mu = \mu(k)$, где (r, θ, φ) — сферические координаты. Здесь функции $U(\mu(k); \theta, \varphi)$ и числа $\mu(k)$ суть решение спектральной задачи для оператора типа Бельтрами — Лапласа, являющегося угловой частью оператора $\operatorname{div}(\rho(x)\operatorname{grad}\psi)$ в области $\mathcal{S} = \mathbf{S}^2 \setminus \mathcal{K}$ на единичной сфере \mathbf{S}^2 с центром в $x = 0$. Аналогичная спектральная задача изучалась в [2]. Рассматриваемая спектральная задача решается блочным проекционным методом с использованием функций вида $u^m(\mu; \theta, \varphi) = P_\mu^{\lambda(m)}(\cos \tilde{\theta}) e^{i\lambda(m)\tilde{\varphi}}$, где $P_\mu^\lambda(t)$ — присоединенные функции Лежандра на разрезе.

Метод был численно реализован и, в частности, получена зависимость чисел $\mu(k)$, т.е. показателей сингулярности в вершине трещины, от раствора ее угла.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №13-01-00923), Программы ОМН РАН "Современные проблемы теоретической математики", (проект "Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики") и Программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

Список литературы

1. Vlasov V. I. A meshless method for solving boundary value problems in 3D domains of complex shape // The Fourth International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Edinburgh, 5 – 9 July 1999. Book of Abstracts. P. 323.
2. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // УМН. 1983. Т. 38, № 2 (230). С. 3 – 76.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СВЕРХЖЕСТКИХ ЗАДАЧ КОШИ

Белов Александр Александрович¹
Калиткин Николай Николаевич²
Пошивайло Илья Павлович³

1: аспирант, Физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова,
Москва, Россия

2: чл. – корр. РАН, профессор, Институт Прикладной Математики
им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

3: аспирант, Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша
РАН, Москва, Россия

E-mail: belov_25.04.1991@mail.ru, kalitkin@imamod.ru,
ilya.poshivaylo@gmail.com

Жесткие задачи Коши. Для жестких задач $\dot{u} = f(u, t)$ лучшими считаются схемы Розенброка и Ваннера. Из них особенно перспективны одно- и двухстадийные схемы Розенброка с комплексными параметрами. Они имеют точность $O(\tau^2)$ и $O(\tau^4)$ при устойчивости $L2$ и $L4$ соответственно. Эти схемы очень хороши на задачах с умеренной нелинейностью.

Однако на задачах с существенной нелинейностью эти схемы не вполне удовлетворительны. Например, для квазилинейного уравнения теплопроводности известно решение Самарского-Соболя вида тепловой волны, бегущей по нулевому фону. Численное решение по этим схемам продвигается не быстрее, чем на один интервал сетки за один шаг по времени. Поэтому схемы оказываются лишь условно сходящимися. Нужен новый класс схем.

Обратные схемы Рунге-Кутты (РК). Нужные свойства имеют неявные схемы РК. Однако они весьма трудоемки. Среди них удалось выделить нужный класс схем, имеющих малую трудоемкость – обратные схемы.

Среди явных схем РК с числом стадий $s \leq 4$ и точности $O(\tau^s)$ есть класс с неполной матрицей Бутчера:

$$\hat{u} = u + \tau \sum_{m=1}^s b_m w_m, \quad w_m = f(u + \tau a_m w_{m-1}, t + \tau a_m) \quad (1)$$

Можно применить (1) к расчету в обратном направлении. Для этого нужно заменить \hat{u} на u и τ на $-\tau$:

$$u = \hat{u} + \tau \sum_{m=1}^s b_m \hat{w}_m, \quad \hat{w}_m = f(\hat{u} - \tau a_m \hat{w}_{m-1}, \hat{t} - \tau a_m) \quad (2)$$

Если рассматривать (2) как переход от u к \hat{u} , то это неявная схема РК. Очевидно, ее аппроксимация есть $O(\tau^s)$. Нетрудно доказать, что эта схема Ls -устойчива. Ее реализация требует решения системы нелинейных уравнений для u . Однако ее трудоемкость такова, как у одной стадии диагонально-неявной схемы РК. Это несравненно меньше трудоемкости неявных схем РК общего вида. Приведем одну частную схему для $s = 2$:

$$\hat{u} = u + \tau f(\hat{u} - \tau/2 f(\hat{u}, t + \tau), t + \tau/2) \quad (3).$$

На бегущей волне Самарского-Соболя схема (3) оказалась безусловно устойчивой и, в отличие от традиционной схемы “с полусуммой”, давала монотонное решение даже при огромных числах Куранта τ/h

Дифференциально-алгебраические системы также решаются схемами (2) с точностью $O(\tau^s)$. Однако трудоемкость нахождения \hat{u} при этом существенно больше, а именно как для неявных схем РК в общем виде.

Длина дуги. Вместо t можно выбрать в качестве аргумента длину дуги интегральной кривой:

$$dl = (dt^2 + du^2)^{1/2}, \quad (4)$$

где u есть вектор-функция. При этом пограничный слой хорошо разрешается: в нем оказывается достаточно много точек при равномерной по l сетке. Это позволяет использовать метод сгущения сеток с оценкой погрешности по Ричардсону и получать высокую точность решения всюду, включая пограничный слой.

При этом возможны два способа оценки погрешности. При первом непосредственно получается погрешность $u(l)$ и $t(l)$ при заданных значениях l . При втором способе производится более сложный пересчет погрешности, при котором определяется погрешность $u(t)$ при заданном t . Последний способ является более удобным для пользователя.

Химическая кинетика. Это специфическая жесткая задача Коши с тремя ограничениями: 1) все компоненты вектора u неотрицательны; 2) правые части покомпонентно разбиваются на положительные и отрицательные слагаемые, $f_j(u) = \varphi_j(u) - u_j \psi_j(u)$, где $\varphi_j > 0$, $\psi_j > 0$, j – номер компоненты; 3) величины φ_j , ψ_j с разными j отличаются на много порядков величины. Для этой задачи удалось построить специфическую схему точности $O(\tau^2)$. Эта схема монотонная, явная и имеет очень малую трудоемкость.

Список литературы

1. Калиткин Н. Н., Пошивайло И. П. Обратные Ls -устойчивые схемы Рунге – Кутты // Доклады Академии Наук. 2012. Т. 442, № 2. С. 175 – 180.
2. Калиткин Н. Н., Пошивайло И. П. Гарантированная точность при решении задачи Коши методом длины дуги // Доклады Академии Наук.

2013. Т. 452, № 5. С. 499 – 502.

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Бештоков Мурат Хамидбиевич

к.ф. – м. н., доцент кафедры вычислительной математики

E-mail: beshtokov_murat@rambler.ru

Кабардино-Балкарский государственный университет имени

Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия

В данной работе для решения локальных и нелокальных краевых задач для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами [1] получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках.

В цилиндре $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим задачу

$$u_t = \frac{1}{x^m} \left(x^m k u_x \right)_x + \frac{1}{x^m} \left(x^m \eta u_x \right)_{xt} - qu + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^m (k(x, t)u_x + (\eta(x, t)u_x)_t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$-\Pi(l, t) = \beta(t)u(l, t) - \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

где

$$0 < c_0 \leq \eta, k \leq c_1, |q, \eta_t, \beta| \leq c_2, \quad \Pi(x, t) = x^m \left(k(x, t)u_x + (\eta(x, t)u_x)_t \right). \quad (5)$$

Предположим, что решение задачи (1) - (4), коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2) - (4) удовлетворяют необходимым условиям гладкости.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5), тогда для решения дифференциальной задачи (1) – (4) справедлива априорная оценка

$$\|u\|_1^2 \leq M(t) \left(\int_0^t \left(\|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 + \mu^2(\tau) \right) d\tau + \|x^{\frac{m}{2}} u_0\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u'_0\|_0^2 \right),$$

где $\|u\|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_{2, Q_t}^2$, $M(t) > 0$.

Из априорной оценки следует единственность и устойчивость решения задачи (1) – (4) по начальным данным и правой части.

В замкнутом цилиндре \bar{Q}_T введем равномерную сетку [2] и поставим в соответствие дифференциальной задаче (1) – (4) следующую разностную схему:

$$\varkappa y_t = \frac{1}{2} \Lambda(\bar{t})(\hat{y} + y) + \delta(\bar{t})y + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{2}a_1(\hat{y} + y)_{x,0} + (\gamma_1 y_{x,0})_t = \frac{h}{2(m+1)}y_{t,0} + \frac{1}{2}\beta_1(\hat{y} + y)_0 - \mu_1, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = 0, \quad (7)$$

$$-\left(\frac{1}{2}a_N(\hat{y} + y)_{\bar{x},N} + (\gamma_N y_{\bar{x}})_{t,N}\right) = \frac{h}{2}y_{t,N} + \frac{1}{2}\beta_2(\hat{y} + y)_N - \mu_2, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = l, \quad (8)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (9)$$

где

$$\Lambda(\bar{t})y = \frac{1}{x^m}(\bar{x}^m a y_{\bar{x}})_x - dy, \quad \delta(\bar{t})y = \frac{1}{x^m}(\bar{x}^m \gamma y_{\bar{x}})_{xt},$$

$$y = y_i^j = y(x_i, t_j), \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad a_i = k(\bar{x}, \bar{t}), \quad \gamma_i = \eta(\bar{x}, \bar{t}), \quad d_i = \kappa q(x_i, \bar{t}),$$

$$\kappa_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \beta_1^j = \frac{h}{2(m+1)}d_0, \quad \beta_2^j = \left(1 + \frac{mh}{2l}\right)\beta^{j+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}d_N,$$

$$\varphi_i = \kappa f(x_i, \bar{t}), \quad \mu_1^j = \frac{h}{2(m+1)}\varphi_0, \quad \mu_2^j = \left(1 + \frac{mh}{2l}\right)\mu^{j+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\varphi_N, \quad \bar{t} = t_{j+0.5}, \quad \bar{x} = x_{i-0.5}.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (5), тогда при $h \leq h_0, \tau \leq \tau_0$ для решения разностной задачи (6) – (9) справедлива априорная оценка

$$\|y\|_1^2 \leq M \left(\sum_{j'=0}^j \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi^{j'}\|^2 + \mu_1^{j'^2} + \mu_2^{j'^2} \right) \tau + \|x^{\frac{m}{2}} y^0\|_0^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right)$$

где $\|y\|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_0^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} (\hat{y}_{\bar{x}}^{j'} + y_{\bar{x}}^{j'})\|_0^2 \tau, \quad M > 0,$ не зависящая от h и τ .

Из априорной оценки следует устойчивость разностной задачи (6) – (9) по правой части и начальным данным на слое, а также сходимость со скоростью $O\left(x^{\frac{m}{2}-1}(h^2 + \tau^2)\right)$ в смысле нормы $\|\cdot\|_1$.

Замечание. Полученные результаты справедливы, когда условие (3) имеет вид

$$-\Pi(l, t) = \int_0^l \beta(x, t)u(x, t)dx + \int_0^t \rho(t, \tau)u(0, \tau)d\tau - \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 14-01-31246).

Список литературы

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах, ДАН СССР. Т. 132, № 3, С. 545-548., 1960
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.-

УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С «ТЕПЛОВЫМ СЛЕДОМ»
Богомолов Сергей Владимирович, Гудич Игорь Григорьевич,
Есикова Наталья Борисовна

д.ф – м. н., профессор; аспирант; к.ф – м. н., доцент

E-mail: bogomo@cs.msu.su, igudich@gmail.com,

esikova.nata@yandex.ru

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Для повышения точности суперкомпьютерных газодинамических расчетов необходимо использовать многомасштабные методы, опирающиеся на микро - макро модели, справедливые в различных подобластях, в которых решается рассматриваемая задача. Иерархия моделей газа, переходных по числу Кнудсена (Kn), основана на представлении траекторий молекул как случайных процессов. Kn - параметр обезразмеривания, зависящий от пространственной подобласти:

$$Kn(x, t) = 1/(d^2 n_{loc}(x, t) x_*).$$

Его физический смысл — отношение локальной средней длины свободного пробега к характерному размеру задачи x_* ; d — диаметр молекул, $n(x, t)$ — их числовая плотность.

В макро - уравнениях газовой динамики возникают дополнительные малые члены, которые получаются исходя из системы стохастических дифференциальных уравнений, описывающей газ при малых числах Кнудсена:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_j) = = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(Kn \left(\frac{D^2}{\gamma^2} \right)_{ij} \rho \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (V_j \rho V_i) = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{D^2}{\gamma} \right)_{ij} \rho \right) + \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \left(Kn \left(\frac{D^2}{\gamma^2} \right)_{kj} \rho V_i \right), i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (V_j \rho E) = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{D^2}{\gamma} \right)_{ij} \rho V_i \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(Kn \left(\frac{D^2}{\gamma^2} \right)_{ij} \rho E \right).$$

Коэффициенты $\left(\frac{D^2}{\gamma} \right)_{ij}$ и $\left(\frac{D^2}{\gamma^2} \right)_{ij}$ определяются из микроскопической модели газа. Черта означает усреднение в пространстве скоростей.

Присутствие малого диффузионного члена в правой части уравнения неразрывности является математическим следствием исходной вероятностной модели и использования стандартных методов стохастического анализа, в частности, формулы Ито. С точки зрения физики, этот член отражает тепловое движение молекул — фундаментальное свойство, присущее газовой среде. Если в газе провести виртуальную границу между соседними

областями, обладающими различными термодинамическими свойствами, и мысленно "раскрасить" в разные цвета молекулы, в них находящиеся, то процесс самодиффузии станет совершенно очевидным.

Список литературы

1. Богомолов С. В., Дородницын Л. В. Уравнения стохастической квазигазодинамики. Случай вязкого газа. // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, № 12. С. 49–64.
2. Богомолов С. В., Гудич И. Г. К верификации стохастической диффузионной модели газа// Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 11. С. 17 – 35.

**ТРЕХСЛОЙНЫЕ СХЕМЫ ПОПЕРЕМЕННО-ТРЕУГОЛЬНОГО МЕТОДА
А.А. САМАРСКОГО**

Вабищевич Петр Николаевич

д.ф – м. н., профессор

E-mail: vabishchevich@gmail.com

ИБРАЭ РАН, СВФУ им. М.К. Аммосова, Москва, Якутск, Россия

При приближенном решении краевых задач для нестационарных уравнений большое внимание [1] уделяется аппроксимациям по времени. Для параболических уравнений второго порядка безусловно устойчивые схемы строятся на основе неявных аппроксимаций. При этом на каждом новом временном слое приходится решать соответствующую краевую задачу для эллиптического уравнения. Некоторые возможности по уменьшению вычислительной работы предоставляют явные схемы, различные варианты схем расщепления [2,3].

Явные схемы имеют несомненные преимущества перед неявными в плане вычислительной реализации. Особенно это достоинство сильно проявляется при построении алгоритмов, которые ориентированы на вычислительные системы параллельной архитектуры. Хорошо также известен основной недостаток явных схем, который связан с жесткими ограничениями на допустимый шаг по времени. Для параболических уравнений условие устойчивости [1,4] имеет вид $\tau < \tau_0 = O(h^2)$, где τ — шаг сетки по времени, а h — шаг сетки по пространству.

Определенные перспективы имеют явные схемы, вычисления в которых организованы по принципу бегущего счета. Такие схемы фактически основаны на расщеплении оператора задачи на два оператора и вынесении на новый временной слой только одного оператора. Поэтому о таких схемах с неоднородной аппроксимацией по времени можно говорить как о явно-неявных схемах. Обсуждаемые схемы относятся к классу безусловно устойчивых, но для них имеются проблемы с аппроксимацией. Дополнительный член погрешности для таких условно сходящимися схем есть $O(\tau^2 h^{-2})$.

Впервые явные схемы бегущего счета для параболических уравнений второго порядка предложены В.К. Саулевым в книге [5]. С учетом организации явно-неявной неоднородности аппроксимаций по времени эти схемы названы автором асимметричными схемами. Следующий принципиальный результат получен А.А. Самарским в работе [6], где эти схемы рассматриваются как факторизованные операторно-разностные схемы с аддитивным расщеплением оператора задачи (матрицы) на сопряженные друг другу слагаемые. Применительно к системам обыкновенных дифференциальных уравнений мы имеем расщепление матрицы на нижнюю и

верхнюю треугольные матрицы — попеременно-треугольный метод. При решении стационарных задач на основе таких расщеплений мы приходим к попеременно-треугольному итерационному методу [7].

Нами предложена [8] многослойная модификация попеременно-треугольного метода. Для повышения точности схем попеременно-треугольного метода добавляется корректирующее слагаемое с производной по времени, которое берется с предыдущего временного слоя. Исходная двухслойная схема становится трехслойной, но при этом условия устойчивости не нарушаются. В силу этого погрешность удается уменьшить на порядок по шагу по времени: для параболического уравнения второго порядка дополнительный член погрешности есть $O(\tau^3 h^{-2})$. Исследование устойчивости проводится на основе теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем в конечномерных гильбертовых пространствах [1,4].

Список литературы

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. Marchuk G. I. Splitting and alternating direction methods, in: J.-L. Lions, Ciarlet P. G. (Eds.) Handbook of Numerical Analysis, North – Holland, , Vol. I, 1990, P. 197 – 462.
3. Vabishchevich P. N. Additive Operator-Difference Schemes. Splitting Schemes, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, 2014.
4. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
5. Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М.: Физматгиз, 1960.
6. Самарский А. А. Об одном экономичном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений // ЖВМиМ. 1964. Т. 4, № 3. С. 580 – 585.
7. Samarskii A. A., Nikolaev E. S. Numerical methods for grid equations. Vol. I, II, Birkhauser Verlag, Basel, 1989.
8. Вабищевич П. Н. Трехслойные схемы попеременно-треугольного метода // ЖВМиМ. 2014. Т. 54, № 6. С. 942 – 952.

О сходимости МКЭ для решения нелинейных параболических уравнений с нелокальным пространственным оператором

Глазырина Ольга Владимировна, Павлова Мария Филипповна

аспирант кафедры вычислительной математики; д.ф – м. н.,
 профессор кафедры вычислительной математики

E-mail: glazyrina-olga@ya.ru, mpavlova@kpfu.ru

Казанский федеральный университет, Казань, Россия

В ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с границей Γ рассматривается следующая начально-краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (k_i(x, u(x, t), \nabla u(x, t), (Bu)(t))) = f(x, t), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \Omega, \quad u(x, t) = 0 \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

здесь ∇u — градиент u , $Bu(t) = \int_{\Omega'} g(x, u(x, t)) dx$ — нелокальная характеристика решения, g — известная функция, Ω' — область, принадлежащая Ω или совпадающая с ней. Предполагается, что $|g(x, \xi)| \leq g_0(x) + |\xi|^s$, где g_0 — интегрируемая по Ω функция, $s \geq 0$; коэффициенты k_i удовлетворяют условиям, обеспечивающим ограниченность, коэрцитивность и монотонность по градиенту оператора L , действующего из $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ в $W_{p'}^{-1}(\Omega)$, $p' = \frac{p}{p-1}$.

Для задачи (1)–(2) с помощью метода полудискретизации по переменной t и МКЭ по пространственным переменным строится двухслойная схема, неявная по градиенту и явная по решению и нелокальной характеристике. При этом Ω аппроксимируется областью Ω_h , триангуляция которой проводится с помощью симплексов. Приближенное решение на каждом слое по t ищется из множества функций пространства $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_h) \cap L_2(\Omega_h)$, сужение которых на каждый конечный элемент — линейная функция. Доказана следующая

Теорема 1. Пусть выполнены перечисленные выше условия, $f \in L_{p'}(Q_T)$, $u_0 \in L_2(\Omega)$, $s < \bar{p}$, где $\bar{p} = \max\{2, p_{max}\}$, p_{max} — максимальное из чисел q , при которых справедливо включение $L_q(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$. Тогда существует последовательность кусочно-постоянных по переменной t восполнений приближенного решения задачи (1),(2), сходящаяся сильно в $L_{p_1}(0, T; L_{p_2}(\Omega))$ к обобщенному решению задачи (1),(2), здесь $p_1 < \infty$, $p_2 < \bar{p}$. При условии единственности обобщенного решения любая последовательность кусочно-постоянных восполнений приближенного решения будет обладать этим свойством.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-00955, 12-01-97022, 12-01-31515).

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ
Гулин Алексей Владимирович , Морозова Валентина Алексеевна

д.ф – м. н., профессор; к.ф – м. н., доцент

E-mail: vmgul@cs.msu.su, moroz@cs.msu.su

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В известных работах А. А. Самарского (см. напр. [1, гл. 6]) построена теория устойчивости операторно-разностных схем в гильбертовых пространствах. В настоящей работе предпринята попытка распространить упомянутую теорию на тот случай, когда сеточное пространство H представлено в виде прямой суммы $H = H_1 \oplus H_2$ своих подпространств H_1 и H_2 . При этом разностная схема не обязана быть устойчивой во всем пространстве, но устойчива в каком-либо из подпространств H_1 или H_2 . Рассмотрим абстрактную разностную схему

$$y_{n+1} = Sy_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad y_0 \in H \text{ задан} \quad (1)$$

с оператором перехода $S : H \rightarrow H$. Пусть в H введено скалярное произведение (y, v) и задан самосопряженный положительный оператор $D : H \rightarrow H$. Схема (1) называется *устойчивой в пространстве H_D* , если $(Dy_{n+1}, y_{n+1}) \leq (Dy_n, y_n)$ для любых $y_0 \in H$ и всех $n = 0, 1, \dots$.

В соответствии с разложением $H = H_1 \oplus H_2$ любой вектор $y \in H$ можно единственным образом представить в виде пары векторов $y = (y^{(1)} \ y^{(2)})$, где $y^{(1)} \in H_1$, $y^{(2)} \in H_2$. Матрицы S и D разбиваются на соответствующие блоки, $S = (S_{\alpha\beta})$, $D = (D_{\alpha\beta})$. Назовем схему (1) *инвариантной относительно подпространства H_1* , если $Sy \in H_1$ для любого $y \in H_1$. В случае инвариантности расчет проводится фактически по схеме

$$y_{n+1}^{(1)} = S_{11}y_n^{(1)}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad y_0^{(1)} \in H_1 \text{ задан}, \quad (2)$$

которую назовем *сужением разностной схемы (1) на подпространство H_1* .

Пусть в H_1 введено скалярное произведение $(y^{(1)}, v^{(1)})_1$ и задан самосопряженный положительный оператор $D_{11} : H_1 \rightarrow H_1$. Назовем разностную схему (1) *устойчивой в подпространстве $H_{1,D_{11}}$* , если

1. Подпространство H_1 инвариантно относительно оператора S .
2. Для решения задачи (2) при любых $y_0^{(1)} \in H_1$ и всех $n = 0, 1, \dots$ выполняются неравенства $(D_{11}y_{n+1}^{(1)}, y_{n+1}^{(1)}) \leq (D_{11}y_n^{(1)}, y_n^{(1)})$.

Утверждение 1. *Если H_1 инвариантно относительно оператора S , то для устойчивости схемы (1) в подпространстве $H_{1,D_{11}}$ необходимо и достаточно выполнения операторного неравенства $D_{11} \geq S_{11}^* D_{11} S_{11}$.*

Как следствие, получаем необходимое условие устойчивости.

Утверждение 2. Если разностная схема (1) устойчива в каком-либо подпространстве $H_{1,D_{11}}$, то все собственные значения оператора S_{11} не превосходят 1 по модулю.

Пример. Пространство H состоит из вещественных векторов $c = (c_0 c_1 c_2 c_3 c_4)^T$, записанных в единичном базисе. Представим H в виде прямой суммы $H = H_0 \oplus H_1$, где $H_0 : c = (c_0 0 0 0 0)^T$, $H_1 : c = (0 c_1 c_2 c_3 c_4)^T$.

Скалярное произведение в H_1 определено как $(y, v)_1 = \sum_{j=1}^4 y_j v_j$. Рассмотрим

разностную схему $(c_{n+1} - c_n)/\tau + Jc_n = 0$, где $J = \text{diag}(J_0, J_1, J_2)$, $J_0 = \lambda_0$,

$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \\ p_k & \lambda_k \end{bmatrix}$, $k = 1, 2$. Здесь λ_k и p_k — заданные вещественные числа.

Операторы вида J возникают при исследовании устойчивости разностных схем с нелокальными граничными условиями (см. [2, с. 43]).

Подпространство H_1 инвариантно относительно оператора J . Необходимыми условиями устойчивости в каком-либо подпространстве $H_{1,D_{11}}$ являются условия

$$0 \leq \tau \lambda_k \leq 2, \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

Зададим в H_1 оператор нормы $D_{11} = \text{diag}(1, \beta_1, 1, \beta_2)$, где $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$.

Из Утверждения 1 следует, что критерием устойчивости в $H_{1,D_{11}}$ является выполнение при $k = 1, 2$ неравенств

$$0 \leq \beta_k \tau^2 p_k^2 \leq 1, \quad 0 < 1 - \sqrt{1 - \sqrt{\beta_k \tau^2 p_k^2}} \leq \tau \lambda_k \leq 1 + \sqrt{1 - \sqrt{\beta_k \tau^2 p_k^2}} \leq 2. \quad (4)$$

Условия (4) являются более жесткими по сравнению с (3), и совпадают с (3) лишь в случае $p_1 = p_2 = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №13-01-00908).

Список литературы

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. Изд. 3, М.: Наука, 1989.
2. Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В. А. Устойчивость нелокальных разностных схем. М.: Издательство ЛКИ, 2008.

ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЙ DG И HDG СХЕМ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Даутов Рафаил Замилович, Федотов Евгений Михайлович

д.ф. н., профессор; д.ф. н., доцент

E-mail: rafail.dautov@kpfu.ru, eugeny.fedotov@kpfu.ru

Институт ВМ и ИТ Казанского федерального университета, Казань, Россия

В данной работе предлагается и исследуется семейство методов приближённого решения эллиптических уравнений второго порядка, относящихся к классам конечноэлементных схем разрывного (DG) и разрывного гибридного (HDG) вариантов метода Галеркина.

Рассматривается следующая нелинейная задача:

$$-\nabla \cdot k(x, t, u, \nabla u) + k_0(x, t, u, \nabla u) = f, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

где Ω есть ограниченный многогранник в R^d с границей $\partial\Omega$, $f \in L_2(\Omega)$, $d \geq 2$.

Предполагается достаточная гладкость коэффициентов $k(x, \xi) = (k_1(x, t, \xi), \dots, k_d(x, t, \xi))$, $k_0(x, \xi)$, а также их липшиц – непрерывность и сильная монотонность при всех $x \in \Omega$:

$$\left| \sum_{i=0}^d (k_i(x, t, \xi) - k_i(x, t, \eta)) v_i \right| \leq \beta |\xi - \eta| |v| \quad \forall \xi, \eta, v \in R^{d+1}, \beta > 0,$$

$$\sum_{i=0}^d (k_i(x, t, \xi) - k_i(x, t, \eta)) (\xi_i - \eta_i) \geq \alpha \sum_{i=1}^d (\xi_i - \eta_i)^2 \quad \forall \xi, \eta \in R^{d+1}, \alpha > 0.$$

При построении дискретных схем мы отталкиваемся от записи уравнения (1) в виде системы уравнений первого порядка, вводя наряду с неизвестной u новые неизвестные q и σ :

$$\sigma = \nabla u, \quad q = k(x, t, u, \sigma), \quad -\nabla \cdot q + k_0(x, u, \sigma) = f(x, t).$$

В HDG варианте предлагается схема для определения значений σ_h , $q_h \in W_h$, $u_h \in V_h$, $\lambda_h \in \Lambda_h$, аппроксимирующих соответствующие искомые неизвестные σ , q , u и след λ функции u на границах элементов K триангуляции \mathcal{T}_h области Ω , вида

$$(\sigma_h, w)_K + (u_h, \nabla \cdot w)_K - (\lambda_h, w \cdot n_K)_{\partial K} = 0 \quad \forall w \in W(K), \quad K \in \mathcal{T}_h,$$

$$(q_h - k(\cdot, u_h, \sigma_h), w)_K = 0 \quad \forall w \in W(K), \quad K \in \mathcal{T}_h,$$

$$\begin{aligned}
 -(\nabla \cdot q_h, v)_K + (k_0(\cdot, u_h, \sigma_h), v)_K &= (f, v)_K \quad \forall v \in V(K), \quad K \in \mathcal{T}_h, \\
 (q_h \cdot n, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} &= 0 \quad \forall \mu \in \Lambda_h.
 \end{aligned}$$

Здесь V_h, W_h — скалярное и векторное пространства полиномиальных на элементах $K \in \mathcal{T}_h$ функций, терпящих разрыв на границах конечных элементов и Λ_h — пространство функций полиномиальных на гранях элементов.

В DG варианте сеточной схемы отсутствует искомая переменная λ_h , $W_h = V_h$, а определяющие соотношения для переменных σ_h, q_h, u_h записываются с использованием их предельных значений на границах конечных элементов (см. [1, 2]).

Отметим локальную (поэлементную) консервативность предлагаемых сеточных схем, а также сохранение ими в линейном случае симметрии пространственного оператора.

В [1 - 3] доказано, что при соответствующих условиях на пространства конечных элементов операторы сеточных схем являются сильно монотонными и липшиц-непрерывными в пространстве $H^1(\mathcal{T}_h)$ с нормой $\|v\|_{1,h}^2 = \|\nabla v\|_{0,\mathcal{T}_h}^2 + h^{-1}\|[v]\|_{0,\gamma_h}^2$, где $[v]$ скачок функции v на границе γ_h триангуляции \mathcal{T}_h , что обеспечивает однозначную разрешимость и устойчивость сеточных схем.

Получены не улучшаемые оценки точности сеточных схем вида

$$\|q - q_h\|_{0,\mathcal{T}_h} + \|\sigma - \sigma_h\|_{0,\mathcal{T}_h} + \|q - q_h\|_{0,\mathcal{T}_h} + \|u - u_h\|_{1,h} \leq ch^m$$

при соответствующих значениях параметра m , определяемого степенью аппроксимирующих полиномов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 13-01-00908, 12-01- 97022).

Список литературы

1. Даутов Р.З, Федотов Е.М. О сходимости решений одного класса неконформных схем метода конечных элементов для квазилинейных эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 9. С. 1210 – 1219.
2. Даутов Р.З, Федотов Е.М. Разрывный смешанный метод Галеркина без штрафа для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // ЖВМ и МФ. 2013. Т. 53, № 3. С. 1791 – 1803.
3. Даутов Р.З, Федотов Е.М. Абстрактная теория HDG схем для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // ЖВМ и МФ. 2014. Т. 54, № 3. С. 1791 – 1803.

**МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОНИЖАЮЩИХ ПОДПРОСТРАНСТВ
РЕГУЛЯРНЫХ МАТРИЧНЫХ ПУЧКОВ**

Демьянко Кирилл Вячеславович¹
Нечепуренко Юрий Михайлович²
Садкан Милуд³

1: аспирант, ФПФЭ МФТИ, Долгопрудный, Россия

2: д.ф. – м. н., в. н. с, ИВМ РАН, Москва, Россия

3: профессор, университет западной Бретани, Брест, Франция

E-mail: kirill.demyanko@yandex.ru, yumnech@yandex.ru,
sadkane@univ-brest.fr

Для вычисления понижающих подпространств регулярных матричных пучков с большими разреженными матрицами в настоящее время используют, главным образом, блочный метод Арнольди и метод Якоби-Дэвидсона с процедурой исчерпывания [1-3]. В докладе для решения этой задачи предлагается адаптировать метод Ньютона, предложенный в [4] для вычисления инвариантных подпространств. Помимо высокой скорости сходимости, к его преимуществам по сравнению с перечисленными выше методами следует отнести наличие теории сходимости и меньший объем необходимой дополнительной памяти. Однако для надежной работы метода Ньютона требуется достаточно хорошее начальное приближение, затраты на поиск которого часто оказываются существенными, а также необходимо на каждом шаге решать обобщенное уравнение Сильвестра. Для вычисления инвариантных подпространств эти проблемы были решены в работе [5], где, во-первых, был предложен экономичный способ вычисления начального приближения на основе приближенных обратных итераций с тюнингом, а во-вторых, предложен эффективный способ решения уравнения Сильвестра. Предлагаемый в докладе метод, является обобщением метода из [5]. Работа метода продемонстрирована на типичной задаче гидродинамической устойчивости [6], [7].

Список литературы

1. Saad Y. Variations of Arnoldi's method for computing eigenelements of large unsymmetric matrices // Lin. Algebra Appl. 1980, V. 34, P. 269–295.
2. Bai Z., Demmel J., Dongarra J., Ruhe A., Van der Vorst H. Templates for the solution of algebraic eigenvalue problems: a practical guide, SIAM, Philadelphia, 2000.
3. Hechme G., Nечepurenko Yu.M., Sadkane M. Efficient methods for

- computing spectral projectors for linearized Navier-Stokes equations // *SIAM J. on Scient. Computing*, 2008, V. 31, № 1, P. 667–686.
4. Godunov S.K., Nechipurenko Yu.M. Bounds for the convergence rate of Newton's method for calculating invariant subspaces // *Comput. Math. Math. Phys.* 2002, V. 42, № 6, P. 739–746.
 5. El Khoury G., Nechipurenko Yu.M., Sadkane M. Acceleration of inverse subspace iteration with Newton's method // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2013, <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2013.06.046>
 6. Demyanko K.V., Nechipurenko Yu.M. Dependence of the Linear Stability of Poiseuille Flows in a Rectangular Duct on the Cross-Sectional Aspect Ratio // *Doklady Physics*. 2011, V. 56, № 10, P. 531–533.
 7. Demyanko K.V., Nechipurenko Yu.M. Linear stability analysis of Poiseuille flow in a rectangular ducts // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2013, V. 28, № 2, P. 125–148.

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОЙ МИНИМИЗАЦИИ С
ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ И СЛАБО КОМПАКТНЫМ
МНОЖЕСТВОМ КОРРЕКТНОСТИ**

Дряженков Андрей Александрович, Потанов Михаил Михайлович

аспирант; д.ф – м. н., профессор

E-mail: potanov@tochka.ru, andrja@yandex.ru

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Рассматривается следующая задача квадратичной минимизации на эллипсоидальном множестве:

$$\| \mathcal{A}u - f \|_F \rightarrow \inf_{u \in U}, \quad U = \{ u \in H \mid \| \mathcal{B}u - g \|_G \leq R \} \quad (1)$$

с линейными ограниченными операторами $\mathcal{A} : H \rightarrow F$, $\mathcal{B} : H \rightarrow G$, действующими в гильбертовых пространствах. Предполагается, что вместо точных данных известны некоторые их приближения, обладающие сходимостью

$$\begin{aligned} \| \tilde{\mathcal{A}}u - \mathcal{A}u \|_F &\rightarrow 0, & \| \tilde{\mathcal{A}}^*v - \mathcal{A}^*v \|_H &\rightarrow 0, & \forall u \in H, v \in F, \\ \| \tilde{\mathcal{B}}u - \mathcal{B}u \|_G &\rightarrow 0, & \| \tilde{\mathcal{B}}^*h - \mathcal{B}^*h \|_H &\rightarrow 0, & \forall u \in H, h \in G, \\ \| \tilde{f} - f \|_F &\rightarrow 0, & \| \tilde{g} - g \|_G &\rightarrow 0, & | \tilde{R} - R | \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Традиционные для теории и методов регуляризации предположения равномерной близости операторов ослаблены в (2) до уровня их сильной поточечной сходимости. В (2) не требуется также знать уровни каких-либо погрешностей.

Предлагается алгоритм поиска нормального решения u_* задачи (1). Для обоснования сильной сходимости метода в дополнение к (2) требуется выполнение следующих априорных предположений А и Б, которые формируют слабо компактное множество корректности.

А. Ядро $N(\mathcal{A})$ оператора \mathcal{A} истокопредставимо, т.е. $N(\mathcal{A}) = R(\mathcal{D})$, где $\mathcal{D} : Q \rightarrow H$, пространство Q – гильбертово, а приближения к \mathcal{D} и \mathcal{D}^* обладают свойствами сильной поточечной сходимости типа (2).

Б. Известна оценка $\|u_*\| \leq r_*$ и, кроме того, выполняются следующие условия истокопредставимости нормального решения u_* с известными оценками норм источников:

$$\begin{aligned} u_* &= \mathcal{A}^*v_* + \mathcal{D}q_*, & \|v_*\|_F &\leq r_v, & \|q_*\|_Q &\leq r_q, \\ u_* &= \mathcal{A}^*v_0 + \mathcal{B}^*h_0, & \|(v_0, h_0)\|_{F \times G} &\leq r_0. \end{aligned}$$

Предлагаемый алгоритм является двухэтапным: на первом этапе приближённо ищется первая компонента $u_1 = \mathcal{A}^*v_*$ разложения из условия Б, на втором этапе — вторая компонента $u_2 = \mathcal{D}q_*$ этого разложения.

На первом этапе:

1.1. Находится некоторое решение \tilde{u} задачи

$$\|\tilde{\mathcal{A}}u - \tilde{f}\|_F \rightarrow \inf_{u \in \tilde{U}}, \quad \tilde{U} = \{u \in H \mid \|\tilde{\mathcal{B}}u - \tilde{g}\|_G \leq \tilde{R}, \|u\|_H \leq r_*\}$$

и вычисляется элемент $\tilde{w} = \tilde{\mathcal{A}}\tilde{u}$, являющийся приближением к $w_* = \mathcal{A}u_*$.

1.2. Вариационным методом [1, 2] с использованием известного значения r_v из условия Б решается уравнение $\mathcal{A}u = w_*$ и получается приближение \tilde{u}_1 к компоненте разложения $u_1 = \mathcal{A}^*v_*$.

1.3. Если выполняется условие $\|\tilde{\mathcal{B}}\tilde{u}_1 - \tilde{g}\|_G \leq \tilde{R}$, то производится останов и найденное \tilde{u}_1 объявляется приближенным решением. Иначе переходим ко второму этапу.

На втором этапе:

2.1. На отрезке $x \in [0, r_*]$ ищется решение \tilde{x} уравнения $\tilde{I}_*(x) = \tilde{R}$, где

$$\tilde{I}_*(x) = \min_{q \in \tilde{K}(x)} \|\tilde{\mathcal{B}}(\tilde{u}_1 + \tilde{\mathcal{D}}q) - \tilde{g}\|, \quad \tilde{K}(x) = \{q \in Q \mid \|\tilde{\mathcal{D}}q\|_H \leq x, \|q\|_Q \leq r_q\}, \quad (3)$$

и находится некоторое \tilde{q} , доставляющее минимум функционалу из (3) при $x = \tilde{x}$. Вычисляется элемент $\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{D}}\tilde{q}$, являющийся приближением к образу $\mathcal{B}u_2$ второй компоненты $u_2 = \mathcal{D}q_*$ разложения из условия Б.

2.2. Решается система уравнений $\mathcal{A}u = 0$, $\mathcal{B}u = \mathcal{B}u_2$ вариационным методом с использованием известного значения r_0 из условия Б и получается приближение \tilde{u}_2 к $u_2 = \mathcal{D}q_*$. Производится останов и сумма $\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2$ объявляется итоговым приближением к u_* .

Рассматриваются приложения к задачам граничного управления для волнового уравнения при наличии терминальных фазовых ограничений эллипсоидального вида. Приводятся соответствующие вычислительные иллюстрации.

Список литературы

1. Потапов М. М. Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущённым оператором // Доклады РАН. 1999. Т. 365. № 5. С. 596 – 598.
2. Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М., Разгулин А. В. Приближённое решение двойственных задач управления и наблюдения. М.: Изд. отдел факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2010.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ, СОХРАНЯЮЩИЕ ГЛОБАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА
РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ**

Еленин Георгий Георгиевич

д.ф – м. н., профессор

E-mail: elenin2@rambler.ru

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Ключевой составляющей современных междисциплинарных исследований (небесная механика, астрофизика, молекулярная динамика) являются вычислительные методы, позволяющие моделировать динамику множества взаимодействующих материальных точек на больших временных отрезках с помощью высокопроизводительных вычислительных систем.

Методы должны не только аппроксимировать точные решения задачи Коши для гамильтоновых систем, но и сохранять их глобальные свойства. К таким свойствам относятся симплектичность преобразования любого начального состояния в текущее состояние, обратимость решения во времени, сохранение фазового объема, а также сохранение полного количества движения, полного момента количества движения и полной энергии при отсутствии внешних сил [1].

Широко распространенные вычислительные методы сохраняют лишь часть перечисленных глобальных свойств точного решения. В докладе обсуждается возможность создания новых вычислительных методов, сохраняющих максимальное число глобальных свойств решений задачи Коши для гамильтоновых систем. Приводятся результаты вычислительных экспериментов с модельными задачами. Апостериорно определяются дефекты симплектичности, обратимости и первых интегралов традиционных и новых вычислительных методов. Некоторые результаты работы содержатся в [2-5].

Список литературы

1. Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 31. Springer, 2nd ed. 2006, 644 p.
2. Еленин Г. Г., Шляхов П. И. О консервативности двухстадийных симметрично-симплектических методов Рунге-Кутты и метода Штермера-Верле. // Дифференциальные уравнения, 2010, т. 46, № 7, 983-989.
3. Еленин Г. Г., Шляхов П. И. Геометрическая структура пространства параметров трехстадийных симплектических методов Рунге-Кутты. // Математическое моделирование, 2011, т. 23, № 5, 16-34.

4. Еленин Г. Г., Александров П. А. О консервативности двухпараметрического семейства трехстадийных симметрично-симплектических методов Рунге-Кутты. // Дифференциальные уравнения, 2012, т. 48, №. 7, 981-989.
5. Александров П. А., Еленин Г. Г. О возможности построения консервативного метода решения задачи Коши для гамильтоновых систем на основе двухстадийных симметрично-симплектических методов Рунге-Кутты. // Математическое моделирование, 2014, (в печати).

**О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ
ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА**

Задворнов Олег Анатольевич, Задворнова Галина Олеговна

д.ф.м. н., профессор; аспирантка КВМ

E-mail: olzad@mail.ru

*Институт вычислительной математики и информационных
технологий КФУ, Казань, Россия*

Рассматривается краевая задача описывающая установившийся процесс фильтрации несжимаемой жидкости в пористой неоднородной среде. Фильтрация происходит в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с липшиц-непрерывной границей $\partial\Omega$, на которой давление считается известным, при наличии точечного источника интенсивности q в начале координат (считаем, что начало координат – внутренняя точка Ω):

$$-\operatorname{div} \left(\frac{g(x, |\nabla w(x)|)}{|\nabla w(x)|} \nabla w(x) \right) = q\delta(x), \quad x \in \Omega; \quad w(x) = w_\gamma(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (1)$$

Предполагаем, что для каждого $t \geq 0$ функция $x \rightarrow g(x, t)$ измерима на Ω , существуют постоянные $L \geq \mu > 0$, $p_0 \geq 2$, $k_0, c_0, \varepsilon_0 > 0$ и функция $d_0 \in L_{p_0}(\Omega)$ такие, что выполнены следующие неравенства

$$L(s-t) \geq g(x, s) - g(x, t) \geq \mu(s-t), \quad s \geq t > 0, \quad x \in \Omega, \quad \beta > \frac{p_0 - 1}{p_0}n - 1, \quad (2)$$

$$|g(x, t) - k_0 t| \leq c_0 |x|^\beta t + d_0(x), \quad t \geq 0, \quad x \in B_{\varepsilon_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon_0\} \subset \Omega. \quad (3)$$

В сделанных предположениях краевая задача (1), имеет решение (см. [1]), в том смысле, что существует функция $w \in W_1^{(1)}(\Omega)$ ($w(x) = w_\gamma(x)$, $x \in \partial\Omega$), и для w выполнено вариационное равенство

$$\int_{\Omega} \left(\frac{g(x, |\nabla w(x)|)}{|\nabla w(x)|} \nabla w(x), \nabla \eta(x) \right) dx = q \eta(0), \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Это решение представимо [1] в виде $w = \xi + u$, где $u \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$, а функция $\xi = \tilde{\xi} + k_0^{-1}q\varphi$, φ - фундаментальное решение оператора Лапласа, $\tilde{\xi}$ - решение линейной краевой задачи:

$$k_0 \Delta \tilde{\xi}(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad \tilde{\xi}(x) = w_\gamma(x) - k_0^{-1}q\varphi(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Для поиска u используем метод простой итерации (u_0 задано произвольно)

$$\int_{\Omega} (\nabla u_{m+1}, \nabla \eta) \, dx = \int_{\Omega} (\nabla u_m, \nabla \eta) \, dx - \tau \int_{\Omega} (G(x, \nabla u_m), \nabla \eta) \, dx, \quad (4)$$

где функция $G : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ определена следующим образом:

$$G(x, \lambda) = g(x, |\nabla \xi(x) + \lambda|) \frac{\nabla \xi(x) + \lambda}{|\nabla \xi(x) + \lambda|} - k_0 \nabla \xi(x), \quad x \in \Omega, \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Доказана следующая

Теорема 1. *Итерационный метод (4) при $0 < \tau < 2/L$ сходится как геометрическая прогрессия в норме пространства $\dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$:*

$$\|u_m - u\| \leq (K_\tau)^m \|u_0 - u\|, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad \|v\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 \, dx,$$

где $K_\tau = \max\{1 - \tau\mu; \tau L - 1\}$. Оптимальным значением итерационного параметра (при котором $\inf_{\tau > 0} K_\tau = (L - \mu)/(L + \mu)$) является $\tau_* = 2/(L + \mu)$.

В [3] доказано, что $u \in \dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$ обладает несколько большей гладкостью, а именно является гельдеровой во всякой строго внутренней подобласти. Далее следуя методам, изложенным в монографии Кошелева [2], установлена сходимость итерационного метода (4) в гельдеровской норме.

Теорема 2. *Пусть для функции g выполнены условия (2), (3) с постоянной $p_0 > n$ и константами L и μ удовлетворяющими неравенству: $(L - \mu)/(L + \mu) \sqrt{(n - 2)^2/(n - 1) + 1} < 1$. Тогда существует такое достаточно малое $\gamma > 0$, что при $\tau = \tau_*$ и начальном приближении $u_0 \in W_{p_0}^{(1)}(\tilde{\omega}) \cap \dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$, $\omega \subset\subset \tilde{\omega} \subset\subset \Omega$, итерационный процесс (4) сходится как геометрическая прогрессия в норме пространства $C^\gamma(\omega)$.*

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-01-00908 и гранта ВР 063100027.

Список литературы

1. Задворнов О.А. Существование решения квазилинейной эллиптической краевой задачи при наличии точечных источников// Ученые записки Казанского государственного университета. Физико-математические науки. – 2010. – Т. 125, кн. 1. – С. 155-163.
2. Кошелев А.И. Регулярность решений эллиптических уравнений и систем// М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 240 с.

3. Задворнов О.А., Задворнова Г.О. О свойствах гладкости решения нелинейной задачи фильтрации при наличии точечного источника// Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. - 2012. - Т. 154, Кн. 1. - С. 162-166.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ НЕЗАКРЕПЛЕННОЙ ОБОЛОЧКИ В
РАМКАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ**

Карчевский Михаил Миронович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: mkarchev@kpfu.ru

Казанский федеральный университет, Казань, Россия

Вопросы разрешимости краевых задач геометрически нелинейной теории тонких оболочек издавна привлекают внимание исследователей. Обычно предполагается выполненным то или иное закрепление границы оболочки. В предлагаемой работе методами, развитыми в [1], изучается задача о равновесии свободной пологой оболочки. При этом возникают определенные затруднения уже на уровне корректной постановки задачи. Материал оболочки предполагается, вообще говоря, физически нелинейным, деформации срединной поверхности описываются нелинейными соотношениями теории среднего изгиба.

Задача о равновесии пологой незакрепленной оболочки формулируется как задача минимизации функционала (потенциальной энергии)

$$F(u) = \int_{\Omega} \varphi(\varepsilon, \kappa) dx - \int_{\Omega} f \cdot u dx - \int_{\Gamma} g \cdot u dx - \int_{\Gamma} h \frac{\partial u_3}{\partial \nu} dx.$$

Здесь $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область, отождествляемая с срединной поверхностью оболочки, Γ — граница области Ω , f , g , h — заданные функции, характеризующие плотности внешних сил и моментов, действующих на оболочку, ε , κ — тангенциальная и изгибная деформации оболочки, $\varphi(\varepsilon, \kappa)$ — плотность потенциальной энергии деформации срединной поверхности оболочки

Показано, что соответствующая вариационная задача имеет решение в классе перемещений, исключаящих бесконечно малые жесткие движения оболочки, если величины внешних сил и моментов согласованы с порядком роста на бесконечности плотности потенциальной энергии деформации срединной поверхности оболочки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00955, 12-01-97022, 12-01-31515)

Список литературы

1. Карчевский М.М. О разрешимости вариационных задач нелинейной теории пологих оболочек// Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, №7. С. 1996–1203..

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Кобельков Георгий Михайлович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: kobelkov@dodo.inm.ras.ru

*Факультет МехМат МГУ имени М. В. Ломоносова, Институт
вычислительной математики РАН, Москва, Россия*

Пусть Ω ограниченная липшицева область в R^3 и

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}), \quad \operatorname{div} \mathbf{f} = \partial_{x_1} f_1 + \partial_{x_2} f_2, \quad |\nabla \mathbf{f}|^2 = \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)^2.$$

О. А. Ладыженская предложила (см., например, [1]) модификацию уравнений Навье-Стокса, позволяющую доказать при соответствующей гладкости правых частей существование решения “в целом” для трехмерной задачи:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} - \nu \partial_z^2 \mathbf{u} - \nu \varepsilon [\operatorname{div} (D(\mathbf{u}, w) \nabla \mathbf{u}) + \partial_z (D(\mathbf{u}, w) \partial_z \mathbf{u})] \\ + \nabla p + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + w \mathbf{u}_z = \mathbf{f}, \\ w_t - \nu \Delta w - \nu \partial_z^2 w - \nu \varepsilon [\operatorname{div} (D(\mathbf{u}, w) \nabla w) + \partial_z (D(\mathbf{u}, w) \partial_z w)] \\ + p_z + (\mathbf{u} \cdot \nabla) w + w w_z = g, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} + w_z = 0,$$

$$(\mathbf{u}, w)(x, 0) = (\mathbf{u}_0, w_0)(x), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_0 + \partial_z w_0 = 0, \quad (\mathbf{u}, w) \Big|_{\partial \Omega \times [0, T]} = 0$$

при любом $\varepsilon > 0$, где $D(\mathbf{u}, w) = |\nabla \mathbf{u}|^2 + |\partial_z \mathbf{u}|^2$.

На самом деле имеет место более сильный результат. А именно, теорема существования “в целом” имеет место при любом $\varepsilon > 0$, если в качестве $D(\mathbf{u}, w)$ взять $D(\mathbf{u}, w) = |\nabla \mathbf{u}|^2$, удалить $\partial_z (D(\mathbf{u}, w) \partial_z \mathbf{u})$ из первого (векторного) уравнения (1), а уравнение для w оставить неизменным, т.е. оператор в уравнениях усиливается только по горизонтальным переменным, а уравнение по вертикали остается неизменным.

Список литературы

1. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

О СХОДИМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Матус Петр Павлович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: matus@im.bas-net.by

*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь,
Католический университет им. Павла II, Люблин, Польша*

Доклад посвящен исследованию вопросов устойчивости и сходимости разностных схем для начально-краевых задач для квазилинейных параболических уравнений с обобщенными решениями. Принципиальной особенностью представленных результатов является то, что они получены в предположении только на входные данные [1,2].

Приведены достаточно простые условия на начальную функцию, которые гарантируют как существование глобального гладкого решения, так и его разрушение в непрерывном и дискретном случае для многомерного уравнения теплопроводности с нелинейным источником. Представленный математический аппарат основан на „студенческой“ технике метода энергетических неравенств и анализе соответствующих законов сохранения [3].

Предложен новый математический аппарат для получения двусторонних оценок неизвестного решения на основе дискретных аналогов теорем сравнения Чаплыгина и Хартмана [4].

Дается обзор последних результатов по построению новых классов разностных схем для многомерных квазилинейных уравнений конвекции-диффузии-реакции, которые являются точными на решениях типа „бегущих волн“ [5].

Список литературы

1. Jovanovic B., Lapinska-Chrzczonec M., Matus A., Matus P. Stability of finite-difference schemes for ibvp for multidimensional parabolic equations with a nonlinear source of the power type // *Comp. Meth. Appl. Math.* 2012. V. 12, № 3. P. 289–305.
2. Matus P. About convergence of difference schemes for IBVP for quasilinear parabolic equations with generalized solutions // *Comp. Meth. Appl. Math.* 2014. V. 14. в печати.
3. Матус П.П. О роли законов сохранения в проблеме возникновения неустойчивых решений для квазилинейных параболических уравнений и их аппроксимаций // *Дифференциальные уравнения.* 2013. Т. 49, № 7. С. 911–922.
4. Матус П.П., Парадинска А., Щадинский Д.А. Дискретные аналоги

теорем сравнения и их применение // Доклады НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 4. С. 16–20.

5. Lapinska-Chrzczonec M., Matus P. Exact difference schemes for a two-dimensional convection-diffusion-reaction equation // Computers & Mathematics with Applications. 2014. <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2014.01.022>.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ДРОБНЫХ РАЗРЕШАЮЩИХ СЕМЕЙСТВ

Пискарев Сергей Игоревич

д.ф. – м. н., в. н. с.

E-mail: piskarev@gmail.com

НИВЦ МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Работа посвящена аппроксимации дробных разрешающих семейств по пространству и времени. Данный подход использует понятия общей аппроксимационной схемы [3], включающей в себя метод конечных разностей, метод конечных элементов и проекционные методы.

Большое количество публикаций было посвящено аппроксимации C_0 -полугрупп операторов см., например, [2,4]. В данной работе мы изучаем дискретизацию задачи Коши для дифференциального уравнения дробного порядка. Пусть $\alpha > 0$ и $m = [\alpha]$. Обозначим через $T_\alpha(t, A)$, $t > 0$, разрешающий оператор $x \mapsto u(t)$ (называемый также α -раз полугруппой) равномерно корректно поставленной задачи Коши

$$(\mathbf{D}_t^\alpha u)(t) = Au(t), \quad u(0) = x, u^{(k)}(0) = 0, k = 1, \dots, m - 1, \quad (1)$$

в банаховом пространстве E , где \mathbf{D}_t^α – производная по Капуто. Дробное интегрирование порядка $\alpha > 0$ определяется формулой

$$(I_{0+}^\alpha f)(t) := (g_\alpha * f)(t), \quad t > 0,$$

где $g_\alpha(t) := \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$ и $\Gamma(\alpha)$ – Гамма функция. Производная Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$ определяется как $(D_{0+}^\alpha f)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^m (I_{0+}^{m-\alpha} f)(t)$, а производная по Капуто дробного порядка $\alpha > 0$ определяется как

$$(\mathbf{D}_t^\alpha f)(t) = (D_{0+}^\alpha f)(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} t^{k-\alpha}.$$

На гладких функциях $f(\cdot)$ имеем $(\mathbf{D}_t^\alpha f)(t) := I_{0+}^{m-\alpha} f^{(m)}(t)$. Предположим, что разрешающее семейство $T_\alpha(t, A)$ для задачи (1) удовлетворяет оценке $\|T_\alpha(t, A)\| \leq Me^{\omega t}$, $t > 0$, для некоторых $M, \omega > 0$. Заметим, что $T_\alpha(t, A)$ для линейного ограниченного оператора $A \in B(E)$ задается [1] функцией Миттаг-Леффлера $E_\alpha(t^\alpha A)$, т.е. $T_\alpha(t, A) = E_\alpha(t^\alpha A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t^\alpha A)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}$.

Полудискретная аппроксимация на общей аппроксимационной схеме задачи (1) – это задачи Коши в банаховых пространствах E_n

$$\mathbf{D}_t^\alpha u_n(t) = A_n u_n(t), t > 0, u_n(0) = x_n, u_n^{(k)}(0) = 0, k = 1, \dots, m - 1.$$

Обозначим через $\mathcal{C}(E)$ множество линейных замкнутых и плотно определенных операторов в E . Напомним сначала теорему Троттера-Като:

Теорема 1. Пусть $A \in \mathcal{C}(E)$, $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$ и они порождают C_0 -полугруппы. Следующие условия (A) и (B) эквивалентны условию (C).

(A) *Согласованность.* Существует $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(A_n)$ такое, что резольвенты сходятся $(\lambda I_n - A_n)^{-1} \rightarrow (\lambda I - A)^{-1}$;

(B) *Устойчивость.* Существуют константы $M \geq 1$ и ω , не зависящие от n и такие, что $\|\exp(tA_n)\| \leq M \exp(\omega t)$ при $t \geq 0$ и любых $n \in \mathbb{Z}$;

(C) *Сходимость.* Для любого конечного числа $T > 0$ имеем $\max_{t \in [0, T]} \|\exp(tA_n)u_n^0 - p_n \exp(tA)u^0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, как только $u_n^0 \rightarrow u^0$ при любых $u_n^0 \in E_n$, $u^0 \in E$.

Теорема 2. Предположим, что операторы $A \in \mathcal{C}(E)$, $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$ порождают C_0 -полугруппы. Предположим также, что выполнены условия (A) и (B) теоремы 1. Тогда неявная разностная схема

$$\frac{\bar{U}_n(t + \tau_n) - \bar{U}_n(t)}{\tau_n} = A_n \bar{U}_n(t + \tau), \quad \bar{U}_n(0) = u_n^0, \quad (2)$$

устойчива, т.е. $\|(I_n - \tau_n A_n)^{-k_n}\| \leq M_1 e^{\omega_1 t}$, $t = k_n \tau_n \in \bar{R}_+$. Схема (2) аппроксимирует решение задачи Коши

$$u'(t) = Au(t), \quad u(0) = u^0, \quad t \in R_+,$$

т.е. $\bar{U}_n(t) \equiv (I_n - \tau_n A_n)^{-k_n} u_n^0 \rightarrow \exp(tA)u^0$ равномерно по $t = k_n \tau_n \in [0, T]$ при $u_n^0 \rightarrow u^0$, $n \rightarrow \infty$, $k_n \rightarrow \infty$, $\tau_n \rightarrow 0$.

Целью данной работы является получение аналогов теоремы 1 для α -раз резольвентных семейств и получение аналога утверждения при дискретизации по времени дробных уравнений в банаховом пространстве, т.е. получение аналога теоремы 2.

Список литературы

1. Bajlekova E. G. Fractional evolution equations in Banach spaces. Ph.D. Thesis, Eindhoven University of Technology, 2001.
2. Guidetti D. Karasozen B. and Piskarev S. Approximation of abstract differential equations // Journal of Mathematical Sciences, **122**, 2004, P. 3013–3054.
3. Vainikko G. Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem) // Nonlinear Anal. **2**, 1978, P. 647–687.
4. Пискарев С. И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и их аппроксимация. М.: Из-во МГУ, 2005.

**ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ДЛЯ
УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА**

Попов Игорь Викторович, Фрязинов Игорь Владимирович

к.ф – м.н., доцент; к.ф – м.н., в. н. с.

E-mail: piv2964@mail.ru

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва,
Россия*

В докладе рассматриваются разностные схемы на неструктурированных треугольных сетках, для расчёта движения вязкой сжимаемой жидкости для уравнений Навье–Стокса. В результате построены две сеточные схемы, аппроксимирующие уравнения Навье–Стокса по методу контрольных объемов. Детали аппроксимации на треугольной сетке можно почерпнуть из работы [1]. Первая схема полностью явная, вторая — явная по импульсу и энергии, и неявная по плотности. Схемы применены к расчётам классической задачи о течения вязкой жидкости в каверне с подвижной верхней крышкой. Решения определялись при малом числе Маха, когда сжимаемое течение жидкости близко к течению несжимаемой жидкости. Как показали расчёты, получаемое по обеим схемам решение согласуется с результатами других авторов, полученных на ортогональных сетках.

Список литературы

1. Попов И. В., Фрязинов И. В. Метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений газовой динамики на треугольных и тетраэдральных сетках. // Матем. моделирование. 2012. Т. 24, № 6. С. 109 – 127.

**АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ
ПРОСТРАНСТВЕ**

Соловьёв Сергей Иванович

д. ф – м. н., доцент

E-mail: sergei.solovyev@kpfu.ru

Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казанский федеральный университет, Казань, Россия

При решении дифференциальных задач на собственные значения метод конечных элементов (МКЭ) опирается на вариационную формулировку задачи $a(u, v) = \lambda b(u, v)$ в бесконечномерном гильбертовом пространстве V с нормой $\|\cdot\|$. Предположим, что билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ положительно определенная и ограниченная, билинейная форма $b(\cdot, \cdot)$ положительная и вполне непрерывная. Тогда эта задача имеет неубывающую последовательность положительных конечнократных собственных значений $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$, с предельной точкой в бесконечности, занумерованных с учетом кратности, т.е. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots, \lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Этим собственным значениям соответствует ортонормированная система собственных элементов $u_k, k = 1, 2, \dots$, такая, что $a(u_i, u_j) = \lambda_i \delta_{ij}, b(u_i, u_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$. Элементы $u_k, k = 1, 2, \dots$, образуют полную систему в пространстве V .

Исходная задача аппроксимируется задачей $a_h(u^h, v^h) = \lambda^h b_h(u^h, v^h)$ в конечномерном подпространстве V_h пространства V . Предположим, что $\varepsilon_h(v) = \inf_{v^h \in V_h} \|v - v^h\| \rightarrow 0$ для любого элемента v из V при $h \rightarrow 0$. Для числовой прямой \mathbb{R} отображения $a_h : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ и $b_h : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ являются симметричными билинейными формами $a_h(\cdot, \cdot)$ и $b_h(\cdot, \cdot)$. Предположим, что $\delta_0^h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, где $\delta_0^h = \|(a_h - a)|_{V_h \times V_h}\| + \|(b_h - b)|_{V_h \times V_h}\|$. Норма билинейной формы $c|_{V_1 \times V_2} : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ определяется равенством

$$\|c|_{V_1 \times V_2}\| = \sup_{u \in V_1, v \in V_2, \|u\|=\|v\|=1} |c(u, v)|.$$

Обозначим $K_h = \ker b_h, \ker b_h = \{v^h : v^h \in V^h, b_h(v^h, v^h) = 0\}, N_h = \text{codim } K_h$. Заметим, что $N_h = \text{codim } K_h = \dim(V_h/K_h) = \dim V_h - \dim K_h$.

При достаточно малых h конечномерная задача имеет N_h собственных значений $\lambda_k^h, k = \overline{1, N_h}$, занумерованных с учетом кратности, т.е. $0 < \lambda_1^h \leq \lambda_2^h \leq \dots \leq \lambda_{N_h}^h$. Собственным значениям соответствует система собственных элементов $u_k^h, k = \overline{1, N_h}$, такая, что $a_h(u_i^h, u_j^h) = \delta_{ij} \lambda_i^h, b_h(u_i^h, u_j^h) = \delta_{ij}, i, j = \overline{1, N_h}$. Элементы $u_k^h, k = \overline{1, N_h}$, образуют полную систему в пространстве K_h^\perp . Для достаточно малых h получены оценки погрешности

$$|\lambda_k^h - \lambda_k| \leq c[\delta_2^h + (\varepsilon^h + \delta_1^h)^2], \quad \vartheta(U_k, U_k^h) \leq c(\varepsilon^h + \delta_1^h).$$

Через c обозначаются различные постоянные, не зависящие от h , $\vartheta(V_1, V_2)$ – раствор подпространств V_1 и V_2 пространства V , $\varepsilon^h = \sup_{u \in U, \|u\|=1} \varepsilon_h(u)$, $\delta_1^h =$

$\|(a_h - a)|_{P_h U \times V_h}\| + \|(b_h - b)|_{P_h U \times V_h}\|$, $\delta_2^h = \|(a_h - a)|_{P_h U \times P_h U}\| + \|(b_h - b)|_{P_h U \times P_h U}\|$, $U = U_k$ – собственное подпространство, отвечающее λ_k , U_k^h – приближение к собственному подпространству U_k , оператор $P_h : V \rightarrow V_h$ определяется по правилу $a(u - P_h u, v^h) = 0$ для любого $v^h \in V_h$, где $u \in V$.

Пусть u_i^h , $i = \overline{1, k}$, – приближенные собственные элементы, удовлетворяющие условиям $a_h(u_i^h, u_j^h) = \delta_{ij} \lambda_i^h$, $b_h(u_i^h, u_j^h) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, k}$. Тогда при фиксированном $1 \leq k < N_h$ и достаточно малом h существуют собственные элементы u_i , $i = \overline{1, k}$, исходной задачи, $a(u_i, u_j) = \delta_{ij} \lambda_i$, $b(u_i, u_j) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, k}$, для которых $\|u_i^h - u_i\| \leq c(\varepsilon^h + \delta_1^h)$, $i = \overline{1, k}$.

Рассмотрим модельную задачу $-(pu')' + qu = \lambda ru$, $x \in (0, 1)$, $u(0) = u(1) = 0$, с положительными гладкими коэффициентами p , q , r , и ее аппроксимацию по МКЭ с численным интегрированием и элементами n -го порядка. Если применяемая квадратурная формула точна для многочленов степени $2n - \nu - 1$ при $\nu = 0, 1$, то $\delta_0^h \leq c h^{2-\nu}$, $\delta_1^h \leq c h^{n-\nu+1}$, $\delta_2^h \leq c h^{2n-\nu}$. Отсюда, учитывая $\varepsilon^h \leq c h^n$, выводим оценки погрешности МКЭ [1–7]. Аналогичные результаты справедливы и в многомерном случае.

Работа поддержана РФФИ (проекты 13-01-00908, 14-01-00755).

Список литературы

1. Соловьёв С. И. Метод конечных элементов для несамосопряженных спектральных задач // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2006. Т. 148, кн. 4. С. 51 – 62.
2. Соловьёв С. И. Аппроксимация вариационных задач на собственные значения // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 7. С. 1022 – 1032.
3. Соловьёв С. И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближенные методы. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011.
4. Соловьёв С. И. Аппроксимация неотрицательно-определенных спектральных задач // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 8. С. 1075 – 1082.
5. Соловьёв С. И. Аппроксимация знаконеопределенных спектральных задач // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 7. С. 1042 – 1055.
6. Соловьёв С. И. Аппроксимация дифференциальных задач на собственные значения // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 7. С. 936 – 944.

7. Solov'ëv S.I. Finite element approximation with numerical integration for differential eigenvalue problems // Applied Numerical Mathematics. 2014.<http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2014.02.009>

**АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ОШИБОК СХЕМ МКЭ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**

Тимербаев Марат Равилевич

д.ф.м. н., профессор

E-mail: marat.timerbaev@kpfu.ru

Институт ВМ и ИТ КПФУ, Казань, Россия

В прямоугольной области $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset R^2$ рассматривается модельная краевая задача

$$Au \equiv -\nabla \cdot (\rho^{2\alpha} a \nabla u) = f \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \quad (\alpha < 1/2).$$

Здесь для точки $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ функция $\rho(x) = x_1$ есть расстояние от x до части границы $\Gamma = \{0\} \times [0, 1]$, матрица $a(x) = \text{diag}(a_1(x), a_2(x))$ — диагональная матрица положительных в $\bar{\Omega}$ коэффициентов класса $C^1(\bar{\Omega})$. Наличие множителя $\rho^{2\alpha}$ при $\alpha \neq 0$ приводит к сингулярности коэффициентов дифференциального оператора A в окрестности Γ и возникновению в этой окрестности особенности у решения. Ограничение степени вырождения $\alpha < 1/2$ необходимо для корректности краевых условий Дирихле на линии вырождения Γ .

Вариационный подход к решению краевой задачи заключается в отыскании функции $u \in H$ такой, что

$$\mathbf{a}(u, v) \equiv \int_{\Omega} \rho^{2\alpha} a \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle \equiv \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H,$$

где H — замыкание финитных гладких функций в энергетической норме билинейной формы \mathbf{a} . Пусть V_h — некоторое конечномерное подпространство пространства H , $u_h \in V_h$ — приближение по Галеркину вариационной задачи:

$$\mathbf{a}(u_h, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_h.$$

Проблема выбора подходящего аппроксимирующего подпространства V_h в методе Галеркина для задач с особенностями является первостепенной. Если T_h — триангуляция области Ω на линейные конечные элементы и X_h — пространство кусочно-линейных функций, ассоциированное с триангуляцией T_h , то в стандартном методе конечных элементов $V_h = \{v \in X_h : v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$. Мы показываем, что этот кусочно-полиномиальный метод аппроксимации не является удовлетворительным для задач с вырождением коэффициентов. Например, в случае единичной матрицы $a(x)$ и степени вырождения $\alpha = 0.4$, правой части $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $f = O(1)$, для достижения точности $\varepsilon = 10^{-4}$ в энергетической норме требуется только в окрестности

Γ взять число конечных элементов порядка 10^{35} , что делает дискретную задачу нерешаемой.

В работе показано, что для эффективной аппроксимации подходящими подпространствами являются подпространства конечных элементов $V_h = \{\rho^{1-2\alpha}v : v \in X_h, v = 0 \text{ на } \overline{\partial\Omega \setminus \Gamma}\}$ с мультипликативным весом $\rho^{1-2\alpha}$, в точности описывающим влияние вырождения коэффициентов на решение задачи. С полным основанием можно назвать такой подход в выборе V_h мультипликативным выделением особенности. Устанавливается оптимальная сходимость дискретных решений $u_h \in V_h$ в энергетической норме. Доказываются апостериорные оценки ошибок предложенных схем для семейства весовых норм, включая энергетическую норму:

Теорема 1. *Для решения $u_h \in V_h$ и для всех $\delta \in (\alpha - 1/2, 1/2 - \alpha)$ имеет место оценка*

$$\|\rho^{\alpha+\delta}\nabla(u - u_h)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c \sum_{K \in T_h} \eta_{\delta,K}^2(u_h)$$

с индикатором ошибки на элементе

$$\begin{aligned} \eta_{\delta,K}^2(u_h) &= \frac{h_K^2}{\rho_K^2} \int_K \rho^{2(1+\delta-\alpha)} |f + \nabla \cdot (\rho^{2\alpha} a \nabla u_h)|^2 dx \\ &+ \frac{h_K}{2} \sum_{S \in \mathcal{E}(K)} \int_S \rho^{2(\alpha+\delta)} |J_S(a \nabla u_h \cdot \mathbf{n}_S)|^2 dx, \end{aligned}$$

где $\mathcal{E}(K)$ — стороны треугольника K , не лежащие на $\partial\Omega$, \mathbf{n}_S — нормаль к стороне S , $J_S(a \nabla u_h \cdot \mathbf{n}_S)$ — скачок функции $a \nabla u_h \cdot \mathbf{n}_S$ на общей стороне S двух соседних конечных элементов.

На основе апостериорных оценок предлагаются адаптивные стратегии сгущения сетки для уточнения дискретного решения. Численные эксперименты подтверждают теоретические выводы и оценки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 13-01-00908, 12-01-97026).

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ НА ОСНОВЕ ТЕНЗОРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Тыртышников Евгений Евгеньевич

чл. – корр. РАН, профессор

E-mail: eugene.tyrtysnikov@gmail.com

*ИВМ РАН, Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва,
Россия*

При дискретизации функции от d переменных на сетке, полученной как декартово произведение одномерных сеток, естественно возникает d -мерная матрица. Одна из типичных задач – решение системы линейных алгебраических уравнений, которой удовлетворяют элементы этой d -мерной матрицы. При выборе той или иной сквозной нумерации эти элементы записываются в каком-то одномерном массиве, или, как иногда говорят, “векторизуются”. В более абстрактной ситуации оказывается полезным рассматривать обратное преобразование – превращение вектора в некоторую d -мерную матрицу. Его часто называют “тензоризацией” вектора. Аналогичным образом матрица коэффициентов системы линейных уравнений может рассматриваться как $2d$ -мерная матрица. Польза от тензоризации векторов и матриц заключается в возможности применения тензорных разложений для их приближенного представления.

Мы рассмотрим некоторые новые применения представлений d -мерных матриц в виде “тензорных поездов”, приведшие к эффективным численным методам вычисления многомерной свертки [1], решения уравнений типа Власова при моделировании ионосферной плазмы [2] и дифференциальных уравнений с дробной производной [3].

Список литературы

1. Kazeev V. A., Khoromskij B. N., Tyrtysnikov E. E. Multilevel Toeplitz Matrices Generated by Tensor-Structured Vectors and Convolution with Logarithmic Complexity // SIAM J. Sci. Comput., 2013, vol. 35, no. 3, pp. A1511 – A1536.
2. Dolgov S. V., Smirnov A. P., Tyrtysnikov E. E. Low-rank approximation in the numerical modeling of the Farley-Buneman instability in ionospheric plasma // Journal of Computational Physics, 2014, vol. 263, pp. 268 – 282.
3. Roberts J. A., Savostyanov D. V., Tyrtysnikov E. E., Superfast solution of linear convolutional Volterra equations using QTT approximation, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, vol.260, pp. 434 – 448.

NUMERICAL UPSCALING AND SOLUTION METHODS FOR SIMULATION OF FLOWS IN HETEROGENEOUS POROUS MEDIA

Efendiev Y., Lazarov R., Shi K.

E-mail: efendiev, lazarov, shi@math.tamu.edu

Dept. of Mathematics, Texas A&M University, College Station, Texas, USA

The generalized Stokes equations (called also Brinkman equations),

$$-\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p + \mu\kappa^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{on } \Gamma, \quad (1)$$

where μ is the viscosity and κ is the permeability, were introduced in 1947 by Brinkman as an enhancement of Darcy law (by adding dissipative term scaled by the viscosity) to better describe the flows of incompressible fluids in highly porous media. Examples of such media are industrial open foams, filters, insulation materials, and many others, shown below.

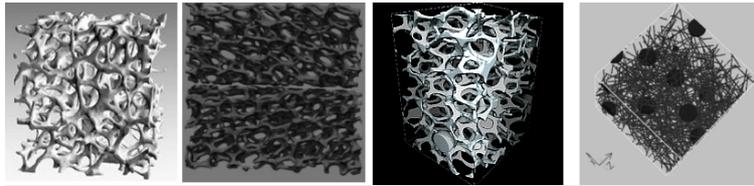


Рис. 2: 3-D images of various materials on a micro-level.

Motivated by various applications of such materials we have developed a numerical method for computing flows in heterogeneous media of high porosity with complicated internal structure of the permeability κ .

We shall present an overview of some solution strategies developed in [2],[3],[4],[5] for numerical treatment of flows in highly heterogeneous porous media. The goal is to derive, study, and test numerical methods that work well for both, Darcy and Brinkman equations, and could be used either as a stand-alone numerical upscaling procedure (see, [3]), or as robust (with respect to the high contrast of the media) iterative solvers for the finite element approximation on a fine-mesh spatial scale, [2].

The approximation methods rely on recent advances in the area of discontinuous Galerkin finite element methods for flow problems (see, e.g. [6]) and their hybridization (see, e.g. [7]) and involve also multiscale finite element approximations, [1],[8]. The designed preconditioners are based on standard overlapping domain decomposition technique. The robustness with respect to the contrast is achieved via special construction of a coarse grid space that includes patched together eigenfunctions corresponding to the smallest

eigenvalues of properly weighted local spectral problems. This approach has a natural abstract framework described in [3].

The main target of our testing are numerical upscaling and simulation of fluid flows in highly heterogeneous media modeled by Brinkman, Darcy, and/or steady-state Richards' equation, including Haverkamp, exponential, and van Genuchten relations for the relative permeability as discussed in [4].

Список литературы

1. Arbogast T. Analysis of a two-scale, locally conservative subgrid upscaling for elliptic problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 2004. V.42, №2. P.576 – 598.
2. Efendiev Y., Galvis J., Lazarov R., Moon M., Sarkis M. Generalized multiscale finite element method. Symmetric interior penalty coupling // *J. Comput. Physics.* 2013. V.255, P.1-15.
3. Efendiev Y., Galvis J., Lazarov R., and Willems J. Robust DD preconditioners for abstract symmetric positive definite bilinear forms // *ESAIM: Mathematical Modeling and Numerical Analysis.* 2012. V.46, №5. P.1175 – 1199.
4. Efendiev Y., Galvis J., Ki Kang S., and Lazarov R. Robust multiscale iterative solvers for nonlinear flows in highly heterogeneous media // *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications.* 2012. V.5 №3. P.359-383.
5. Efendiev Y, Lazarov R., Moon M., and Shi K. A spectral multiscale hybridizable Discontinuous Galerkin method for second order elliptic equations // *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.* (submitted). 2014.
6. Wang J. and Ye Y. New finite element methods in computational fluid dynamics by H(div) finite elements // *SIAM J. Numer. Anal.* 2007. V.45.1269-1286.
7. Cockburn B., Gopalakrishnan J., and Lazarov R. Unified Hybridization of Discontinuous Galerkin, Mixed, and Continuous Galerkin Methods for Second Order Elliptic Problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 2009. V.47. №2. P.1319 – 1365.
8. Efendiev Y. Lazarov R., Shi K. A multiscale HDG method for second order elliptic equations. Part I. Polynomial and homogenization-based multiscale spaces // *SIAM J. Numer. Anal.* (submitted). 2013.

СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕМОДИНАМИКИ

Абакумов Михаил Владимирович, Борзов Андрей Геннадьевич,

Буничева Анна Яковлевна, Мухин Сергей Иванович,

Соснин Николай Васильевич, Фаворский Антон Павлович,

Хруленко Александр Борисович,¹

Древаль Александр Васильевич,²

Кошелев Владимир Борисович,³

Лушкин Василий Андреевич⁴

1: *к.ф – м. н., доцент; к.ф – м. н.; к.ф – м. н., доцент; д.ф – м. н., профессор; д.ф – м. н., профессор; д.ф – м. н., профессор; к.ф – м. н., доцент факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

2: *д. м. н., профессор, ФФМ ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

3: *д. м. н., профессор, МОНИКИ им. М. Ф. Владимирского, Москва, Россия*

4: *к. м. н., к.ф.м.н., с.н.с., НИИ Нейрохирургии им. Н. Н. Бурденко, Москва, Россия*

E-mail: vmabk@cs.msu.su, kritikmeister@gmail.com, bunicheva@cs.msu.su, vmmus@cs.msu.su, vmsnv@cs.msu.su, khruenko@cs.msu.su, koshelev@fbm.msu.ru, endocrinolog-cab@yandex.ru, wlukshin@nsi.ru

Болезни сердечно – сосудистой системы занимают лидирующие позиции среди заболеваний человека. В медицинской литературе описание заболеваний приводится в основном в случаях их выраженной клинической картины. Очевидно, что только качественная интерпретация функций сердечно-сосудистой системы недостаточна для гарантированного понимания и вмешательства в ее деятельность. Необходимо еще и математическое моделирование заболеваний сердечно-сосудистой системы, которое позволяет получать количественные зависимости степени проявления симптоматики конкретного заболевания от степени поражения сосудистой системы.

Математическое моделирование кровообращения человека представляет собой сложную и актуальную проблему современной медицины и математики, имеющую высокую как фундаментальную, так и прикладную значимость. Наиболее перспективным в области комплексного моделирования сосудистой системы является, по-видимому, гибридное разномасштабное моделирование на основе квазиодномерного описания сосудистой системы с

использованием уравнений в частных производных. Такие модели являются наиболее сложными как с точки зрения создания физиологически адекватных, приемлемых по сложности моделей, так и с точки зрения решения используемой разнородной математической системы задач.

Целью авторского коллектива являлось создание на базе современных информационных технологий компьютерной физиологически адекватной модели сердечно-сосудистой системы человека для последующего использования ее, например, при создании тренажерно-диагностических комплексов, используемых для обучения студентов медицинских специальностей, профилактических обследований состояния сердечно-сосудистой системы, диагностики и как пред-, так и интро-операционной оценки параметров течения крови в сердечно-сосудистой системе в целом или в отдельных ее разделах.

В рамках разномасштабных нелокальных моделей, решены такие актуальные задачи медицины и физиологии, как, например, задачи проверки гипотез регулирования и лечения гипертензивных заболеваний и задачи фармакинетики – задачи исследования распространения фармакологических средств по сосудистому руслу и их комплексного влияния на течение крови в сердечно-сосудистой системе. При выполнении этих работ помимо создания математических моделей и эффективных вычислительных методов необходимо было организовывать обработку потока входной и выходной информации как в числовом, так и в графическом виде и разработать интерфейсную среду с интерактивным режимом общения с пользователем.

Основой разработанной системы математических моделей являются квазилинейные уравнения в частных производных, отражающие фундаментальные физические законы сохранения. Для решения систем квазилинейных уравнений в частных производных на графе сосудов использовались численные методы. Программная реализация алгоритмов привела к созданию унифицированной системы компьютерных программ, объединенных в единый предметно ориентированный программный комплекс.

Выполнены работы по моделированию почечной регуляции артериального давления, по моделированию влияния резистивных сосудов на формирование уровня артериального давления. Проведено моделирование барорецепторной регуляции давления, а также процесса распространения фракций в кровеносной системе. Совмещение численных и аналитических методов анализа математических моделей позволило установить ряд качественных и количественных закономерностей в поведении сердечно-сосудистой системы в норме и при патологии. Показано влияние безразмерных параметров на характер поведения амплитуд пульсовых волн давления и скорости. Сформулированы условия, при которых возможен резонансный рост амплитуд давления и скорости.

**МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОДВИЖНОСТИ
НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ**

Абгарян Каринэ Карленовна¹
Мутигуллин Илья Васылович²
Ревизников Дмитрий Леонидович³

1: *к.ф – м. н., зав. сектором, ВЦ РАН имени А.А.Дородницына, доцент
каф.806 МАИ(национальный исследовательский университет),
Москва, Россия*

2: *к.ф – м. н., с. н. с., ВЦ РАН имени А.А.Дородницына, Москва,
Россия*

3: *д.ф – м. н., профессор, МАИ (национальный исследовательский
университет), Москва, Россия*

*E-mail: kristal83@mail.ru, mutigullin@gmail.com,
reviznikov@inbox.ru*

Современной тенденцией развития высокочастотной полупроводниковой техники является стремление к миниатюризации и достижению максимальных концентраций носителей заряда при максимально возможной подвижности. С этой целью используются многослойные наноразмерные гетероструктуры, в которых, благодаря наличию потенциальных барьеров, ограничивается движение носителей заряда в одном или более направлениях. К основным факторам, влияющим на возникновение выделенных каналов переноса носителей в окрестности гетерограницы, можно отнести концентрацию примесных носителей в барьерном слое и наличие поверхностного заряда на гетерогранице. Последний характерен для структур вюрцитного типа и обусловлен спонтанной и пьезоэлектрической поляризацией.

В ВЦ РАН реализована следующая схема многомасштабного моделирования полупроводниковых гетероструктур. Выделены три характерных масштабных уровня. Описание системы на атомарном уровне осуществляется с использованием кристаллографической информации и квантово-механической модели, в основе которой лежит теория функционала электронной плотности. Квантово-механическое моделирование позволяет определить электронную структуру и базовые свойства гетеросистемы, выявить поляризационные эффекты и рассчитать плотности зарядов на интерфейсах между слоями. Полученная информация передается в модель наномасштабного уровня, где используется для расчета распределения носителей заряда в гетероструктуре. На данном уровне математическая модель представляет собой систему сопряженных уравнений Шредингера и Пуассона. Использование понятия эффективной массы электрона позволяет избежать

детального рассмотрения взаимодействия электронов с ядерным остовом, давая тем самым возможность перейти от атомарных масштабов к реальным наноразмерам гетероструктур. Основным интерес при этом представляет распределение плотности носителей заряда поперек слоистой структуры и выделение локализованной зоны повышенной концентрации (двумерный электронный газ).

Для гетеросистем, в которых квантовое ограничение достигается за счет легирования барьерного слоя примесями, характерно наличие в уравнении Пуассона распределенного источника. В системах, обладающих вюрцитной структурой, имеет место спонтанная и пьезоэлектрическая поляризация, в результате чего заряд концентрируется на межслойной границе. Это приводит к появлению мощного локализованного источника, что обуславливает необходимость высокого разрешения.

Численное моделирование на этом этапе осуществляется с использованием конечно-разностной аппроксимации уравнений. Локальные вычислительные процедуры, служащие для решения уравнений Шредингера и Пуассона объединены глобальным итерационным процессом, направленным на согласование решений. Вычислительный процесс можно схематично представить следующим образом. С использованием информации о распределении электронов в гетероструктуре, полученной на предыдущей итерации, рассчитывается правая часть уравнения Пуассона и вычисляется новое распределение электростатического потенциала и потенциальной энергии в системе. С использованием этих данных решается уравнение Шредингера. В результате решения уравнения Шредингера находятся значимые энергетические уровни и соответствующие им сеточные волновые функции. По ним рассчитывается новое распределение концентрации электронов в системе. Процесс повторяется до достижения сходимости. Сходимость итерационного процесса регулируется релаксационным параметром. Так как на каждой глобальной итерации необходимо решать уравнения Шредингера и Пуассона, эффективность вычислительного процесса во многом определяется экономичностью алгоритмов их решения. В этой связи существенную роль играет учет особенностей расположения значимых энергетических уровней. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что разработанный подход обеспечивает оперативность расчета на достаточно мелких сетках при моделировании гетероструктур как с распределенными, так и с локализованными источниками заряда. Полученные в результате решения сопряженных уравнений Шредингера и Пуассона данные о волновых функциях и распределении плотности носителей заряда поперек слоистой структуры поступают в модель следующего масштабного уровня, где осуществляется расчет подвижности носителей в продольном направлении. При этом учитывается широкий спектр механизмов рассеяния электронов

Описанный подход применен к моделированию двумерного электронного газа в гетероструктурах AlGaN/GaN. Получено хорошее согласование результатов с известными экспериментальными данными по основным характеристикам – плотности заряда на гетерогранице, концентрации электронов в двумерном электронном газе, подвижности электронов.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

Абрашина – Жадаева Наталья Григорьевна,

Тимощенко Игорь Андреевич

д.ф – м. н., доцент; с. н. с.

E-mail: zhadaeva@bsu.by, timoshchenkoia@bsu.by

*Физический Факультет Белорусского государственного университета,
Минск, Беларусь*

В настоящее время достаточно востребованы разностные методы для численного решения задач математической физики суб- или супердиффузионных процессов. Большой цикл работ А.А. Самарского и его учеников [1] оказали существенное влияние на развитие вычислительной математики в Беларуси, в частности была создана научная школа под руководством В.Н. Абрашина. Идея факторизации А.А. Самарского достаточно полно нашла отражение в работах этой научной школы. Сегодня идея стимулировала появление численных методов решения многомерных задач для уравнений в частных производных дробных порядков [2].

“Старая” идея получила новую жизнь. Метод факторизации разностных схем нашел свое применение и для решения многомерных задач дробно-дифференциальной односторонней и двусторонней диффузии. В результате исследований получены теоремы о безусловной устойчивости [3,4]. Теоретические выводы подтверждены вычислительным экспериментом.

Список литературы

1. Избранные труды А. А. Самарского. М.: МАКС Пресс, 2003.
2. Лафишева М. М., Шхануков–Лафишев М. Х. Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48, № 10. С. 1878 – 1887.
3. Абрашина–Жадаева Н. Г., Тимощенко И. А. Конечно-разностные схемы для уравнения диффузии с производными дробных порядков в многомерной области. // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 7. С. 819 – 825.
4. Тимощенко И. А. Численный метод решения уравнения двухсторонней аномальной диффузии в многомерной области. // Вестник БГУ, Серия 1. 2014. № 1.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПРОИСХОДЯЩИХ ВНУТРИ
ГЛАЗА И НА ЕГО ПОВЕРХНОСТИ**

***Анпилов Сергей Валерьевич, Ильютко Виктор Петрович,
Мокин Андрей Юрьевич, Савенкова Надежда Петровна,
Складчиков Сергей Андреевич¹
Кузьмин Рунар Николаевич²
Новодережкин Владимир Владимирович³***

1: к.ф – м. н., м. н. с.; к. ф – м. н., доцент; к. ф – м. н., доцент; д. ф – м. н., профессор; к. ф – м. н., м. н. с., факультет ВМК МГУ имени

М. В. Ломоносова, Москва, Россия

2: д. ф – м. н., профессор, Физический факультет МГУ имени
М. В. Ломоносова, Москва, Россия

3: к. м. н., 15 городская клиническая больница, Москва, Россия

E-mail: ilyutko@cs.msu.su

На сегодняшний день описано множество факторов, приводящих к повреждению зрительного нерва и нарушению зрительных функций человеческого глаза. Из наиболее значимых следует отметить повышение внутриглазного давления, которое на определенных стадиях приводит к механическим повреждениям аксонов, ганглиозных клеток, сетчатки глаза и зрительного нерва. Снижение ликворного давления и возникновение аномально высокого градиента давления по разные стороны решетчатой пластинки также признано важным фактором в повреждении аксонов зрительного нерва.

Несмотря на то, что глаукому рассматривают как хроническую оптическую нейропатию, а повышение внутриглазного давления — лишь как фактор риска ее развития, единственной доказанной стратегией лечения глаукомы все-таки является снижение показателя внутриглазного давления до уровня индивидуальной нормы.

В настоящее время не достаточно подробно изучены закономерности физических механизмов, приводящих к повышению внутриглазного давления. Поскольку проведение опытных измерений при помощи современного медицинского оборудования не дает полной картины изменения полей скоростей, температур и давления внутри и на поверхности глаза. Математическое моделирование в данном случае является одним из основных инструментов исследования.

Для врачебной практики представляет изучение процессов, происходящих в тонком слое жидкости на поверхности глаза. Медицинских инструментов для подобных наблюдений в живом глазе нет, поэтому необходимо

провести математическое моделирование достаточной степени адекватности. Демонстрируется трехмерная модель распределения жидкостных потоков по поверхности глаза с учетом изменения температурных режимов, обусловленных разностью температур окружающей среды и человеческого тела. Численные эксперименты показывают наличие нескольких вихрей образующихся на поверхности глазного яблока в области лимба и роговицы, которые неизбежно влияют на физиологию глаза.

Во вторых для медицины важно теоретическое изучение процессов, происходящих внутри глазного яблока. Внутренняя область глаза имеет двухкамерную конфигурацию; причём одна из них (между радужной и зрачком) заполнена жидкостью, а вторая (за зрачком) – студенистым телом. Глазной нерв расположен в глубине второй камеры под 17 градусов к оси глаза. Сетка кровеносных сосудов покрывает внешнюю границу внутренней камеры и оказывает влияние на гидродинамику внутри глаза в соответствии с режимом пульсации артериального давления. Расчётная область включает в себя Шлемов канал, через который идет отток жидкости из глаза; расположенный в зоне границы разделения камер хрусталик играет роль препятствия, которое в свою очередь влияет на поля скоростей и давления внутри глазного яблока, что в свою очередь оказывает влияние на физиологию глаза и часто определяет причины развития внутриглазных аномалий – т.е. возникновение заболеваний, патологий, например, атрофию глазного нерва (глаукома), отслоение сетчатки, засорение Шлемова канала, что в свою очередь ведет к повышению внутриглазного давления.

Третьим важным аспектом проблемы является исследование взаимосвязи внутриглазного давления и внутримышечного давления глаза от формы глазного яблока. Математическое моделирование является здесь эффективным инструментом исследования, так как приборов, измеряющих внутримышечное давление глаза, в настоящее время не существует. Однако известно, что многие патологические изменения внутри глаза сопровождаются изменением формы глазного яблока. Предлагается математическая модель изменения формы глаза, которая подтверждает, что ткани глаза подвергаются деформации при определенных значениях внутриглазного давления. Клинические наблюдения подтверждают, что изменение формы глазного яблока сопровождают патологии: глаукома и юношеская прогрессирующая близорукость.

Список литературы

1. Кузьмин Р. Н., Савенкова Н. П., Складчиков С. А. Численное исследование динамики вихревых образований на поверхности мыльного пузыря // Прикладная физика. 2012. № 1. С. 26 – 30.
2. Несторов А. П. Первичная глаукома. Изд. Медицина, 1982.

3. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
4. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М.: Наука, 1968.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООВОГО РЕЖИМА РАБОТЫ ЭЛЕКТРОЛИЗНОЙ ВАННЫ

***Анпилов Сергей Валерьевич, Ильютко Виктор Петрович,
Калмыков Алексей Вадимович, Савенкова Надежда Петровна¹
Кузьмин Рунар Николаевич²***

1: к.ф – м. н., м. н. с.; к.ф – м. н., доцент; аспирант; д.ф – м. н., профессор, факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

2: д.ф – м. н., профессор, Физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: ilyutko@cs.msu.su, svanpilov@inbox.ru

Современную жизнь невозможно представить без алюминия. Этот блестящий легкий металл, прекрасный проводник электричества, получил в последние десятилетия самое широкое применение в различных отраслях производства. Между тем известно, что в свободном виде алюминий не встречается в природе, и вплоть до XIX века наука даже не знала о его существовании. Только в последней четверти прошлого столетия была разрешена проблема промышленного производства металлического алюминия в свободном виде. С тех пор остро встал вопрос по оптимизации процесса получения первичного электролиза.

Поскольку физические эксперименты по оптимизации работы электролизера затруднительны, а замеры полей при температуре близкой к 1000 С на практике дают погрешность порядка 15%, возрастает роль проведения численного эксперимента на основе математического моделирования. Таким образом, математическое моделирование фактически является единственным способом исследования и визуализации динамических процессов, протекающих в электролизёре. В силу высокой температуры и химической агрессивности среды проведение экспериментальных замеров основных характеристик процесса электролиза алюминия в промышленной электролизной ванне крайне затруднено. Поэтому достаточно адекватное математическое моделирование позволяет получить достоверную информацию о процессе, что даёт возможность выработать рекомендации по оптимальному режиму проведения процесса электролиза и выбору формы рабочего пространства ванны с целью увеличения выхода алюминия по току.

В процессе электролиза в результате охлаждения ванны наружным воздухом на внутренней поверхности ванны образуется твердый слой электролита (гарнисаж), который утепляет ванну и снижает расход энергии, однако сильное изменение рабочего объёма ванны может привести к нестабильной

работе электролизёра. Поэтому большой интерес представляет моделирование теплового режима работы ванны, так как именно от него зависит осаждение или плавление карбоновых соединений, которые появляются в процессе электролиза и осаждаются на стенках ванны.

В данной работе проведено математическое моделирование процесса промышленного электролиза алюминия в условиях, максимально приближенных к реальным. Построена нестационарная математическая модель, описывающая движение двух жидкостей, находящихся в электролизной ванне как составляющих двухкомпонентной смеси, описывающая электромагнитные и гидродинамические процессы в своей взаимосвязи, с учетом как токов, исходящих из анодов, так и индуцированного тока. Модель так же учитывает вязкое трение между средами, влияние нестационарного электромагнитного поля и конфигурацию анода на гидродинамику процесса. Особое внимание уделяется моделированию изменения температуры в процессе электролиза и, как следствие, динамическому изменению формы рабочего пространства ванны. Результаты численного расчета позволяют проследить динамику изменения температуры в рабочем пространстве ванны, а так же влияние плавления и осаждения карбоновых соединений на магнитогидродинамическую стабильность процесса электролиза. Результаты расчётов позволяют визуализировать динамику поверхности раздела между средами, распределение полей скоростей в средах жидкого металла и электролита и распределение электромагнитных полей в обеих средах. Поскольку в промышленных цехах все электролизные ванны отличаются геометрией своего рабочего пространства, так как навести одинаковый гарнисаж в процессе разгона ванны не представляется возможным, то проведение соответствующих численных экспериментов, благодаря которым станет возможным определить оптимальную форму рабочего пространства, которой будет соответствовать наибольшая МГД- стабильность, является в настоящее время одной из актуальных проблем исследования.

Список литературы

1. Савенкова Н. П., Шобухов А. В., Анпилов С. В., Кузьмин Р. Н. Математическое моделирование физико – технологического процесса электролиза // Прикладная физика. 2009. № 6. С. 43 – 51.
2. Савенкова Н. П., Кузьмин Р. Н., Проворова О. Г., Шобухов А. В., Анпилов С. В., Складчиков С. А. Двумерная и трехмерная математические модели электролиза алюминия // Динамика сложных систем. 2009. № 2. С. 53 – 59.
3. Савенкова Н. П., Анпилов С. В., Кузьмин Р. Н., Проворова О. Г., Пискажова Т. В. Двухфазная 3D модель мгд - явлений алюминиевого

электролизёра // Сборник докладов третьего международного конгресса «Цветные металлы – 2011». Красноярск. 2011. С. 282 – 286.

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ
ВОЛНОВОДА С БИ-ИЗОТРОПНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ**

**Боголюбов Александр Николаевич, Свешников Алексей Георгиевич,
Мухартова Юлия Вячеславна**

д.ф – м. н., профессор; д.ф – м. н., профессор; к.ф – м. н., с. н. с.

E-mail: bogan7@yandex.ru, muhartova@yandex.ru

физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В последнее время большой интерес представляет теоретическое и практическое исследование метаматериалов, к числу которых относятся и искусственные би-изотропные среды. На основе метаматериалов возможно создание антиотражающих покрытий, волноводов, антенн, деполяризаторов и т.д. Поэтому разработка эффективных алгоритмов расчета электромагнитного поля в таких средах является весьма актуальной задачей.

Одним из широко используемых методов численного решения задач является метод конечных элементов. Однако в случае электродинамических задач в полной векторной постановке этот метод может давать фиктивные решения. Часто используемый на практике метод смешанных конечных элементов, который эффективно подавляет нефизические решения, обладает меньшей точностью, чем метод лагранжевых элементов. В настоящей работе для спектральной задачи в волноводе с идеально проводящими стенками и кусочно-постоянным би-изотропным заполнением предложен численный алгоритм поиска постоянных распространения, позволяющий использовать лагранжевы конечные элементы и исключаяющий появление нефизических решений.

Пусть экранированный волновод с осью Oz и поперечным сечением S имеет кусочно-постоянное би-изотропное заполнение, характеризующееся в частотной области материальными уравнениями:

$$\mathbf{D} = a_{11}\mathbf{E} + a_{12}\mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = a_{21}\mathbf{E} + a_{22}\mathbf{H},$$

где $a_{ij}(x, y) = a_{ij}^p$, если $(x, y) \in S_p$, $S = \bigcup_{p=1}^P S_p$. Рассмотрим невырожденный случай, когда $a_{11}^p a_{22}^p - a_{12}^p a_{21}^p \neq 0$ для всех $p = 1, \dots, P$. Исключим из системы уравнений Максвелла вектор \mathbf{H} и будем искать вектор \mathbf{E} в виде: $\mathbf{E}(x, y, z) = e^{i\gamma z}\mathbf{E}(x, y)$. В результате придем к спектральной задаче в поперечном сечении волновода, для которой сформулируем следующую обобщенную постановку, исключаящую появление фиктивных мод при численном решении методом лагранжевых конечных элементов:

найти постоянные распространения γ и соответствующие им вектор-функции $\mathbf{E}(x, y)$, компоненты которых принадлежат пространству $W_2^1(S)$, их сужения на границу ∂S области S удовлетворяют условию:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_{\partial S} = 0, \tag{1}$$

а сами функции $\mathbf{E}(x, y)$ удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} & \int_S \frac{1}{a_{22}} ((\text{rot}_\perp \mathbf{E}, \text{rot}_\perp \mathbf{E}^*) + 2\text{div}_\perp \mathbf{E} \cdot \text{div}_\perp \mathbf{E}^*) ds + \gamma^2 \int_S \frac{1}{a_{22}} ((\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) + E_3 E_3^*) ds + \\ & + i\gamma \int_S \frac{1}{a_{22}} ((\nabla_\perp E_3, \mathbf{E}^*) - (\mathbf{E}, \nabla_\perp E_3^*) - 2\text{div}_\perp \mathbf{E} \cdot E_3^* + 2E_3 \cdot \text{div}_\perp \mathbf{E}^*) ds - \\ & - ik \int_S \left(\frac{a_{21}}{a_{22}} (\mathbf{E}, \text{rot}_\perp \mathbf{E}^*) - \frac{a_{12}}{a_{22}} (\text{rot}_\perp \mathbf{E}, \mathbf{E}^*) \right) ds + \\ & + \gamma k \int_S \frac{a_{21} - a_{12}}{a_{22}} ([\mathbf{e}_z, \mathbf{E}], \mathbf{E}^*) ds - k^2 \int_S \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{22}} (\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) ds = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

для любой вектор-функции $\mathbf{E}^*(x, y)$, компоненты которой принадлежат пространству $W_2^1(S)$, а ее сужение на границу ∂S удовлетворяет условию (1).

В уравнении (2) использованы следующие обозначения:

$$\nabla_\perp = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0 \right\}, \quad \text{rot}_\perp = [\nabla_\perp, \cdot], \quad \text{div}_\perp = (\nabla_\perp, \cdot).$$

Задача (2) эквивалентна задаче о поиске характеристических чисел операторного пучка $L(\gamma) = I + C + \gamma B + \gamma^2 A$, действующего в пространстве вектор-функций с компонентами, принадлежащими $W_2^1(S)$, причем операторы A , B и C вполне непрерывны, а оператор A является кроме того самосопряженным и положительно определенным.

Список литературы

1. Lindell I. V. Bi-isotropic constitutive relations // Microwave and Opt. Tech. Lett. 1991. Vol. 4, P. 295 – 297.
2. Боголюбов А. Н., Делицын А. Л. Расчет диэлектрических волноводов методом конечных элементов, исключая появление нефизических решений // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 1996. № 1. С. 9 – 13.
3. Боголюбов А. Н., Мухартова Ю. В., Гао Ц. Расчет плоскопараллельного волновода с киральной вставкой методом смешанных конечных элементов // Матем. Моделирование. 2013. Том 25. № 2. С. 65 – 85.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПЛАЗМОСТАТИКА В МОДЕЛЯХ МАГНИТНЫХ
ЛОВУШЕК-ГАЛАТЕЙ**

Брушлинский Константин Владимирович¹

Гольдич Алексей Сергеевич²

1: *д.ф – м. н., профессор, Институт прикладной математики им.
М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

2: *инженер, Национальный исследовательский ядерный университет
«МИФИ», Москва, Россия*

E-mail: brush@keldysh.ru, alexdeph@gmail.com

Вычислительная плазмостатика включает в себя математические модели и численные исследования равновесных конфигураций плазмы, магнитного поля и электрического тока в магнитных ловушках, интерес к которым связан с проблемой управляемого термоядерного синтеза. Модели конфигураций строятся в терминах магнитной газодинамики. В ловушках, допускающих симметрию (плоскую, осевую, винтовую), они сводятся к двумерным краевым задачам с уравнением Грэда-Шафранова - эллиптическим дифференциальным уравнением второго порядка для скалярной функции магнитного потока с нелинейным распределением давления и электрического тока в младших членах.

Доклад представляет модели равновесия в ловушках-галатеех, предложенных А.И.Морозовым [1], в которых проводники с током, создающие магнитное поле, погружены в плазму. Рассмотрены конфигурации в распрямленных в цилиндр аналогах тороидальных ловушек «Пояс» [2], «Трилистник» и «Стелларатор-галатеея» [3] с двумя и тремя прямолинейными и винтовыми проводниками. В серии расчетов исследованы геометрия и количественные характеристики равновесных конфигураций, указаны ограничения области параметров, допускающих равновесие [4,5]. Уделено внимание роли граничных условий первого и второго рода в краевых задачах с уравнением Грэда-Шафранова. Они допускают границы, прозрачные для магнитного поля, и возможность варьировать постановку задачи, в которых основным параметром является либо характерное давление плазмы, отнесенное к магнитным единицам, либо отношение полного осевого тока в плазме к току в проводниках. В расчетах исследованы деформации магнитоплазменных конфигураций при изменениях граничных условий, причиной которых могут быть, например, дополнительные проводники с током, расположенные за пределами рассматриваемого объема ловушки [6,7].

Работы поддержаны РФФИ (гранты №№ 12-01-0071 и 11-01-12043).

Список литературы

1. Морозов А. И. О галатях – плазменных ловушках с омываемыми плазмой проводниками // Физика плазмы. 1992. Т. 18, Вып. 3, С. 305 – 316.
2. Морозов А. И., Франк А. Г. Торoidalная магнитная ловушка-галатhea с азимутальным током // Физика плазмы. 1994. Т. 20, № 11, С. 982 – 989.
3. Брушлинский К. В., Зуева Н. М., Михайлова М. С., Морозов А. И., Пустовитов В. Д., Тузова Н. Б. Численное моделирование прямых винтовых шнуров с проводниками, погруженными в плазму // Физика плазмы. 1994. Т. 20, № 3, С. 284 – 292.
4. Брушлинский К. В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.
5. Брушлинский К. В., Гольдич А. С., Десятова А. С. Плазмостатические модели магнитных ловушек-галатей // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 8, С. 81 – 96.
6. Брушлинский К. В., Гольдич А. С. Краевые задачи вычислительной плазмостатики // Вестник национального исследовательского ядерного университета “МИФИ”. 2013. Т. 2, № 3, С. 292 – 304.
7. Брушлинский К. В., Гольдич А. С. Плазмостатические модели ловушек-галатей с магнитопроницаемыми границами // Физика плазмы. 2014. (в печати)

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО НОВОГО КЛАССА ВОЛН В
НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ СРЕДЕ**

Василева Даниела Павлова¹
Димова Стефка Николаева²
Димова Милена Ганчева³

1: *д – р, доцент, Институт математики и информатики, БАН,
София, Болгария*

2: *д.ф – м.н., профессор, ФМИ СУ имени Кл. Охридского, София,
Болгария*

3: *д – р, доцент, Институт математики и информатики, БАН,
София, Болгария*

*E-mail: dimova@fmi.uni-sofia.bg, mkoleva@math.bas.bg,
vasileva@math.bas.bg*

Проблема нахождения всех структур и волн, которые могут возникать и самоподдерживаться в открытой нелинейной среде, описываемой математической моделью тепловых структур

$$u_t = \sum_{i=1}^N (k_i(u)u_{x_i})_{x_i} + Q(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

поставлена и активно исследована школой А.А. Самарского и С.П. Курдюмова с семидесятых годов прошлого века. Многие исследования посвящены чрезвычайно сложным физическим и математическим проблемам, связанных с этой моделью и ее обобщениями: локализация процессов в пространстве [1], различные типы режимов с обострением [2], возникновение структур - бегущие и стоячие волны, сложные структуры с переменной степенью симметрии [3]. Сочетание вычислительного эксперимента с достижениями в областях качественной теории ОДУ и ЧДУ, теории групп Ли и Ли-Беклунда, было решающим для успеха этих исследований. Книга [2] содержит много таких результатов, в обзоре [4] содержатся ссылки на более поздние работы. Вклад коллектива болгарских математиков в поиске сложных структур и волн в среде, описываемой математической моделью (1), систематизирован в работе [5].

Независимо от этих успехов оставались и остаются многие открытые проблемы. Новый класс сложных волн для случая

$$k_i(u) = k(u) = u^\sigma, \quad Q(u) = u^{\sigma+1} \quad (2)$$

конструирован и исследован в работе [6]. Он описывается неограниченными автомодельными решениями модели (1), (2). Исследована их устойчивость (структурная и метастабильность). Разработаны и программно реализованы эффективные и надежные численные методы для решения нелинейных эллиптических автомодельных задач и параболических задач в случае радиальной симметрии и в существенно двумерном случае. На Рис. 1 показана эволюция автомодельных начальных данных для значений параметров $\beta = \sigma + 1 = 3, T_0 = 0.5$.

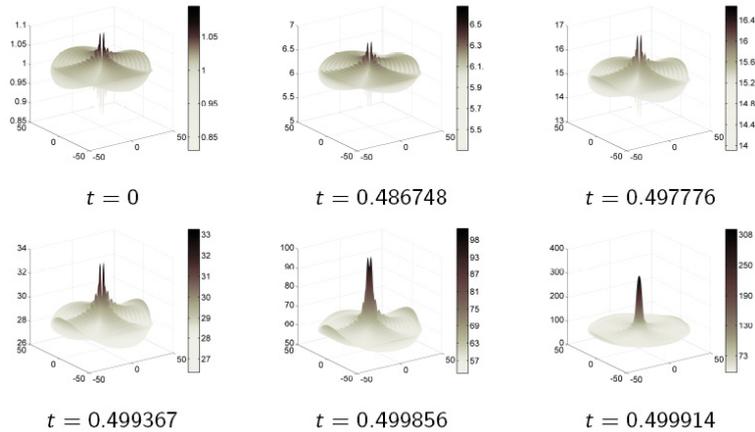


Рис. 3: Эволюция сложной волны S -режима: $\sigma = 2, \beta = 3, T_0 = 0.5$

Список литературы

1. Самарский А. А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных волн // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3, № 4. С. 18–28.
2. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
3. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А. Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды // ЖВМ и МФ. 1986. Т. 26, № 8. С. 1189 – 1205.
4. Galaktionov V. A., Vazquez J. L. The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations // Discrete and Contin. Dyn. Syst. 2002. Т. 8, № 2. С. 399–433.
5. Dimova S. N., Dimova M. G., Vasileva D. P. Structures and Waves in a Nonlinear Heat-Conducting Medium // In Special volume of Springer Proceedings in Mathematics and Statistics "Numerical Solution of Partial Differential Equations: Theory, Algorithms and their Applications" Springer, 2013, С. 157–184.

6. Dimova M. G., Dimova S. N., Vasileva D. P. Numerical Investigation of a New Class of Waves in an Open Nonlinear Heat-Conducting Medium // Central Eur. J. of Math. 2013. T. 11, № 8, С. 1375–1391.

**РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОЙ ПЛАТФОРМЫ СОПРОВОЖДЕНИЯ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ТЕМЕТОС**

***Галанин Михаил Павлович, Горбунов-Посадов Михаил Михайлович,
Ермаков Алексей Викторович, Лукин Владимир Владимирович,
Родин Александр Сергеевич***

*д.ф – м. н., профессор; д.ф – м. н., профессор; к.ф – м. н.; к.ф – м. н.;
к.ф – м. н.*

*E-mail: galan@keldysh.ru, gorbunov@keldysh.ru,
ermakov@keldysh.ru, vvluikin@gmail.com, rals@bk.ru*

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва,
Россия*

Представлена архитектура, интерфейсы и форматы входных и выходных данных платформы, реализованные пилотные версии инструментальных и проблемно-ориентированных модулей программной платформы Теметос для сопровождения вычислительного эксперимента. Платформа Теметос предназначена для полномасштабного математического моделирования в прикладных и фундаментальных областях. Она предоставляет возможности подготовки геометрической и физической моделей исследуемой конструкции или физического процесса к расчету, инструменты настройки внешних или встроенных проблемно-ориентированных модулей, позволяет осуществлять запуск, контроль прохождения и анализ результатов расчетов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 12-01-00109, 12-02-00687, 14-01-31496), а также гранта по поддержке ведущих научных школ НШ-6061.2014.2.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЛЕКТИВНОГО ЛАЗЕРНОГО СПЕКАНИЯ – РЕЗУЛЬТАТЫ
ИССЛЕДОВАНИЙ, НОВЫЕ ЗАДАЧИ И РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО
ОБЕСПЕЧЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА
ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ ЭВМ**

**Гасилов Владимир Анатольевич, Колдоба Александр Васильевич,
Повещенко Юрий Андреевич¹
Мирзаде Фикрет Хансуварович, Низьев Владимир Григорьевич²**

1: *д.ф – м. н., профессор, Институт прикладной математики им.
М. В. Келдыша, Москва, Россия*

2: *д.ф – м.н., профессор, Институт проблем лазерных и
информационных технологий РАН, Шатура, Россия*

*E-mail: koldoba@rambler.ru, vgasilov@gmail.com,
hecon@mail.ru, fmirzade@rambler.ru, niziev@mail.ru*

Доклад посвящен проблемам организации численных исследований, выполняемых с целью развития перспективной лазерной технологии формирования новых материалов и изделий воздействием лазерного излучения на порошки из различных веществ или смеси таких порошков. Лазерные технологии позволяют обрабатывать материалы различных свойств (металлы, керамика, пластики) с целью изменения их качественных характеристик (пластичность, предел прочности и др.) и придания им новых функциональных возможностей. Суть технологии состоит в нагреве лазерным излучением, плавлении и последующей кристаллизации поверхностной части образца, в результате чего изменяются механические свойства обработанной поверхности. Обсуждаются разработанные математические модели, в частности, модель плавления лазерным лучом двухкомпонентных (легкоплавкая и тугоплавкая компоненты) порошковых смесей. Представлены результаты расчетов, рассмотрен новый физический эффект, обнаруженный в вычислительных экспериментах, а именно - возможная неэволюционность фронта плавления порошковой смеси при движении расплавленной компоненты в гравитационном поле.

Повышение эффективности технологий селективного лазерного спекания обусловлено использованием на стадии предпроектных работ численных исследований на основе нестационарных трехмерных моделей воздействия лазерного излучения на порошковые материалы и термоупругости, с учетом фазовых переходов. Численное моделирование задач такой сложности требует использования высокопроизводительных компьютерных систем с параллельной архитектурой. Важным аспектом обсуждаемых моделей является необходимость численного моделирования плав-

ления/кристаллизации геометрически сложных образцов. Для реализации возможности такого моделирования предполагается разработка вычислительных алгоритмов, ориентированных на использование неструктурированных расчетных сеток с элементами разных типов. Обсуждаются аппроксимации дифференциальных уравнений, входящих в задачи названной предметной области, на неструктурированных сетках, выполненные на основе разработанного в ИПМ им.М.В.Келдыша РАН метода опорных операторов.

СХЕМА КАБАРЕ. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ

Головизнин Василий Михайлович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: gol@ibrae.ac.ru

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Последняя по времени журнальная статья в полном списке публикаций Александра Андреевича Самарского относится к 1998 году и называется «Некоторые свойства разностной схемы "КАБАРЕ"» [1]. После нее еще выходили в свет монографии, но журнальных статей больше не было.

Схема КАБАРЕ, заявленная в этой работе, за последние 16 лет получила достаточно широкую известность и породила новое научное направление – «обратимые по времени разностные схемы для уравнений гиперболического типа». Как выяснилось позже, в западной научной литературе эта схема была опубликована раньше и была названа *Upwind LeapFrog* или схема Айзерлиса.

Схема Айзерлиса, как и первоначальный вариант схемы КАБАРЕ, была определена на трех временных слоях и отличалась от других трехслойных схем тем, что ее производная по времени имела пространственное расщепление. Это затрудняло обобщение на многомерный случай и в конечном итоге привело к тому, что на Западе она было признана неперспективной и исследования в этом направлении были прекращены.

В работах последователей А.А. Самарского трехслойная схема была приведена к двухслойной посредством введения дополнительных, т.н. «консервативных» переменных. Помимо двухслойности, она, при этом, приобрела и такое фундаментальное свойство, как консервативность, которого до этого у нее не было. Именно это двухслойное консервативное представление в дальнейшем и стало называться схемой КАБАРЕ и позволило осуществить ее обобщение на произвольные законы сохранения гиперболического типа. В докладе приводится краткий обзор полученных за последние годы научных результатов.

Список литературы

1. Головизнин В. М., Самарский А. А. Некоторые свойства разностной схемы «КАБАРЕ» // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 1. С. 101 – 106.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ

**Гордзениани Давид Георгиевич, Давиташвили Тинатин Давидовна¹
Меладзе Гамлет Варламович, Меладзе Юлия Гамлетовна²**

1: д.ф – м. н., профессор; к.ф – м. н., Факультет точных и
естественных наук Тбилисского гос. университета им.

Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия

2: д.ф – м. н., профессор; докторант, Грузинский Университет
им. Св. Андрея Первозванного, Тбилиси, Грузия

E-mail: dgord37@hotmail.com, t_davitashvili@hotmail.com;
h_meladze@hotmail.com, ula.meladze@gmail.com

В работе исследуются краевые и начально-краевые задачи с нелокальными контактными условиями для некоторых уравнений математической физики; одновременно с этим строятся и обосновываются алгоритмы их численного решения. Работа, по своей сути, идейно примыкает к вышедшей в 1969 году известной работе А.В. Бицадзе и А.А. Самарского, которая придала мощный импульс исследованиям по нелокальным задачам и стимулировала появление их новых, интересных оригинальных обобщений, создание общих теоретических основ анализа нелокальных задач, развитие приближённых методов их решения.

В работе приводится исследование трёх задач.

Задача I. Найти функции $u^-(x) \in C^2(-1, 0) \cap C^1[-1, 0]$ и $u^+(x) \in C^2(0, 1) \cap C^1[0, 1]$, удовлетворяющие уравнениям

$$L^-u^- \equiv \frac{d}{dx} \left\{ K^-(x) \frac{du^-}{dx} \right\} - q^-(x)u^-(x) = f^-(x), \quad x \in D^- \equiv (-1, 0), \quad (1)$$

$$L^+u^+ \equiv \frac{d}{dx} \left\{ K^+(x) \frac{du^+}{dx} \right\} - q^+(x)u^+(x) = f^+(x), \quad x \in D^+ \equiv (0, 1), \quad (2)$$

краевым условиям

$$u^-(-1) = \varphi^-, \quad u^+(1) = \varphi^+, \quad (3)$$

нелокальному контактному условию

$$u^-(0) = u^+(0) \equiv u(0) = u^0, \quad u(0) = \sum_{\mu=1}^m \gamma_{\mu}^- u^-(\xi_{\mu}^-) + \sum_{k=1}^n \gamma_k^+ u^+(\xi_k^+) + \varphi^0, \quad (4)$$

$$-1 < \xi_m^- < \xi_{m-1}^- < \dots < \xi_1^- < \xi^0 < \xi_1^+ < \xi_2^+ < \dots < \xi_{n-1}^+ < \xi_n^+, \quad \xi^0 \equiv 0.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть, $K^-(x) \in C^1[-1, 0]$, $K^-(x) > c_0 = \text{const} > 0$, и $K^+(x) \in C^1[0, 1]$, $K^+(x) > c_0 = \text{const} > 0$, $q^-(x) \geq 0$, $q^+(x) \geq 0$, $q^-(x) \in C^1[-1, 0]$, $q^+(x) \in C^1[0, 1]$, $f^-(x) \in C^0[-1, 0]$, $f^+(x) \in C^0[0, 1]$,

$$\sum_{\mu=1}^m \gamma_{\mu}^{-} + \sum_{k=1}^n \gamma_k^{+} \leq 1. \quad (5)$$

Тогда существует единственное регулярное решение задачи (1)-(5).

Задача II. Найти функции $u^-(x, t) \in C^{2,1}(D^- \times (0, T]) \cap C^{1,0}(\bar{D}^- \times (0, T])$ и $u^+(x, t) \in C^{2,1}(D^+ \times (0, T]) \cap C^{1,0}(\bar{D}^+ \times (0, T])$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial u^-}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K^-(x, t) \frac{\partial u^-}{\partial x} \right\} + q^-(x, t) = f^-(x, t), \quad (x, t) \in D^- \times (0, T], \quad (6)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K^+(x, t) \frac{\partial u^+}{\partial x} \right\} + q^+(x, t) = f^+(x, t), \quad (x, t) \in D^+ \times (0, T], \quad (7)$$

краевым условиям

$$u^-(-1, t) = \varphi^-(t), \quad u^+(1, t) = \varphi^+(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

нелокальному контактному условию

$$u^-(0, t) = u^+(0, t) \equiv u(0, t) = u^0(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(0, t) = \sum_{\mu=1}^m \gamma_{\mu}^{-} u^-(\xi_{\mu}^{-}, t) + \sum_{k=1}^n \gamma_k^{+} u^+(\xi_k^{+}, t) + \varphi^0(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

и начальному условию

$$u^-(x, 0) = u_0^-(x), \quad x \in [-1, 0], \quad u^+(x, 0) = u_0^+(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (10)$$

При выполнении (5) и соответствующих требований, наложенных на исходные данные задачи (6)-(10), доказывается теорема о существовании и единственности регулярного решения.

В настоящей работе посредством итерационного метода и с помощью первой теоремы Гарнака даётся доказательство существования и единственности решения нелокальных контактных задач для некоторых эллиптических уравнений (Задача III).

**ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТРАНСПОРТНОЙ МОДЕЛИ
КАНОНИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ (ТМКП) К МОДЕЛИРОВАНИЮ ИМПУЛЬСОВ
DIII-D и MAST**

**Данилов А. В., Днестровский Ю. Н., Днестровский А. Ю.,
Лысенко С. Е., Черкасов С. В.¹
Костомаров Д. П.²
Войцехович И., Романелли М.³**

1: Национальный Исследовательский Центр «Курчатовский
Институт», Институт физики токамаков, Москва, Россия

2: академик РАН, профессор, факультет ВМК МГУ имени
М. В. Ломоносова, Москва, Россия

3: CCFE, Калэмский научный центр, Abingdon OX14 3DB, UK

E-mail: yudnestrov@gmail.com

Тенденция сохранения профилей температуры и давления плазмы токамаков при различных внешних воздействиях обсуждалась с начала восьмидесятых годов [1]. Этот эффект часто рассматривают как *самоорганизацию* плазмы, а соответствующие профили называют *жесткими*. С конца восьмидесятых изучается количественная мера жесткости профилей, стоящая множителем перед разностью температурных градиентов и критическим градиентом в выражениях для тепловых потоков в моделях, подобных ТМКП [2]. Эксперименты, посвященные оценке жесткости профилей температуры ионов на JET, продемонстрировали новые особенности, состоящие в изменении жесткости с радиусом и ее зависимостью от тороидальной скорости вращения плазмы [3]. Эти наблюдения явились стимулом для модификации ТМКП.

Недавно новые усилия по определению жесткости профиля температуры ионов были предприняты на DIII-D [4]. Предметом исследования являлись зависимости ионных тепловых потоков от градиента температуры в четырех радиальных точках при различных входных мощностях нейтральной инжекции.

Коэффициенты жесткости профиля ионной температуры, полученные на DIII-D, были проверены с привлечением данных MAST. Одной из общих черт импульсов MAST с нейтральной инжекцией является довольно высокий градиент температуры ионов в градиентной зоне, соответствующий эффективной теплопроводности в диапазоне $1 - 3 \text{ м}^2/\text{сек}$. Ранее предпринимались усилия описать эту особенность как внутренний транспортный барьер в рамках стандартной версии ТМКП, однако описание в модифицированной модели лучше согласуется с профилями температур, измеренными на MAST.

Работа поддержана контрактом с Росатомом Н.4х.44.90.13.1101, грантами РФФИ 14-07-00483 и 14-07-00912, Соглашением о сотрудничестве № 3000177307.

Список литературы

1. Kadomtsev B. B. Plasma Phys. Reports. 1987. № 13.
2. Dnestrovskij Yu. N., Pereverzev G. V. Plasma Phys. Control. Fusion. 1988. № 30. 1417
3. Mantica P., Strintzi D., Tala T. C., Giroud C. et al. Phys. Rev. Lett. 2009. № 102. 175002
4. Luce T. C., Holland C., Petty C. C. et al. FEC San Diego Report EX/P3-18. 2012.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Дмитриев Владимир Иванович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: dmitriev@smc.msu.ru

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В настоящее время все в больших прикладных областях необходимо рассчитывать электромагнитное поле в неоднородных средах. Одним из эффективных алгоритмов расчета таких задач является метод интегральных уравнений. Электромагнитные поля подчиняются уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\bar{H} = \tilde{\sigma}(M)\bar{E} + \bar{J}_e(M); \quad \operatorname{rot}\bar{E} = i\omega\mu(M)\bar{H}. \quad (1)$$

где \bar{H} – напряженность магнитного, а \bar{E} – электрического полей, $\tilde{\sigma}(M) = \sigma(M) - i\omega\varepsilon(M)$ – комплексная электропроводность среды, $\mu(M)$ – магнитная проницаемость среды, $\bar{j}_e(M)$ – внешние (сторонние) токи, возбуждающие поле. Для получения интегральных уравнений определяется фоновая (нормальная) среда с параметрами $\sigma_N(M)$ и $\mu_N(M)$, в которой достаточно просто рассчитывается электромагнитное поле от точечного источника.

Для фоновой среды вводятся тензорные функции Грина для уравнения Максвелла:

- электрического типа $\hat{G}_{EE}(M, M_0)$, $\hat{G}_{EH}(M, M_0)$;

- магнитного типа $\hat{G}_{HE}(M, M_0)$, $\hat{G}_{HH}(M, M_0)$,

где $\hat{G}_{EE}(M, M_0)$ – электрическое, $\hat{G}_{EH}(M, M_0)$ – магнитное поля для точечного источника электрического тока расположенного в точке M_0 , а $\hat{G}_{HE}(M, M_0)$ – электрическое, $\hat{G}_{HH}(M, M_0)$ – магнитное поля для точечного источника магнитного тока, расположенного в точке M_0 . Тензоры Грина являются решениями следующих систем уравнений:

- для тензоров электрического типа

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\hat{G}_{EH}(M, M_0) = \tilde{\sigma}_N(M)\hat{G}_{EE} + \hat{\delta}(M, M_0) \\ \operatorname{rot}\hat{G}_{EE}(M, M_0) = i\omega\mu_N(M)\hat{G}_{EH} \end{cases} \quad (2)$$

- для тензоров магнитного типа

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\hat{G}_{HH}(M, M_0) = \tilde{\sigma}_N(M)\hat{G}_{HE} \\ \operatorname{rot}\hat{G}_{HE}(M, M_0) = i\omega\mu_N(M)\hat{G}_{HH} + \hat{\delta}(M, M_0) \end{cases} \quad (3)$$

где $\hat{\delta}(M, M_0)$ – диагональная матрица функций Дирака.

Используя тензоры Грина (2–3) из уравнений Максвелла (1), получаем

интегральные представление полей:

$$\begin{aligned} \bar{E}(M) = \bar{E}^N(M) + \int_{V_1} \hat{G}_{EE}(M, M_0) (\tilde{\sigma}(M_0) - \sigma_N(M_0)) \bar{E}(M_0) dv_{M_0} + \\ + i\omega \int_{V_2} \hat{G}_{HE}(M, M_0) (\mu(M_0) - \mu_N(M_0)) \bar{H}(M_0) dv_{M_0}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}(M) = \bar{H}^N(M) + \int_{V_1} \hat{G}_{EH}(M, M_0) (\tilde{\sigma}(M_0) - \sigma_N(M_0)) \bar{E}(M_0) dv_{M_0} + \\ + i\omega \int_{V_2} \hat{G}_{HH}(M, M_0) (\mu(M_0) - \mu_N(M_0)) \bar{H}(M_0) dv_{M_0}; \end{aligned} \quad (5)$$

где V_1 – область неоднородности электропроводности $\tilde{\sigma}(M)$, а V_2 – область неоднородности магнитной проницаемости $\mu(M)$, а \bar{E}^N и \bar{H}^N – фоновое (нормальное) электромагнитное поле возбуждаемое в фоновой (нормальной) среде сторонними токами.

При $t \in V_1$ и $t \in V_2$ выражения (4) и (5) дают систему интегральных уравнений для определения $\bar{E}(M)$ при $M \in V_1$ и $\bar{H}(M)$ при $M \in V_2$. Зная поля в областях неоднородности, согласно (4–5) можно определить поля в любой точке пространства.

**ДВУХЭТАПНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ
 КОНСЕРВАТИВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА
 ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛАЗМЫ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ**
*Егоренков Владимир Александрович, Логинова Мария Михайловна,
 Трофимов Вячеслав Анатольевич*

E-mail: vatro@cs.msu.ru

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Предметом исследования данной работы является возникновение и динамика индуцированных лазером пространственных структур в полупроводнике. Их возникновение обусловлено воздействием на полупроводник фемтосекундного лазерного импульса, а так же присутствием внешнего электрического поля. Математическая модель этого процесса в двумерном случае представляет собой систему безразмерных дифференциальных уравнений, записанных относительно характеристик полупроводника (концентраций свободных электронов n и ионизированных доноров N , потенциала светоиндуцированного электрического поля полупроводника φ), а так же интенсивности падающего лазерного импульса I :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \gamma(n - N), \quad \frac{\partial I}{\partial y} + \delta_0 \delta(N, n, \varphi) I = 0, \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= D_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial n}{\partial x} - \mu n \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + D_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial n}{\partial y} - \mu n \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \\ &+ G(N, n, \varphi) - R(N, n), \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= G(N, n, \varphi) - R(N, n), \quad G = q_0 I \delta, \quad R = \frac{Nn - n_0^2}{\tau_p}, \\ 0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Граничные и начальные условия соответствуют случаю нахождения полупроводника во внешнем электрическом поле.

Существенное влияние на процессы, развивающиеся в полупроводнике, оказывают диффузия электронов D , их подвижность μ и нелинейная зависимость коэффициента поглощения от характеристик полупроводника $\delta = (1 - N) \exp(-\psi(1 - \xi n))$.

Для решения поставленной задачи на равномерных сетках по пространству и по времени нами построена консервативная (при условии аппроксимации граничных условий с первым порядком) разностная схема:

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{n} - n}{\tau} &= \frac{D_x}{2} \hat{n}_{\bar{x}x} + \frac{D_y}{2} \hat{n}_{\bar{y}y} + \frac{D_x}{2} n_{\bar{x}x} + \frac{D_y}{2} n_{\bar{y}y} + G^{0.5} - R^{0.5} - \\
 &- \frac{D_x \mu}{2} \left(\hat{n}_{i+0.5} \frac{\hat{\varphi}_{i+1} - \hat{\varphi}}{h_x^2} - \hat{n}_{i-0.5} \frac{\hat{\varphi} - \hat{\varphi}_{i-1}}{h_x^2} \right) - \\
 &- \frac{D_y \mu}{2} \left(\hat{n}_{j+0.5} \frac{\hat{\varphi}_{j+1} - \hat{\varphi}}{h_y^2} - \hat{n}_{j-0.5} \frac{\hat{\varphi} - \hat{\varphi}_{j-1}}{h_y^2} \right) - \\
 &- \frac{D_x \mu}{2} \left(n_{i+0.5} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi}{h_x^2} - n_{i-0.5} \frac{\varphi - \varphi_{i-1}}{h_x^2} \right) - \\
 &- \frac{D_y \mu}{2} \left(n_{j+0.5} \frac{\varphi_{j+1} - \varphi}{h_y^2} - n_{j-0.5} \frac{\varphi - \varphi_{j-1}}{h_y^2} \right), \\
 \hat{\varphi}_{\bar{x}x} + \hat{\varphi}_{\bar{y}y} &= \gamma(\hat{n} - \hat{N}), \quad \frac{\hat{N} - N}{\tau} = G^{0.5} - R^{0.5}, \quad \frac{\hat{I} - I}{h_y} + \delta_0 \frac{0.50.5}{\delta} I = 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

На основе схемы (2) строится оригинальный двухэтапный итерационный процесс. Его достоинствами является возможность решения задач со сложными краевыми условиями, а так же свойство асимптотической устойчивости (подтвержденное экспериментально). Это позволяет проводить расчеты на больших временных интервалах без потери свойства консервативности. Особое внимание нами уделяется решению двумерного уравнения Пуассона, записанного относительно потенциала электрического поля полупроводника. Для него применяется метод восстановления с использованием расщепления, полученные разностные уравнения решаются с помощью метода матричной прогонки. Таким образом, при нахождении решения поставленной задачи необходимо достичь сходимости двух итерационных процессов. Как показали вычислительные эксперименты, выбор критерия остановки итерационного процесса может существенно повлиять на точность полученного решения. Мы использовали критерий на основе сравнении абсолютной и относительной погрешности полученного на итерации решения. При решении уравнения Пуассона более эффективным оказывается критерий остановки итераций, основанный на оценке невязки.

Результаты компьютерных экспериментов, проведенных с помощью построенного двухэтапного итерационного процесса, продемонстрировали его эффективность для расчета процессов формирования и распространения сложных пространственных структур высокой концентрации заряженных частиц в полупроводнике. Полученные результаты подтверждают возможность появления оптического хаоса в двумерной задаче воздействия высокоинтенсивного лазерного импульса на полупроводник.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАЗЕРНЫХ МИШЕНЕЙ
ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА**

Змитренко Николай Васильевич

д.ф – м. н., профессор

E-mail: zmitrenko@imamod.ru

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва,
Россия*

В докладе даётся обзор результатов теоретических и экспериментальных исследований последних лет в области инерционного термоядерного синтеза. Численные исследования этой проблемы начались в 1966 году под непосредственным руководством Александра Андреевича и при его активном и плодотворном участии. В настоящее время экспериментальные лазерные установки достигают уровня энергии (порядка нескольких мегаджоулей), при котором можно ожидать превышения выделившейся термоядерной энергии над вложенной лазерной (breakeven). Выполнен ряд принципиальных экспериментов. Тем не менее, пока breakeven'a достигнуть не удалось.

Причины неудач анализируются с помощью вычислительного эксперимента и математического моделирования, методические основы которых заложены академиком А.А. Самарским.

УРАВНЕНИЕ САМАРСКОГО-КУРДЮМОВА

Змитренко Николай Васильевич, Михайлов Александр Петрович

д.ф – м. н., профессор; д.ф – м.н., профессор

E-mail: zmitrenko@imamod.ru, mikhailov@imamod.ru

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва,
Россия*

Доклад содержит исторический обзор исследований, проводившихся под руководством А.А. Самарского и посвященных проблемам локализации тепла и горения, образования и эволюции диссипативных структур, а также математическим задачам, возникающим в этой области.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Ильинский Анатолий Серафимович¹
Самохин Александр Борисович²

1: д.ф. – м. н., профессор, факультет ВМК МГУ имени
М. В. Ломоносова, Москва, Россия

2: д.ф. – м. н., профессор, факультет информационных технологий
МИРЭА, Москва, Россия

E-mail: celd@cs.msu.su, ABSamokhin@yandex.ru

Как основа построения приближенных методов решения задач дифракции, методы интегральных уравнений начали применяться после появления супервычислительной техники, позволяющей решать системы линейных уравнений очень больших порядков [1,2]. Основные трудности применения методов теории интегральных уравнений состоят в организации эффективных вычислений в трехмерных векторных задачах теории дифракции электромагнитных волн.

В настоящем докладе задачи дифракции электромагнитной волны на прозрачных неоднородных телах в трехмерном пространстве сведены к сингулярным интегральным уравнениям. Для численного решения интегральных уравнений разработан проекционный метод на основе метода конечных элементов.

Будем рассматривать следующий класс задач электродинамики. В конечной трехмерной области Q среда характеризуется всюду Гельдер-непрерывной тензор функцией диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$. Вне Q диэлектрическая проницаемость постоянна и изотропна, т.е. $\epsilon = \epsilon_0 = const$ и везде $\mu = \mu_0 = const$. Требуется определить электромагнитное поле, возбуждаемое в данной среде внешним полем \vec{E}^0 с временной зависимостью в виде множителя $\exp(-i\omega t)$. Соответствующая математическая задача формулируется следующим образом: найти векторные функции \vec{E} и \vec{H} , удовлетворяющие уравнениям Максвелла

$$rot\vec{H} = -i\omega\epsilon\vec{E} + \vec{J}_E^0, \quad rot\vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H} - \vec{J}_H^0 \quad (1)$$

и условию излучения на бесконечности. В уравнениях (1) \vec{J}_E^0, \vec{J}_H^0 - сторонние токи, порождающие внешнее поле \vec{E}^0 .

Поставленная задача может быть сведена к интегро-дифференциальному уравнению относительно электрического поля \vec{E}

в области неоднородности Q

$$\vec{E}(x) = \vec{E}^0 + k_0^2 \int_Q (\hat{\varepsilon}_r - 1) \vec{E}(y) G(R) dy + grad div \int_Q (\hat{\varepsilon}_r - 1) \vec{E}(y) G(R) dy, \quad (2)$$

где $G(R) = \exp(ik_0 R)/(4\pi R)$; $R = |x - y|$; $x = (x_1, x_2, x_3)$; $y = (y_1, y_2, y_3)$;

$$\hat{\varepsilon}_r = \hat{\varepsilon}/\varepsilon_0; \quad k_0 = \omega(\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2}.$$

Отметим, что операцию $grad div$ нельзя внести под знак интеграла в (2), так как функция G в этом случае должна дважды дифференцироваться по координатам, и тогда в ядре интегрального уравнения появится член $\sim 1/R^3$, и соответствующий интеграл потеряет смысл.

Исследуя сингулярность уравнения (2) и вводя интеграл в смысле главного значения, преобразуем интегральное уравнение (2) к объемному сингулярному интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I})\vec{E}(x) - p.v. \int_Q \left((\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y), grad \right) grad G(R) dy - \\ - k_0^2 \int_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y) G(R) dy = \vec{E}^0(x), \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $p.v.$ обозначает сингулярный интеграл, т.е. интеграл за вычетом бесконечно малого шара в окрестности точки $x = y$, а символ $(*, *)$ обозначает скалярное произведение векторов.

Для численного решения уравнения (3) используются итерационные методы. Для задач низкочастотного рассеяния удается в явном виде найти выпуклую оболочку спектра оператора уравнения (3) на комплексной плоскости и построить эффективный итерационный алгоритм [3].

При использовании итерационных методов наиболее трудоемкой, с вычислительной точки зрения, является операция умножения матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на вектор. Учитывая при дискретизации, что ядра интегральных уравнений зависят только от разности аргументов, и используя алгоритмы быстрого дискретного преобразования Фурье, строятся эффективные алгоритмы умножения матрицы СЛАУ на вектор [1,3]. В этом случае число арифметических операций оценивается как $N \log N$, где N - размерность матрицы СЛАУ, а \log - целочисленная функция, равная сумме всех простых делителей числа N . Эта функция мало меняется с ростом N , например, $\log(10^6) = 42$, $\log(10^8) = 56$.

Список литературы

1. Самохин А. Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М.: Радио и Связь, 1998.

2. Samokhin A. B. Iteration and discretization methods for solving the volume integral equations. // IEEJ Transactions A, 2009. V. 129, № 10, P. 669 – 774.
3. A. Samokhin, Y. Shestopalov, K. Kobayashi. Stationary iteration methods for solving 3D electromagnetic scattering problems.// Applied mathematics and computations, Vol. 222, October 2013, P. 107–122.

МИГРАЦИЯ МАЛЫХ ТЕЛ И ПЫЛИ К ПЛАНЕТАМ ЗЕМНОЙ ГРУППЫ

Ипатов Сергей Иванович¹

Маров Михаил Яковлевич²

1: *д.ф – м. н., ГЕОХИ имени В. И. Вернадского РАН и ИКИ РАН,
Москва, Россия*

2: *академик РАН, ГЕОХИ имени В. И. Вернадского РАН, Москва,
Россия*

E-mail: siipatov@hotmail.com, marovmail@yandex.ru

Математическое моделирование природных процессов является одним из ключевых направлений современной науки. Основополагающий вклад в разработку методов вычислительной математики, как основы этого научного направления, внес академик Александр Андреевич Самарский.

Авторами использованы методы математического моделирования для изучения миграций в космическом пространстве. Миграция малых тел отражает динамику регулярных и хаотических процессов в Солнечной системе. Одним из следствий миграций являются столкновения комет и астероидов с планетами. Они приводят к катастрофическим событиям и транспорту вещества, что имеет важнейшее значение для эволюции планет и их атмосфер.

Проведенные нами исследования основаны на результатах численного моделирования десятков тысяч малых тел и пылевых частиц под гравитационным влиянием всех планет (например, Marov & Ipatov 2001, 2005; Маров и Ипатов 2005; Ipatov & Mather 2006; Ipatov 2010). Для пылевых частиц, кроме гравитационного влияния планет и Солнца, учитывались также эффект Пойтинга–Робертсона, радиационное давление и давление солнечного ветра. В отличие от ряда авторов, изучавших миграцию транснептуновых объектов (напр., Levison & Duncan 1997), нами исследовалась миграция объектов, пересекающих орбиту Юпитера. Рассмотрены также пылевые частицы, эжектированные различными астероидами, кометами и транснептуновыми телами. При интегрировании использовался метод Булирша–Штера (Bulirsh and Stoer) или симплектический метод из пакета интегрирования (Levison & Duncan 1994). Элементы орбит тел и частиц за время их динамической жизни, полученные в расчетах, были использованы для вычисления вероятности их столкновений с Землей и другими планетами земной группы.

Наиболее важным следствием проведенных расчетов является вывод о возможности доставки большого количества воды и летучих за счет механизма миграции малых тел во внутренние области Солнечной системы,

что позволяет скомпенсировать их дефицит вследствие формирования при относительно высоких температурах внутри снеговой линии. Показано, что вероятность P_E столкновений объектов, пересекающих орбиту Юпитера, с Землей во время динамической жизни этих объектов превышает $4 \cdot 10^{-6}$. Используя $P_E=4 \cdot 10^{-6}$ и полагая, что общая масса планетезималей, которые пересекали орбиту Юпитера, была порядка ста масс Земли (Ипатов 2000), мы получили, что общая масса воды, доставленной из зоны питания планет-гигантов к Земле за счет гетерогенной аккреции, могла быть порядка массы воды в земных океанах. При этом отношение массы воды, доставленной кометами семейства Юпитера и кометами Галлеевского типа к планете, к массе планеты могли быть больше для Меркурия, Венеры и Марса, чем для Земли. Этот результат согласуется с современными представлениями о том, что древние океаны на планетах – соседях Земли были или потеряны (на Венере) или похоронены в криосфере (на Марсе) во время их последующей эволюции.

Расчеты привели также к выводу, что небольшая часть транснептуновых объектов, пересекающих орбиту Юпитера, может переходить на орбиты, типичные для объектов, сближающихся с Землей, или для астероидов Главного пояса. Они могут находиться на этих орбитах в течение десятков и даже сотен миллионов лет при условии, что не происходит их последующей дезинтеграции на более мелкие тела и пыль. При этом вероятность столкновения с планетами земной группы у одного объекта из нескольких тысяч объектов, сближающихся с Землей, на подобных орбитах может быть выше, чем у всех остальных объектов вместе взятых. Естественно предположить, что многие бывшие кометы, тесно связанные с объектами транснептунового пояса, состоящими из углистых хондритов или ледяного субстрата, были дезинтегрированы внутри орбиты Юпитера за эти большие времена, породив огромное количество пылевых частиц. Определенная часть пылевых частиц, создаваемых перечисленными источниками, мигрирует к планетам земной группы и выпадает на их поверхность. Следует подчеркнуть, что, хотя масса выпавших пылинок меньше, чем масса крупных тел, пылевые частицы могли быть наиболее эффективными в доставке на Землю органического и даже биогенного вещества вследствие существенно меньшего нагрева при вхождении в атмосферу под малыми углами атаки. Вероятность столкновения пылевых частиц с Землей максимальна при диаметрах частиц порядка 100-200 микрон. Эти значения вероятности соответствуют частоте встречаемости микрократеров на лунном материале и на панелях космических аппаратов.

Таким образом, результаты математического моделирования процессов миграции позволили получить вероятностные оценки доставки воды, летучих и возможно органического вещества на Землю и планеты земной

группы вследствие интенсивной бомбардировки кометами, астероидами и пылевыми частицами из внешних областей Солнечной системы. Это имеет ключевое значение для понимания природы Земли и планет на ранней стадии эволюции и вносит также вклад в проблему астероидно-кометной опасности.

Список литературы

1. Ипатов С. И. Миграция небесных тел в Солнечной системе. Изд-во УРСС. 2000.
2. Маров М. Я., Ипатов С. И. Миграция пылевых частиц и доставка летучих на планеты земной группы // *Астрономический вестник*. 2005. Т. 39, № 5. С. 419 – 425.
3. Ipatov S. I. Collision probabilities of migrating small bodies and dust particles with planets // In *Proceedings of the IAU Symposium S263 "Icy bodies in the Solar System"*. Cambridge University Press, 2010. P. 41 – 44.
4. Ipatov S. I., Mather J. C. Migration of small bodies and dust to near-Earth space // *Advances in Space Research*. 2006. v. 37, № 1, P. 126 – 137.
5. Levison H. F., Duncan M. J. The long-term dynamical behavior of short-period comets // *Icarus*. 1994. V. 108, P. 18 – 36.
6. Levison H. F., Duncan M. J. From the Kuiper belt to Jupiter-family comets // *Icarus*. 1997. V. 127, P. 13 – 23.
7. Marov M. Ya., Ipatov S. I., Volatile inventory and early evolution of planetary atmospheres // In *"Collisional processes in the solar system"*. Astrophysics and space science library, V. 261, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 2001, P. 223 – 247.
8. Marov M. Ya., Ipatov S. I. Migration processes and volatiles delivery. // In *Proc. of the 213th IAU Symposium "Bioastronomy 2002: Life among the stars"*. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, 2003, P. 295 – 298.

ПРИНЦИП КОНСЕРВАТИВНОСТИ В ЗАДАЧАХ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

**Мажорова Ольга Семеновна, Попов Юрий Петрович,
Щерица Ольга Владимировна**

д.ф – м. н., профессор; чл. – корр. РАН, профессор; к.ф – м. н.

*E-mail: magor@keldysh.ru, popov@keldysh.ru,
schery@keldysh.ru*

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва,
Россия*

Исследование физических процессов методом конечных разностей подразумевает замену непрерывной среды ее дискретным аналогом. Такая замена может быть выполнена различными способами и для исходной дифференциальной задачи существует практически неограниченное семейство разностных схем. В связи с этим возникает проблема отбора схем, обладающих необходимыми свойствами. Определяющую роль в оценке качества вычислительного алгоритма играют требования аппроксимации, устойчивости и сходимости. В линейном случае анализ разностной схемы, как правило, сводится к исследованию аппроксимации и устойчивости. Выполнение этих свойств гарантирует сходимость.

Однако численное исследование реальных задач зачастую связано с необходимостью построения разностных схем для нелинейных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и решениями. В таких случаях классических требований аппроксимации и устойчивости уже недостаточно. Здесь при построении разностных схем необходимо учитывать физическую природу изучаемого явления. В работах [1,2] был сформулирован принцип консервативности. Он состоит в том, что в дискретной модели среды должны выполняться разностные аналоги законов сохранения, заложенные в исходной физико-математической постановке задачи. Эффективность принципа консервативности впервые была продемонстрирована на примере стационарного уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом. А.Н. Тихонов и А.А. Самарский показали, что для нелинейных задач с разрывными коэффициентами консервативность является необходимым условием сходимости.

Дальнейшее развитие принципа консервативности привело к понятию полной консервативности[3]. Полностью консервативные разностные схемы являются сужением класса консервативных схем. В этих схемах выполняются не только основные законы сохранения, но и некоторые их следствия, имеющие непосредственный физический смысл: в газодинамике — первое начало термодинамики, баланс энергии по видам и т.д. Таким образом, принципы консервативности и полной консервативности, имеющие физическое происхождение, обеспечивают наследование разностной схемой

свойств исходной физико-математической модели. Нарушение этих принципов ведет к тому, что соответствующая дискретная модель утрачивает физический смысл и решение разностной задачи количественно, а порой и качественно, отличается от решения исходной задачи.

Доклад посвящен некоторым новым аспектам принципа консервативности, связанным с решением эволюционных задач в областях с подвижными границами, в случае, когда закон их движения заранее не известен и определяется в процессе решения задачи. Для наглядности изложение ведется на примере задачи о кристаллизации неразбавленного раствора, температура фазового перехода которого зависит от состава жидкой и твердой фаз — термо-диффузионная задача Стефана. Рассматривается класс методов, основанных на явным выделением границы раздела фаз, когда подвижная граница определяется положением закрепленных на ней узлов сетки. Это достигается либо за счет использования подвижных сеток, согласованных в исходных переменных с формой фронта кристаллизации, либо с помощью динамической замены переменных, которая выбирается так, чтобы в новых координатах расчетная область стала регулярной, с фиксированными границами, совпадающими с координатными линиями. В первом случае осуществляется аппроксимация исходных дифференциальных уравнений, во втором – уравнений, полученных с помощью замены переменных.

В докладе на подвижной и фиксированной сетках демонстрируется техника построения дивергентных и недивергентных разностных схем, гарантирующих выполнение баланса внутренней энергии и массы в дискретной модели. При этом переход из неподвижной системы координат в подвижную, связанную с движением границы раздела фаз, осуществляется с помощью замены переменных, аналогичной дифференциальному случаю [4]. В докладе обсуждается также вопрос о связи дивергентной формы записи разностной схемы с консервативностью вычислительного алгоритма.

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов. // ДАН 1959. Т. 124, № 3. С. 1529 – 1532.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах. // ЖВМ и МФ 1961. Т. 1, № 1. С. 5 – 63.
3. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
4. Мажорова О. С., Попов Ю. П., Щерица О. В. Консервативные разностные схемы для термо-диффузионной задачи Стефана. // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 7. С. 897 – 905.

**NORMALITY AND BOUNDARY BEHAVIOR OF ARBITRARY AND MEROMORPHIC
FUNCTIONS ALONG SIMPLE CURVES**

Marijan Marković, Žarko Pavićević

assistant professor, full professor

E-mail: marijanmmarkovic@gmail.com, zarkop@ac.me

*Faculty of Natural Sciences and Mathematics at University of Montenegro,
Podgorica, Montenegro*

By \mathbb{D} we denote the open unit disk in \mathbb{C} , and by Γ the unit circle. Let $d_h, (d_{ph}, d_s)$ stands for the (pseudo-)hyperbolic (spherical) distance in \mathbb{D} ($\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$). The group of all conformal automorphisms of \mathbb{D} is denoted by \mathcal{M} . A function $f : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ is normal in \mathbb{D} if $\{f \circ \varphi : \varphi \in \mathcal{M}\}$ is a normal family. The uniform convergence on compact subsets of \mathbb{D} of $\{f_n : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} : n \in \mathbb{N}\}$ we mean in (\mathbb{D}, d_{ph}) and $(\overline{\mathbb{C}}, d_s)$. Let $\varphi_w(z) = \frac{z+w}{1+\overline{z}w} \in \mathcal{M}$, $w \in \mathbb{D}$. We write $f_w = f \circ \varphi_w$ for any function f in \mathbb{D} . The set $C(f, A, e^{i\theta}) = \{w \in \overline{\mathbb{C}} : \text{there exist } \{z_n\} \subseteq A, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = e^{i\theta} \in \Gamma \text{ such that } \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w\}$ is the cluster set for f in $e^{i\theta} \in \Gamma$ along the set A whose closure in $\mathbb{D} \cup \Gamma$ contains $e^{i\theta}$. All curves which appear we mean lie in \mathbb{D} , are simple and terminate in $e^{i\theta} \in \Gamma$. For a curve γ the set $\Delta_r \gamma = \Delta_{r'} \gamma = \bigcup_{z \in \gamma} \overline{D}_{ph}(z, r) = \bigcup_{z \in \gamma} \overline{D}_h(z, r')$ for $r \in [0, 1)$, $r' = \log \frac{1+r}{1-r} \in (0, \infty)$ is called a curvilinear angle along γ . If $\gamma_2 \subseteq \Delta_r \gamma_1$ ($\Delta_{r'} \gamma_1$) for some $r \in (0, 1)$ ($r' \in (0, \infty)$), we say that the (pseudo-)hyperbolic distance between these curves is less than r (r') – we also say that the distance between curves is finite, and write $\gamma_1 \sim \gamma_2$. This is an relation of equivalence; a class for γ is denoted by $[\gamma]$. If the Fréchet distance between γ_1, γ_2 is finite, then $\gamma_1 \sim \gamma_2$. The converse does not hold, by our counterexample.

Theorem 1. For any $f : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $\{w_n\} \subseteq \mathbb{D}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = e^{i\theta}$, and $c \in \overline{\mathbb{C}}$: (1) $\{f_n = f \circ \varphi_n\}$, $\varphi_n = \varphi_{w_n}$ converges uniformly to $c \Leftrightarrow$ (2) for any compact $K \subseteq \mathbb{D}$ holds $C(f, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(K), e^{i\theta}) = \{c\}$.

A function f in \mathbb{D} has Δ_γ -boundary value c along γ if $\bigcup_{r \in (0, 1)} C(f, \Delta_r \gamma, e^{i\theta}) = \{c\}$. If γ lies in a Stolz angle with vertex in $e^{i\theta}$, then Δ_γ -boundary value is the same as the ordinary angular boundary value.

Theorem 2. For any $f : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$: (1) there exists Δ_γ -boundary value equal to $c \Leftrightarrow$ (2) for any $\{w_n : \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = e^{i\theta}\} \subseteq \gamma$ the sequence $\{f_n = f \circ \varphi_{w_n}\}$ converges uniformly to $c \Leftrightarrow$ (3) for any $\gamma_1 \sim \gamma$ holds $\lim_{\gamma_1 \ni z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) = c$.

If $\lim_{\gamma_1 \ni z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) = c$ for every $\gamma_1 \in [\gamma]$, we say that c is $[\gamma]$ -boundary value for f , or the boundary value of f along $[\gamma]$. Δ_γ -boundary value for f exists if and only if there exists $[\gamma]$ -boundary value for f and they coincides. We say that a function f is normal along γ in $D(r) = \{z : |z| < r < 1\}(\mathbb{D})$

if $\{f_w = f \circ \varphi_w : w \in \gamma\}$ is normal in $D(r) (\mathbb{D})$. We prove if a function has Δ_γ -boundary value, then it is normal along γ ; the reverse does not hold.

Theorem 3. (A generalization of Theorem 1 in [3]) Let $f : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ be any function, and let $\lim_{\gamma \ni z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) = c$. If f does not have Δ_γ -boundary limit, then for every $\varepsilon > 0$ there exist curves $\gamma_1, \gamma_2 \in [\gamma]$ such that the (pseudo-)hyperbolic distance between γ_2 and γ_1 is less than ε and such that along γ_1 the function f has the asymptotic boundary value c , and along γ_2 does not.

With N we denote the class of all normal meromorphic functions in \mathbb{D} . We denote with $f^\#(z) = \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$ the spherical derivate of meromorphic f .

Theorem 4. For every $r \in (0, 1)$: (1) f is normal in $D(r)$ along the curve $\gamma \Leftrightarrow$ (2) $\sup_{z \in \Delta_r \gamma} (1 - |z|^2) f^\#(z) < \infty$.

V.I. Gavrilov considered the normality and boundary behavior of meromorphic function using P -sequences. He showed: $f \in N \Leftrightarrow f$ in \mathbb{D} does not have P -sequences. Using Gavrilov results we prove

Theorem 5. (1) f is normal along $\gamma \Leftrightarrow$ (2) f is normal along $[\gamma] \Leftrightarrow$ (3) $\sup_{z \in \Delta_r \gamma} (1 - |z|^2) f^\#(z) < \infty, r \in (0, 1) \Leftrightarrow$ (4) f does not have P -sequences in $\Delta_r \gamma, r \in (0, 1)$.

Theorem 6. (A generalization of the Seidel-Walsh result [4]) (1) f is normal along γ and $\lim_{\gamma \ni z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) = c \Leftrightarrow$ (2) c is Δ_γ -boundary value of f .

In a similar manner one can give a characterisation in $D(r)$. We conclude

Theorem 7. Let a meromorphic function $f : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ has an asymptotic boundary value along a curve γ . In order that f has $\Delta_r \gamma$ -boundary value it is necessary and sufficient that $\sup_{z \in \Delta_r \gamma} (1 - |z|^2) f^\#(z) < \infty$ for all $r \in (0, 1)$, what is equivalent to the condition that f does not contain P -sequences in $\Delta_r \gamma$.

Our results are generalization of Theorems 2, 2', 4 and 5 of Lehto and Virtanen which concern the class N .

Our theorems show that each of the following two conditions: (1) f is normal meromorphic function along a curve γ ; (2) a meromorphic function f has an asymptotic boundary value along the curve γ , is a necessary condition for the existence of Δ_γ -boundary value ($[\gamma]$ -boundary value) of f . Taken together, conditions (1) and (2) are necessary and sufficient for the existence of Δ_γ -boundary value ($[\gamma]$ -boundary value) of f .

Список литературы

1. V. I. Gavrilov, *On the distribution of values of functions meromorphic in the unit disk which are not normal*, Math. Sbor. **67** (1965), 408–427 (Russian).

2. O. Lehto and K. I. Virtanen, *Boundary behaviour and normal meromorphic functions*, Acta Math. **97** (1957), 47–65.
3. W. Seidel and J. L. Walsh, *On the derivatives of functions analytic in the unit circle and their radii of univalence and of p -valence*, Trans. Amer. Math. Soc. **52** (1942), 128–216.

**ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОРОТКОВОЛНОВОГО ИСТОЧНИКА
ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ НАНОЛИТОГРАФИИ**

Новиков Владимир Григорьевич

д.ф – м.н., профессор

E-mail: novikov@kiam.ru

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва,
Россия*

Источники коротковолнового (экстремального) ультрафиолетового излучения необходимы для будущей литографии с высокой степенью упаковки элементов интегральных схем (с детальностью ~ 10 нм [1]). Такие источники, основанные на плазме олова, создаваемой CO_2 лазером, обладают высокой эффективностью в диапазоне длин волн вблизи 13.5 нм. Излучающая плазма олова при плотности 10^{19} 1/см³ и температуре $\sim 50 - 100$ эВ достигает десятикратной ионизации и является оптически плотной, причем процессы поуровневой кинетики совместно с переносом излучения во многом определяют динамику такой плазмы.

После лазерного предимпульса длительностью ~ 60 нс относительно слабой мощности капля жидкого олова диаметром ~ 30 мкм распадается на фрагменты размером ~ 1 мкм за время ~ 1 мкс. Для моделирования этого процесса был использован открытый пакет OpenFoam [2,3].

Для описания процессов динамики плазмы после основного лазерного импульса для мишени, разбитой на фрагменты, используется 2D РГД программа RZLINE [4], которая включает рефракцию, отражение и поглощение лазерного излучения, нестационарную ионизацию, электронную и ионную теплопроводность, а также спектральный перенос неравновесного излучения в многозарядной нестационарной плазме.

В неравновесной плазме тяжелых элементов перенос излучения определяется поглощением в спектральных линиях. Именно этот эффект определяет эффективность конверсии вложенной энергии в излучение. При этом процессы фотовозбуждения, фотоионизации и индуцированного излучения, вызванные наличием поля излучения, могут существенно изменять состояние плазмы даже при относительно небольшой доле поглощенной энергии из-за высокой скорости таких процессов [5].

Для описания процесса термализации излучения была разработана модель поуровневой кинетики, использующая усреднение по конфигурациям, и согласованная с процессами переноса фотонов. Область применимости модели — плазма тяжелых элементов, где основным процессом является процесс переноса излучения в спектральных линиях, при этом линии существенно перекрыты, составляя в спектре достаточно широкие кластеры.

В рассматриваемом приближении получены численные решения в цилиндрической и сферической геометрии. Методика расчета основана на методе характеристик для уравнения переноса излучения, решаемого совместно с поуровневой кинетикой электронов. Распараллеленный алгоритм предусматривает учет до 20000 спектральных групп, что позволяет с достаточной точностью описать перенос энергии в спектральных линиях. Полученные решения согласованы с распределением полей излучения. Детальные расчеты проведены для разрядной и лазерной плазмы олова, на основе которых построены приближенные методы вычисления радиационных свойств неравновесной излучающей плазмы для использования in-line в газодинамических программах.

Список литературы

1. Bakshi V. EUV Source Technology: Challenges and Status, EUV Sources for Lithography, SPIE Press, Bellingham, Washington, USA, 2006.
2. Koshelev K.N. et al, RZLINE code modeling of distributed tin targets for laser-produced plasma sources of extreme ultraviolet radiation, J. Micro/Nanolith. MEMS MOEMS, 11(2), 021112, 2012.
3. <http://www.openfoam.org>
4. Vichev I.Yu. et al, Hydrodynamics Modeling of Liquid Droplet Deformation with Laser Pulses, Proceedings of International Workshop on EUV and Soft X-Ray Sources, Ireland, Dublin, November 3-7, 2013, <http://www.euvlitho.com/2013/S44.pdf>
5. Novikov V.G. et al, Calculation of tin emission spectra in discharge plasma: The influence of reabsorption in spectral lines, High Energy Density Physics, v.3, pp.198-203, 2007.

**О ЗАДАЧАХ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

Холодов Ярослав Александрович¹

Холодов Александр Сергеевич²

*1: к.ф – м. н., Московский физико – технический институт (ГУ),
Долгопрудный, Россия*

*2: чл. – корр. РАН, профессор, Институт автоматизации
проектирования РАН, Москва, Россия*

E-mail: kholodov@cres.mipt.ru

Уравнения и системы гиперболического типа составляют значительную часть математических моделей, используемых для решения самых разных прикладных задач. Характерной чертой их решений в нелинейном случае является возникновение разрывов, что сильно ограничивает возможности построения аналитических решений даже при исследовании классических (прямых) краевых задач (с начальными и граничными условиями), поэтому наиболее распространенным подходом к решению таких задач в настоящее время являются численные методы. Еще более осложняется ситуация в случае различных неклассических постановок, в частности, задач об управлении решениями с помощью граничных условий. Впервые теоретическая постановка одной из таких задач об управлении колебаниями для простейшего волнового уравнения была рассмотрена в [1]. В [2] и ряде последующих работ для двумерного линейного уравнения переноса были рассмотрены несколько иные постановки, названные автором обратными задачами для гиперболических уравнений. В настоящее время ведётся решение самых разных задач управления упругими колебаниями с помощью граничных управлений при различных типах граничных условий, задачи граничного управления процессом, описываемым телеграфным уравнением, задачи для уравнения неоднородной струны, для гиперболических систем волновых уравнений и др. Наиболее полные результаты получены в работах В.А. Ильина, Е.И. Моисеева и их последователей ([3, 4] и др.) В этих работах и в работах других авторов сформулированы условия, позволяющие решать задачи управления и выписаны некоторые граничные управления в явном виде. Целью настоящей работы является изучение возможности численного решения аналогичных задач для квазилинейных систем уравнений гиперболического типа.

Как известно, простейшими уравнениями гиперболического типа является линейное уравнение переноса и скалярное волновое уравнение, поэтому рассмотрение различных корректных постановок краевых задач и численных алгоритмов их решения вначале проводится именно для таких

простейших уравнений, используя минимальные сведения по теории гиперболических уравнений и систем (характеристические свойства уравнений, дивергентную запись уравнений, продолженные системы и др.). Рассматривается обобщение соответствующих постановок задач и вычислительных алгоритмов их решения в случае нелинейных (квазилинейных и дивергентных) систем уравнений гиперболического типа. Рассматриваются некоторые численные методы (сеточно-характеристические), использовавшиеся для численного решения сформулированных выше задач, в том числе явные и неявные консервативные варианты таких разностных схем на компактных сеточных шаблонах [5-7], являющиеся некоторыми линеаризациями известного метода [8]. Приводятся результаты тестирования вычислительных алгоритмов и численных методов на известных линейных примерах, а также решение некоторых нелинейных задач.

В качестве примера на рис. 1 приводится решение (прямая задача при $0 \leq t \leq 0.5$ и обратная при $0.5 \leq t \leq 1$) в области $0 \leq t \leq T = 1, 0 \leq x \leq 1$, следующей из волнового уравнения $\nu_{tt} - \nu_{xx} = 0$ системы $u_{it} \pm u_{ix} = 0, i = 1, 2, u_1 = \nu_t, u_2 = \nu_x$ с начальными условиями:

$$u_1(0, x) = 1 \text{ при } x < 0.25 \text{ или } x > 0.75, u_1(0, x) = 2 \text{ при } 0.25 \leq x \leq 0.75 \quad (1)$$

$$u_2(0, x) = 1 \text{ при } x < 0.25 \text{ или } x > 0.75, u_2(0, x) = 3 \text{ при } 0.25 \leq x \leq 0.75$$

и конечными условиями:

$$u_1(1, x) = u_2(1, x) = 1 \quad (2)$$

Расчеты на равномерной сетке с 301 узлом по координате x проведены при числе Куранта равном единице, когда использовавшиеся разностные схемы воспроизводят точное решение прямой задачи. Решение обратной задачи $u_1(t, x) = 1, u_2(t, x) = 1$ тривиально в силу однородности конечных условий. На рис. 2 представлены $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$, полученные численным решением в областях $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 0.5$ и $0 \leq t \leq 1, 0.5 \leq x \leq 1$ по неявной схеме задач с «начальными данными» на прямой $x = 0.5$ и соответствующими «граничными условиями» из (1) – (2). Полученные таким образом распределения на границах области интегрирования $x = 0$ и $x = 1$ и являются искомыми граничными управлениями.

Иллюстрации

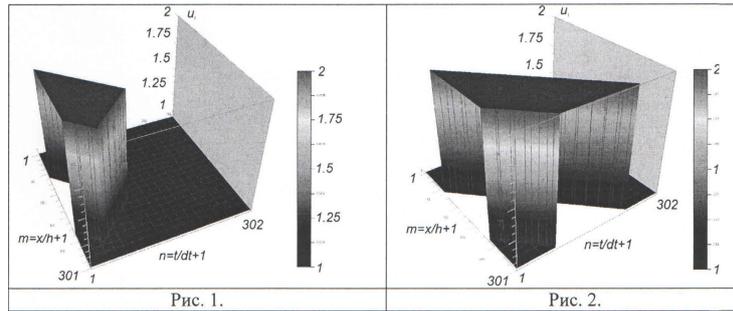


Рис. 4:

Список литературы

1. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1965.
2. Романов В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Н: Изд-во НГУ, 1973.
3. Ильин В. А. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени. // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 11. С. 1517 – 1534.
4. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Граничное управление радиально-симметричными колебаниями круглой мембраны // Докл. РАН. 2003. Т. 393, № 6. С. 730 – 734.
5. Холодов А. С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18, № 6. С. 1476 – 1492.
6. Холодов А. С., Холодов Я. А. О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46, № 9. С. 1638 – 1667.
7. Холодов А. С. Численные методы решения уравнений и систем гиперболического типа. Энциклопедия низкотемпературной плазмы (серия "Б"). Т. VII – 1, ч. 2: Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. М.: Изд. "ЯНУС-К". 2009, С. 141 – 174.
8. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. Сборник. 1959. Т. 47(89), вып. 3. С. 271 – 306.

MATHEMATICAL MODELLING OF TURBULENCE IN FREE SHEAR FLOWS

***Chechetkin Valery Mikhailovich, Lugovsky Alexey Yurievich,
Popov Yuri Petrovich***

professor; phd; corr. member of RAS

E-mail: chechet@spp.keldysh.ru, popov@keldysh.ru

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russian Federation

New physical model of the development of turbulence in free shear flows is proposed. Main idea is a leading role of large scale structures. Our theory is based on the results of numerical simulations of turbulent flow development. In these calculations the main idea of the proposed theory of turbulence in free shear flow is stated as follow: the onset of turbulence begins with the formation of large vortices. This mechanism is very important in stellar accretion disks. Some new interesting results of mathematical modelling of such astrophysical objects are presented. Transport of angular momentum is determined owing to large scale structures. Corrected model is obtained.

Considered astrophysical gas flows are described by the Euler equations of classical gas dynamics. These gas-dynamical equations are solved using a monotonic, first-order Roe TVD scheme with Osher anti-diffusion flow limiters that raise the order of the approximation of the scheme (to third order in 3D coordinates) with the minimum numerical dissipation and maintain the monotonicity of the scheme. In addition, the initial scheme is modified using the Einfeldt method to achieve higher stability. The TVD method can effectively describe a substantially nonstationary (e.g., turbulent) flow. Moreover, this method allows to parallelize computations. Parallelization is implemented using MPI technology.

Very important moment is the appearance of the secondary instability. This instability leads to the creation of turbulence cascade. In our calculation we obtain the spectrum which is different from Kolmogorov's universal spectrum for large structures. The spectrum is sensitive to the problem of dimensionality. We show our results of the evolution of large-scale turbulence in accretion disks for thin accretion disk. A possible mechanism explaining the transfer of angular momentum by large vortices that form in the disk without any noticeable heating of the matter is suggested. Very interested results are also obtained for Earth atmosphere.

Mathematical modeling allowed to specify a new picture of the development of turbulence.

СЕКЦИЯ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Амосов Андрей Авенирович

д.ф - м. н., профессор

E-mail: AmosovAA@prei.ru

Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва, Россия

Рассматривается начально-краевая задача (здесь $0 < t < T$, T любое)

$$c_p \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda(u)\nabla u) + 4\pi \int_0^\infty \kappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u) d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu \int_\Omega I_\nu d\omega d\nu + f, \quad x \in G, \quad (1)$$

$$\omega \cdot \nabla I + (\kappa_\nu + s_\nu)I_\nu = s_\nu \mathcal{S}_\nu(I_\nu) + \kappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u), \quad (\omega, x) \in \Omega \times G, \quad (2)$$

$$\lambda(u)\nabla u \cdot n = 0, \quad x \in \partial G, \quad (3)$$

$$I_\nu|_{\Gamma^-} = \mathfrak{B}_\nu(I_\nu|_{\Gamma^+}), \quad (\omega, x) \in \Gamma^-, \quad 0 < \nu < \infty, \quad (4)$$

$$u|_{t=0} = u^0, \quad x \in G, \quad (5)$$

описывающая радиационно - кондуктивный теплообмен в системе $G = \bigcup_{j=1}^m G_j$, состоящей из полупрозрачных тел $G_j \subset \mathbb{R}^3$, разделенных вакуумом.

Искомые функции $u(x, t)$, $I_\nu(\omega, x, t)$ имеют физический смысл абсолютной температуры и интенсивности излучения на частоте ν , распространяющегося в направлении $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 \mid |\omega| = 1\}$.

Здесь $0 < c_p$, $0 < \lambda(u)$, $0 \leq \kappa_\nu$, $0 \leq s_\nu$ и $1 < k_\nu$ - коэффициенты теплоемкости, теплопроводности, поглощения, рассеяния и показатель преломления, функция $h_\nu(u)$ при $u > 0$ отвечает спектральному распределению Планка: $\pi h_\nu(u) = \frac{2\pi\nu^2}{c_0^2} \frac{\hbar\nu}{\exp(\hbar\nu/(ku)) - 1}$. В уравнении переноса излучения

(2) \mathcal{S}_ν - оператор рассеяния. Краевое условие (4) описывает зеркальное отражение и преломление излучения по законам Френеля на границах тел. В нем $\Gamma^- = \{(\omega, x) \in \Omega \times \partial G \mid \omega \cdot n(x) < 0\}$, $\Gamma^+ = \{(\omega, x) \in \Omega \times \partial G \mid \omega \cdot n(x) > 0\}$. Подробное описание условия (1) и доказательство однозначной разрешимости задачи (2), (4) даны в [1].

В данной работе доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи (1) - (5). Установлена теорема сравнения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №13-01-00201) и Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-2081.2014.1).

Список литературы

1. Amosov A. A. Boundary value problem for the radiation transfer equation with reflection and refraction conditions // Journal of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 191. № 2. P. 101 - 149.

**ТОЧНЫЙ В СРЕДНЕМ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
СОПРЯЖЕНИЯ. УСПЕХИ И ПРОБЛЕМЫ**

Ахметова Оксана Валентиновна¹
Ковальский Алексей Алексеевич²
Михайлов Павел Никонович³
Филиппов Александр Иванович⁴

1: к.ф – м.н., доцент, Салаватский филиал УГНТУ, Салават, Россия

2: Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

3: д.ф – м. н., профессор, Институт прикладных исследований РБ,
Стерлитамак, Россия

4: д. т. н., профессор, физико – математический факультет СФ
БашГУ, Стерлитамак, Россия

E-mail: ahosana@mail.ru, covalski@mail.ru,
mihaylovpn@mail.ru, filippovrffi@yandex.ru

Многие задачи тепло- и массопереноса приводят к необходимости решения линейных и нелинейных уравнений параболического типа с условием сопряжения на границе (равенство значений функций и потоков). Построению приближенных аналитических (асимптотических) решений таких задач и посвящена работа.

Применение асимптотического метода позволяет построить относительно простые аналитические формулы для детальных расчетов и существенно уточнить развитые ранее модели многих физических процессов, сводящихся к задачам сопряжения. Представленный в работе метод "точный в среднем можно рассматривать как некоторый универсальный, практически важный алгоритм поиска стационарных или квазистационарных решений краевых задач в ограниченных (хотя бы по одной переменной) областях, что является отражением глубинных внутренних свойств природы асимптотических разложений решений, соответствующих задач сопряжения.

Схема применения асимптотического метода в задачах сопряжения состоит из следующих этапов:

1. Вместо самой задачи решается параметризованная задача. Асимптотический параметр вводится формально.

2. Формулируются отдельные задачи для нулевого, первого и др. коэффициентов асимптотического разложения.

3. Поскольку непосредственно такие задачи сформулировать отдельно для указанных коэффициентов не удастся, применяется специальная процедура расцепления.

4. Формулируется задача для остаточного члена асимптотического ряда. Поиск нетривиальных решений для первых коэффициентов приводит к необходимости замены граничных условий. Дополнительные граничные условия определяются из оценки остаточного члена.

5. Для вязких границ формулируются задачи для погранслойных функций. 6. Строятся решения для нулевого и первого коэффициентов.

7. Приближенное решение представляется как соответствующая сумма асимптотической формулы и погранслойных функций.

Применение такой схемы демонстрируется на конкретной задаче сопряжения, допускающей точное решение; проводится сравнение приближенного решения с точным. Выделен важный класс решений, названный "точным в среднем": первый коэффициент асимптотического разложения удовлетворяет условию, при выполнении которого осредненная задача для соответствующего остаточного члена имеет лишь тривиальное решение.

К настоящему времени представленная в работе модификация асимптотического метода успешно применена при исследовании фильтрации активных растворов в пористых средах, при движении газожидкостных смесей в скважине, при описании поля давления в неоднородных слоистых средах; решены стационарные, квазистационарные и нестационарные задачи, условия сопряжения в которых заданы либо на прямой, либо на окружности, и область ограничена по какой либо переменной.

Показано, что при решении задач сопряжения асимптотическим методом:

1. Нулевое асимптотическое приближение зависит лишь от усредненных источников и совпадает с решением усредненного уравнения.

2. Первое приближение уточняет зависимость от пространственной координаты, от которой не зависит нулевое.

Для построения нетривиального решения задачи для первого коэффициента использовано нелокальное граничное условие, заключающееся, например, для полосы в том, что его средние значения на оси симметрии равны нулю. Это обеспечивает построение точного в среднем асимптотического решения, означающего, что при этом решение задачи для остаточного члена, осредненной, по высоте пласта, является тривиальным. Аналогично, для получения точного в среднем асимптотического решения в задаче о температурном поле в скважине, достаточно потребовать, чтобы среднее значение первого коэффициента обращалось в ноль на границе. Погранслойные решения расширяют область применения аналитических выражений, полученных асимптотическим методом, и существенно увеличивают точность расчетов.

3. При существовании стационарных состояний процесса, соответствующие выражения получаются как предельные из первого приближения.

4. Первое асимптотическое приближение квазистационарных задач в некоторых случаях совпадает с точным решением.

5. Разложение точного решения параметризованной задачи по асимптотическому параметру совпадает с точным в среднем асимптотическим решением (до второго коэффициента).

С помощью фундаментального оператора задачи сопряжения определен критерий применимости разработанной схемы применения асимптотического метода к задачам с переменными коэффициентами.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПЛОСКИХ ОБЛАСТЯХ С ДВИЖУЩИМИСЯ БОКОВЫМИ ГРАНИЦАМИ

Бадерко Елена Александровна¹
Черепова Марина Федоровна²

1: профессор, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

2: профессор, НИУ МЭИ, Москва, Россия

E-mail: baderko.ea@yandex.ru, cherepovamf@mpei.ru

В полосе $D = R \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, рассматривается равномерно-параболический по Петровскому матричный оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{k=0}^2 A^{(k)}(x, t) \partial_x^k u, \quad u = (u_1, \dots, u_m), \quad m \geq 1,$$

где $A^{(k)} = \left\| a_{ij}^{(k)} \right\|_{i,j=1}^m$ — матрицы размерности $m \times m$, элементы которых есть

вещественные функции, определенные в \bar{D} и удовлетворяющие условиям:

а) собственные числа μ_r матрицы $A^{(2)}$ подчиняются неравенству $\operatorname{Re} \mu_r(x, t) \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x, t) \in \bar{D}$, $r = \overline{1, m}$;

б) $a_{ij}^{(k)} \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{D})$, $\alpha \in (0, 1]$, $i, j = \overline{1, m}$, $k = 0, 1, 2$;

($H^{\alpha, \alpha/2}(\bar{D})$ — анизотропное пространство Гельдера).

В D выделяется полуограниченная область $\Omega = \{(x, t) \in D : x > g(t)\}$ с негладкой, вообще говоря, боковой границей $\Sigma = \{(x, t) \in \bar{\Omega} : x = g(t)\}$, где функция g удовлетворяет условию:

$$|g(t + \Delta t) - g(t)| \leq K |\Delta t|^{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad t, t + \Delta t \in [0, T]. \quad (1)$$

В области Ω рассматривается задача Дирихле:

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{\Sigma} = \psi. \quad (2)$$

Пусть

$$\partial^{1/2} \psi(t) \equiv \partial_t^{1/2} \psi(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_t \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} \psi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

— оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$. Через $C_0^{1/2}([0, T])$ обозначаем пространство вектор-функций $\psi: [0, T] \rightarrow R^m$, для которых $\psi(0) = 0$ и существует $\partial^{1/2} \psi \in C([0, T])$; при этом

$$\|\psi; [0, T]\|^{1/2} := \sup_{(0, T)} |\psi| + \sup_{(0, T)} |\partial^{1/2} \psi|.$$

Через $C_0^{1,1/2}(\bar{\Omega})$ обозначаем пространство вектор-функций $u: \bar{\Omega} \rightarrow R^m$, принадлежащих $C_0(\bar{\Omega})$, для которых существуют $\partial_x u, \partial_t^{1/2} u \in C_0(\bar{\Omega})$ и

$$\|u; \Omega\|^{1,1/2} := \sum_{k \leq 1} \sup_{\Omega} |\partial_x^k u| + \sup_{\Omega} |\partial_t^{1/2} u| < \infty.$$

Пусть $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ — фундаментальная матрица решений системы $Lu = 0$ в D .

Теорема. Пусть для оператора L и боковой границы Σ выполнены условия а), б), (1). Тогда для любой вектор-функции $\psi \in C_0^{1/2}([0, T])$ существует классическое решение задачи (2)

$$u(x, t) = \int_0^t \Gamma(x, t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in \bar{\Omega},$$

где вектор-функция φ есть единственное решение граничного интегрального уравнения

$$\int_0^t \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

При этом $u \in C_0^{1,1/2}(\bar{\Omega})$ и выполнена оценка

$$\|u; \Omega\|^{1,1/2} \leq C \|\psi; [0, T]\|^{1/2}.$$

Работа второго автора выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-2081.2014.1) и гранта РФФИ (проект 13-01-0650а).

**О t -ЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ РАССЕЙЯНИЯ ДЛЯ
УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА И СИСТЕМЫ ДИРАКА**

Баев Андрей Владимирович

д.ф - м. н., профессор

E-mail: baev@smc.msu.ru, drbaev@mail.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Предметом обсуждения в работе являются условия разрешимости обратных задач рассеяния для уравнения Клейна-Гордона для струны

$$w_{tt} = w_{xx} - q(x)w \quad (1)$$

и нестационарной системы Дирака

$$v_t + v_x + z(x)u = 0, \quad u_t - u_x - z(x)v = 0, \quad (2)$$

рассматриваемых при $x, t > 0$ и нулевых начальных условиях при $t = 0$.

В обратных t -локальных задачах требуется по следу рассеянных волн,

$$w_t(0, t) = f(t) \text{ или } u(0, t) = f(t), \quad t \in [0, 2T],$$

соответственно, определить непрерывные коэффициенты $q(x)$ или $z(x)$ на отрезке $[0, T]$ при заданных граничных условиях

$$w_x(0, t) - h w(0, t) = -\varphi(t) \text{ или } v(0, t) + u(0, t) = \varphi(t), \quad t \in [0, 2T].$$

Сформулированные обратные задачи хорошо изучены. Между ними имеется тесная связь в силу задачи Коши для уравнения Риккати:

$$z' + z^2 = q(x), \quad x > 0, \quad z(0) = h. \quad (3)$$

Однако остаётся открытым вопрос о разрешимости обратной задачи рассеяния относительно $q(x)$, если задача (3) не имеет решения.

Предложение 1. *Обратная задача для (1) разрешима только в классе таких потенциалов $q(x)$, что на $[0, T]$ разрешима задача (3).*

Если $f(t)$ — корректно определённый след решения, то данные рассеяния называются точными. Дадим описание класса потенциалов $q(x)$, которые не восстанавливаются по точным данным рассеяния на произвольном отрезке.

Предложение 2. *Пусть $q(x) < 0$ и $h \leq 0$, или $q(x) \leq 0$ и $h < 0$. Тогда найдётся $T > 0$ такое, что в обратной задаче для (1) потенциал $q(x)$ не восстанавливается по точным данным рассеяния на $[0, T]$.*

Рассмотрим величину $\Pi(\varphi)$, являющуюся, по определению, суммарным потоком энергии волн, возбуждаемых источником колебаний $\varphi(t)$, на границе $x = 0$ за время $2T$:

$$\Pi(\varphi) \equiv - \int_0^{2T} w_t(0, t)(w_x(0, t) - hw(0, t))dt = \int_0^{2T} (v^2(0, t) - u^2(0, t))dt.$$

Для функционала $\Pi(\varphi)$ полагаем

$$\Pi_T = \inf_{\varphi} \{ \Pi(\varphi) \mid \|\varphi\|_{L_2[0, 2T]} = 1 \}.$$

Сформулируем необходимое и достаточное условие разрешимости обратных задач в форме, имеющей наглядный физический смысл.

Предложение 3. *Обратные задачи рассеяния для (1), (2) разрешимы тогда и только тогда, когда $\Pi_T > 0$.*

Естественно говорить, что случай $\Pi_T > 0$ соответствует физически реализуемой системе, поскольку для неё выполняется закон сохранения энергии. В то же время существуют механические и релятивистские квантовые модели, реализующие случай $q(x) < 0$. Может оказаться, что обратные задачи рассеяния для них разрешимы не на любом отрезке $[0, T]$, в то время как соответствующие прямые задачи, состоящие в нахождении решения (1) по начально-краевым условиям и заданному потенциалу $q(x)$, оказываются разрешимыми.

Важный вывод из сказанного состоит в том, что на основе точных данных рассеяния разрешимы лишь обратные задачи для физически реализуемых потенциалов $q(x)$, что, в свою очередь, равносильно разрешимости задачи Коши для уравнения Риккати (3).

В качестве примера приложения результатов работы рассмотрим обратную задачу, связанную с уравнением колебаний неоднородной среды

$$\sigma(x)p_{tt} = (\sigma(x)p_x)_x, \tag{4}$$

где $\sigma(x)$ — акустический импеданс, $\sigma(x) > 0$. Поскольку (4) приводится к виду (1) с потенциалом $q(x) = z' + z^2$, определяемым коэффициентом рассеяния $z(x) = \sigma'/(2\sigma)$, $z(0) = h$, то уравнение (4) соответствует физически реализуемой системе и, стало быть, обратная задача рассеяния для него разрешима на любом отрезке $[0, T]$.

Список литературы

1. Baev A. V. On local solvability of inverse dissipative scattering problems // Jour. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2001. V. 9, № 4. P. 227–247.

2. Баев А. В. О локальной разрешимости обратных задач рассеяния для уравнения Клейна-Гордона и системы Дирака // Матем. заметки. 2014. Т. 96, № 1 (*в печати*).

**СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ С КРАТНЫМ КОРНЕМ
ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ**

Бутузов Валентин Федорович

д.ф.м. н., профессор

E-mail: butuzov@phys.msu.ru

физический Факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Сингулярно возмущенные задачи в случае, когда корень вырожденного уравнения является кратным, обладают рядом особенностей по сравнению со случаем простого корня вырожденного уравнения. Эти особенности проявляются уже при рассмотрении достаточно простой краевой задачи

$$\varepsilon^2 u'' = f(u, x, \varepsilon), \quad 0 < x < 1; \quad (1)$$

$$u(0, \varepsilon) = u_0, \quad u(1, \varepsilon) = u_1, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, f — достаточно гладкая функция, имеющая вид

$$f(u, x, \varepsilon) = h(x) (u - \varphi(x))^2 - \varepsilon f_1(u, x, \varepsilon), \quad (3)$$

$h(x) > 0$ при $0 \leq x \leq 1$ (не ограничивая общности, будем считать, что $h(0) = 1$).

Из вида (3) функции f следует, что вырожденное уравнение

$$f(u, x, 0) = 0, \quad (4)$$

получающееся из (1) при $\varepsilon = 0$, имеет двукратный корень $u = \varphi(x)$. Оказывается, что кратность корня уравнения (4) приводит к существенным отличиям асимптотики погранслоного решения задачи (1), (2) от асимптотики в случае простого корня. Отметим основные отличия.

1) Структура асимптотики погранслоного решения задачи (1), (2) и само существование такого решения зависят от членов порядка ε , входящих в правую часть (3), а более точно, от функции $\bar{f}_1(x) := f_1(\varphi(x), x, 0)$.

2) Если $\bar{f}_1(x) > 0$ при $0 \leq x \leq 1$, то регулярная часть $\bar{u}(x, \varepsilon)$ асимптотики решения является рядом по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$ (а не ε , как в случае простого корня уравнения (4)):

$$\bar{u}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} (\sqrt{\varepsilon})^i \bar{u}_i(x),$$

где $\bar{u}_0(x) = \varphi(x)$, $\bar{u}_1(x) > 0$ (в силу условия $\bar{f}_1(x) > 0$) — это играет важную роль и при построении, и при обосновании асимптотики.

3) Погранслоиные части асимптотики являются рядами по целым степеням $\varepsilon^{1/4}$, причем коэффициенты этих рядов зависят не только от погранслоиных переменных $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$ и $\tilde{\xi} = \frac{1-x}{\varepsilon}$, но также и от ε . Например, погранслоиный ряд $\Pi(\xi, \varepsilon)$, связанный с граничной точкой $x = 0$, имеет вид

$$\Pi(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i(\xi, \varepsilon). \quad (5)$$

Главный член $\Pi_0(\xi, \varepsilon)$ этого ряда определяется как решение задачи

$$\frac{d^2 \Pi_0}{d\xi^2} = \Pi_0^2 + 2\sqrt{\varepsilon} \bar{u}_1(0) \Pi_0, \quad \xi > 0, \quad (6)$$

$$\Pi_0(0, \varepsilon) = u_0 - \varphi(0), \quad \Pi_0(\infty, \varepsilon) = 0.$$

Вид уравнения (6) отличается от стандартного вида в случае простого корня уравнения (4). Уравнения для следующих членов ряда (5) также формируются не стандартным способом. Решения задач для Π_0 и следующих членов ряда (5) можно выписать в явном виде и доказать оценку

$$|\Pi_i(\xi, \varepsilon)| \leq c \Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon),$$

где

$$\Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon) = \frac{\sqrt{\varepsilon} \exp(-\varepsilon^{1/4} \varkappa \xi)}{[1 - (1 - \varepsilon^{1/4}) \exp(-\varepsilon^{1/4} \varkappa \xi)]^2}, \quad (7)$$

c и \varkappa — положительные числа, не зависящие от ε .

4) Анализ выражения для $\Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon)$ показывает, что пограничный слой в задаче (1), (2) состоит из трех зон. В первой зоне ($0 \leq \xi \leq \varepsilon^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1/4$) функции $\Pi_i(\xi, \varepsilon)$ убывают с ростом ξ степенным образом: $\Pi_i(\xi, \varepsilon) = O\left(\frac{1}{1 + \xi^2}\right)$, во второй зоне ($\varepsilon^{-\gamma} \leq \xi \leq \varepsilon^{-1/4}$) происходит изменение масштаба погранслоиной переменной и характера убывания пограничных функций, и, наконец, в третьей зоне ($\xi \geq \varepsilon^{-1/4}$) функции Π_i убывают экспоненциально, как $\exp(-\varkappa \zeta)$, где $\zeta = \varepsilon^{1/4} \xi = \frac{x}{\varepsilon^{3/4}}$.

Таким образом, в случае двукратного корня уравнения (4) эталонной пограничной функцией является функция $\Pi_{\varkappa}(\xi, \varepsilon)$, определенная формулой (7), а не $\exp(-\varkappa \xi)$, как в случае простого корня уравнения (4).

Погранслоиный ряд, связанный с граничной точкой $x = 1$, строится аналогично ряду (5), и его члены имеют аналогичное поведение.

С помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств доказано существование решения задачи (1), (2) с построенной асимптотикой.

Случай кратного корня вырожденного уравнения исследован также для ряда других задач, о которых будет рассказано в докладе.

**МОДЕЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В
КОНУСАХ**

Васильев Владимир Борисович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: vbv57@inbox.ru

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

1. В теории (псевдо)дифференциальных уравнений и краевых задач на многообразиях с краем ключевую роль играет локальный принцип, определяющий весь дальнейший ход исследования. Если нас интересует вопрос фредгольмовости (нетеровости, нормальной разрешимости,...) общего псевдодифференциального уравнения или краевой задачи с переменными коэффициентами, нам надо обладать информацией об условиях обратимости так называемого “модельного” псевдодифференциального уравнения или краевой задачи с “замороженными” коэффициентами в той точке, где рассматривается эта локализация. Кроме того, остается вопрос о дополнительных условиях, которые следует добавить к рассматриваемому псевдодифференциальному уравнению, чтобы получить корректную задачу (вообще говоря, не обязательно краевую задачу, как в классических случаях).

В случае многообразий с гладкой границей стройная теория появилась в работах М.И. Вишика – Г.И. Эскина (см. [1]) – “сработала” идея факторизации и далеко продвинутая теория классической краевой задачи Римана и одномерных сингулярных интегральных уравнений. Когда на границе появляются особенности, требуется что-то другое. Существует много различных точек зрения на эту проблему, они достаточно подробно описаны в обзоре [2]. Многие исследователи начинали работать сразу в липшицевых областях, точнее, на многообразиях, граница которых локально представляет собой график липшицевой функции. Однако В.Г. Мазья в Праге на Equadiff-2013 убедил автора (и даже нарисовал очень простую картинку) в том, что далеко не все конусы могут быть описаны такими графиками, не говоря уже об экзотических ситуациях, когда возникают “букеты” различных особенностей.

Автор придерживается той точки зрения, что подход Вишика-Эскина может быть обобщен на многомерные ситуации, если считать конус одной из канонических особенностей, для которой можно предложить некий многомерный аналог задачи Римана (многомерная факторизация). При наличии такой факторизации в двумерном случае были подробно описаны ситуации разрешимости модельного псевдодифференциального уравнения и рассмотрены различные постановки краевых задач в пространствах Соболева-Слободянского. Недавно автор обнаружил [3.4], что и в многомерном случае можно получить содержательные результаты.

2. Рассматривается модельное псевдодифференциальное уравнение в многомерном конусе вида

$$(Au)(x) = f(x), \quad x \in C_+, \quad (1)$$

где A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, $\xi \in \mathbf{R}^m$, C_+ – острый выпуклый конус в m -мерном пространстве \mathbf{R}^m . Мы будем предполагать, что поверхность конуса задается липшицевой функцией $x_m = \varphi(x')$, $x' = (x_1, \dots, x_{m-1})$. Так, например, возможные варианты простейших канонических конусов $C_+^a = \{x \in \mathbf{R}^m : x_m > a|x'|, a > 0\}$ – прямой круговой конус, $C_+^{a_1 a_2 \dots a_{m-1}} = \{x \in \mathbf{R}^m : x_m > \sum_{k=1}^{m-1} a_k |x_k|, a_k > 0, k = 1, 2, \dots, m-1\}$ – поверхность многогранной пирамиды и т.д. В первом случае гладкость границы нарушается только в вершине конуса, во втором к вершине добавляются ребра.

Будем предполагать символ сильно эллиптическим, более точно, удовлетворяющим условию

$$c_1 \leq |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| \leq c_2,$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные.

Волновая факторизация символа относительно конуса C_+ – это его представление в виде двух сомножителей $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$, каждый из которых допускает аналитическое продолжение в радиальную трубчатую область $T(C_{\pm}^*)$ над сопряженным конусом, удовлетворяющих некоторым оценкам роста на бесконечности (порядка \varkappa для $A_{\neq}(\xi)$ и порядка $\alpha - \varkappa$ для $A_{=}(\xi)$). Число \varkappa называется индексом волновой факторизации.

Если стандартным образом определить [1,2] пространства Соболева-Слободецкого $H^s(C_+)$, то в зависимости от того, какова величина $\varkappa - s$, наблюдаются различные картины разрешимости уравнения (1). Все это в двумерном случае подробно описано в [2].

В многомерной ситуации рассмотрен случай $\varkappa - s = n + \delta, n \in \mathbf{N}, |\delta| < 1/2$. В случае $n = 0$ решение уравнения (1) единственно для любой правой части $f \in H_0^{s-\alpha}(C_+)$, и строится с помощью интегрального оператора, порожденного ядром Бохнера [2]. В оставшихся случаях с помощью специальной многомерной задачи Римана удастся сконструировать общее решение уравнения (1), которое зависит от n произвольных функций, сосредоточенных на поверхности конуса. Далее следует ввести некоторые дополнительные (например, краевые) условия для однозначной идентификации этих функций. В случае простейших конусов и простейших краевых условий эта схема уже была апробирована [3,4].

Список литературы

1. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
2. Васильев В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: УРСС, 2-е изд., 2010.
3. Васильев В. Б. О разрешимости уравнений в свертках в многомерном конусе // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2014. Т. 8. С. 383 – 388.
4. Vasilyev V. On the Dirichlet and Neumann problems in multidimensional cone // *Mathematica Bohemica*. 2014. V. 139, No.2. (to appear)

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Власов Виктор Валентинович, Орtiz Ромео Перез

д.ф. – м. н., профессор; магистрант

E-mail: vlasovvv@mech.math.msu.su, semees.romeo@gmail.com

Факультет Мехмат МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Мы изучаем структуру спектра интегро-дифференциальных уравнений типа Гуртина-Пипкина с ядрами, зависящими от параметра. Коэффициенты этих уравнений – неограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение. Уравнения типа Гуртина-Пипкина естественно возникают в задачах теплофизики, теории вязкоупругости, задачах усреднения (подробнее см. [1], глава 3).

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряженный положительный оператор, действующий в пространстве H , имеющий компактный обратный. Обозначим через $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A , отвечающих собственным значениям a_j : $Ae_j = a_j e_j$, $j \in \mathbb{N}$. Собственные значения a_j упорядочены по возрастанию: $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \dots$ где $a_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

На полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ рассмотрим задачу

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + A^2 u - \int_0^t K(t-s) A^{2\xi} u(s) ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (1)$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \quad 0 < \xi < 1. \quad (2)$$

Введем оператор-функцию $L_\xi(\zeta) = \zeta^2 I + A^2 - A^{2\xi} \widehat{K}(\zeta)$, где $\widehat{K}(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\zeta + \gamma_k}$ является преобразованием Лапласа функции $K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\gamma_k t}$, где $c_k > 0$, $\gamma_{k+1} > \gamma_k > 0$, $\gamma_k \rightarrow +\infty$ ($k \rightarrow +\infty$), называемой ядром уравнения (1).

Теорема 1. Пусть выполнены условия $\sup\{\gamma_k(\gamma_{k+1} - \gamma_k)\} = +\infty$ и $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty$. Тогда не вещественные собственные значения $\mu_n^\pm(\xi)$ оператор-функции $L_\xi(\zeta)$ имеют следующую асимптотику при $a_n \rightarrow +\infty$:

$$\mu_n^\pm(\xi) = -\frac{1}{2} \frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}} \sum_{j=1}^{\infty} c_j + O\left(\frac{1}{a_n^{2\xi}}\right) \pm i(a_n + O(a_n^{2\xi-1})), \quad \xi \in (0, 1/2),$$

$$\mu_n^\pm(\xi) = -\frac{1}{2} \frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}} \sum_{j=1}^{\infty} c_j + O\left(\frac{1}{a_n^{2\xi}}\right) \pm i\left(a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{2\xi-1}}\right)\right), \quad \xi \in (1/2, 1),$$

$$\mu_n^\pm(\xi) = -\frac{1}{2} \frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{\infty} c_j + O\left(\frac{1}{a_n}\right) \pm i(a_n + O(1)), \quad \xi = 1/2$$

Рассмотрим теперь случай, когда условие $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty$ не выполнено.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

$$c_k = \frac{A}{k^\alpha} + O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right), \quad \gamma_k = Bk^\beta + O(k^{\beta-1}), \quad k \rightarrow +\infty,$$

где константы $A > 0$, $B > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $\alpha + \beta > 1$. Тогда не вещественные собственные значения $\lambda_n^\pm(\xi)$ оператор-функции $L_\xi(\zeta)$ имеют следующую асимптотику при $a_n \rightarrow +\infty$:

$$\lambda_n^\pm(\xi) = \pm ia_n - \frac{DA}{\beta B^{1-r}} \frac{1}{a_n^{1+r-2\xi}} + O\left(\frac{1}{a_n^{2(r-\xi)+1}}\right), \quad r \in (0, 1/2),$$

$$\lambda_n^\pm(\xi) = \pm ia_n - \frac{DA}{\beta B^{1-r}} \frac{1}{a_n^{1+r-2\xi}} + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\right), \quad r \in (1/2, 1),$$

$$\lambda_n^\pm(\xi) = \pm ia_n - \frac{1}{2} \frac{A}{\beta} \frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}} \ln a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\right), \quad r = 1,$$

где $r := \frac{\alpha+\beta-1}{\beta}$, константа D зависит от r : $D := \frac{\pi}{2} \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{2}(1-r)\right)}{\sin(\pi r)}$.

Случай $\xi = 1$ подробно изучался в [2], а также в главе 3 монографии [1]. Доказательства сформулированных теорем приведены в [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 14-01-00349, № 13-01-12476-офи-м-2013, № 13-01-00384).

Список литературы

1. Власов В. В., Медведев Д. А., Раутиан Н. А. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ.// Под редакцией В. А. Садовниченко. *Современные проблемы математики и механики*, 2011, Т. VIII, Математика. Выпуск 1, М.: Издательство МГУ имени М.В. Ломоносова. —308с.
2. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, Well-defined solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic integrodifferential equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 179:25, 2011.
3. Romeo Perez Ortiz, Victor V. Vlasov, Spectra of the Gurtin-Pipkin type equations with the kernel, depending on the parameter. <http://arxiv.org/abs/1403.4382>

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В
ДВУМЕРНОМ КАНАЛЕ С МАЛЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕРОВНОСТЯМИ НА
СТЕНКАХ**

Гайдуков Роман Константинович¹
Данилов Владимир Григорьевич²

1: аспирант, Московский Технический Университет Связи и
Информатики, Москва, Россия

2: д.ф – м. н., профессор, НИУ «Высшая Школа Экономики», Москва,
Россия

E-mail: roma1990@gmail.com, vgdanilov@mail.ru

Мы рассматриваем пример двумерного канала с течением Пуазейля внутри (исключая пограничные слои), стенки которого заданы уравнениями

$$y_1 = \varepsilon^{4/5} \mu_1(x, x/\varepsilon^{2/5}) + l, \quad y_2 = \varepsilon^{4/5} \mu(x, x/\varepsilon^{2/5}),$$

где ε — малый параметр, а l — ширина канала. Можно считать, что $\varepsilon = \mathbf{Re}^{-1/2}$, где \mathbf{Re} — число Рейнольдса, или считать этот параметр малой безразмерной вязкостью. Функции $\mu_1(x, \xi)$ и $\mu(x, \xi)$ предполагаются 2π -периодичными по ξ , гладкими и имеющими нулевое среднее. Как обычно, мы предполагаем, что течение в канале описывается системой уравнений Навье-Стокса. Граничные условия имеют вид

$$\mathbf{U}|_{y=y_1} = \mathbf{U}|_{y=y_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{U} = (u, v)$ — вектор скорости.

Мы построили асимптотическое решение данной задачи, имеющее двухпалубную структуру. При построении осциллирующих решений мы выделяем неосциллирующую (осредненную) часть функций и осцилляции с нулевым средним. В рассматриваемой задаче это разделение является необходимым, так как в одном и том же порядке малости для осциллирующей и осредненной частей скорости краевые условия оказываются различными. Например, в тонком погранслое отсутствуют краевые условия для осциллирующей части, но присутствуют для осредненной. Это, в частности приводит к некоторым особенностям алгоритма построения решения в пристеночной области.

Также мы провели исследование влияния величины амплитуды неровности A при фиксированной ширине канала l на характер течения. В результате мы получили, что при малых A поток ламинарный, и начиная с некоторого времени — стационарный. При превышении A некоторого значения A^* в потоке возникают вихри, но исчезают за короткое время, и

начиная с некоторого момента времени вихревое течение сменяется ламинарным. При дальнейшем увеличении амплитуды, начиная с некоторого значения A^{**} вначале наблюдается образование вихрей, но в отличие от предыдущих случаев, по истечению некоторого времени течение становится стационарным, но не ламинарным — в «ямке» образуется стационарный вихрь. Аналогично, при фиксированной A , на структуру течения оказывает влияние ширина канала l .

Список литературы

1. Danilov V. G., Makarova M. V. Asymptotic and numerical analysis of the flow around a plate with small periodic irregularities // Russian J. of Math. Phys. 1994. Vol. 2, No. 1.
2. Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A. Mathematical Modeling of Heat and Mass Transfer Processes. Kluwer Academic Publishers, 1995.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С НЕЛОКАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

Денисов Александр Михайлович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: den@cs.msu.su

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Рассматривается начально-краевая задача для квазилинейной системы уравнений в частных производных с нелокальным краевым условием, содержащим запаздывающий аргумент

$$u_x + a_t = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$a_t = u - \psi(a), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu(t) + u(l, \alpha(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$a(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

где $Q_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$, а функция $\alpha(t)$ такова, что $0 \leq \alpha(t) < t, t \in (0, T]$.

Задачу (1)-(4) можно рассматривать как математическую модель фильтрационной системы, в которой газ или жидкость после прохождения через фильтр длиной l вновь поступает на вход системы с запаздыванием по времени, определяемым функцией $\alpha(t)$.

Сформулируем обратную задачу. Пусть функции $\mu(t)$ и $\alpha(t)$ заданы, а функция $\psi(s)$ неизвестна. Требуется определить $\psi(s)$, $u(x, t)$ и $a(x, t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)-(4)

$$u(x_0, t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $x_0 \in (0, l)$ - фиксированная точка.

Доклад посвящен доказательству существования и единственности решения задачи (1)-(4) и теоремы единственности решения сформулированной обратной задачи. Доказательство теоремы единственности обратной задачи основано на выводе и анализе интегро-функционального уравнения для разности двух решений обратной задачи.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект 14-01-00244.

**О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Денисов Василий Николаевич

д.ф - м. н., профессор

E-mail: vdenisov2008@yandex.ru

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В полупространстве $\bar{D} = R^N \times [0, \infty)$, $N \geq 3$ рассмотрим задачу Коши

$$\sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x, t)u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^N b_i(x, t)u_{x_i} + c(x, t)u - u_t = 0, \quad (x, t) \in D, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R^N. \quad (2)$$

Мы предполагаем, что

$$1) \lambda_0^2 |y^2| \leq \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x, t)y_i y_k \leq \lambda_1^2 |y^2|$$

2) коэффициенты в (1) вещественны и удовлетворяют условию Гельдера [1]

3) коэффициенты $b_i(x, t)$ ($i = 1, \dots, N$) удовлетворяют условию (B): существует $B > 0$:

$$\sup_D \sum_{i=1}^N |b_i(x, t)| = B, \quad (3)$$

4) коэффициент $c(x, t)$ удовлетворяет условию (C): найдутся $\alpha > 0, 0 < k < 1/2$

$$c(x, t) \leq -\alpha^2 \min(1, r^{-2k}), \quad r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}, \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть $u(x, t)$ - решение задачи (1), (2) с начальной функцией, удовлетворяющей условию

$$|u_0(x)| \leq M \exp\{ar^{1-2k}\}, \quad 0 < k < 1/2, a > 0, \quad (5)$$

коэффициенты $b_i(x, t)$ удовлетворяют условию (B), коэффициент $c(x, t)$ удовлетворяет условию (C) при

$$\alpha^2 > B(1 - 2k)a \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^2}, \quad (6)$$

Тогда решение задачи (1), (2) имеет предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad (7)$$

равномерно относительно x на каждом компакте K в R^N .

Замечания.

- 1) Утверждение теоремы 1 нельзя усилить, заменив компакт K на все R^N .
- 2) Неравенство (6) является точным и не допускает замены на противоположное.

Теорема 2. Пусть $u(x, t)$ - решение задачи (1), (2) с начальной функцией $u_0(x)$, удовлетворяющей условию

$$|u_0(x)| \leq Mr^m, r \rightarrow \infty, \quad (8)$$

коэффициенты $b_i(x, t) (i = 1, \dots, N)$ удовлетворяют условию (B), а коэффициент $c(x, t)$ удовлетворяет при $k = \frac{1}{2}$ условию (C) для

$$\alpha^2 > Bm \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^2}, \quad (9)$$

Тогда решение задачи Коши (1), (2) имеет предел (7), равномерно относительно x на любом компакте K в R^N .

Замечания. Теорема 2 является точной, ибо

- 1) компакт K в утверждении нельзя заменить на все R^N .
- 2) неравенство (9) нельзя заменить на противоположное.

В работе [1] была изучена стабилизация задачи Коши (1, 2) при условии, что коэффициенты $b_i(x, t), i = 1, \dots, N$ являются убывающими.

Автор благодарит акад. В.А.Ильина за внимание и ценные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-000-58)

Список литературы

1. Денисов В.Н. О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшими коэффициентами в классах растущих начальных функций // ДАН РАН. 2010. Т. 430, № 5. С. 586 – 588.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПУАССОНА И СТОКСА

Дубинский Юлий Андреевич

д.ф.м.н., профессор

E-mail: julii_dubinskii@mail.ru

Национальный исследовательский университет “Московский энергетический институт”, Москва, Россия

Для системы уравнений Пуассона в области $G \subset \mathbb{R}^3$ рассматриваются краевые задачи

$$I) \begin{cases} \Delta u(x) = h(x), & x \in G, \\ (u, n)_\Gamma = 0, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial n}, n\right]_\Gamma = 0; \end{cases} \quad II) \begin{cases} \Delta u(x) = h(x), & x \in G, \\ [u, n]_\Gamma = 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n}, n\right)_\Gamma = 0 \end{cases}$$

где $n = (n_1, n_2, n_3)$ - вектор нормали в граничных точках, (\cdot, \cdot) , $[\cdot, \cdot]$ - скалярное и векторное произведения в \mathbb{R}^3 .

Устанавливается корректность задач $I)$ и $II)$ в рамках соболевских подпространств, адекватных краевым условиям. Ключевые неравенства, эквивалентные корректности задач $I)$, $II)$, суть

$$\int_G |u|^2 dx \leq M \left(\int_G |\nabla u|^2 dx + \int_\Gamma (u, n)^2 d\gamma \right),$$

$$\int_G |u|^2 dx \leq M \left(\int_G |\nabla u|^2 dx + \int_\Gamma |[u, n]|^2 d\gamma \right),$$

где $M > 0$ - постоянная.

Аналогичные задачи рассмотрены для системы уравнений Стокса.

Обсуждаются физический смысл краевых условий и возможности численного решения задач $I)$, $II)$.

Список литературы

1. Дубинский Ю. А. О некоторых краевых задачах для системы уравнений Пуассона в трехмерной области // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 610 – 613.
2. Dubinskii Yu. A. Some Coercive Problems for the System of Poisson Equations // Russian Journal of Mathematical Physics. V. 20, № 4. 2013, P. 402 – 412.

**ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ
СМЕШАННОГО ТИПА С ЗАМКНУТОЙ ЛИНИЕЙ ВЫРОЖДЕНИЯ**

Зарубин Александр Николаевич

д.ф. - м. н., профессор

E-mail: alexs_zarubin@mail.ru

Орловский государственный университет, Орел, Россия

Уравнение

$$U_{xx}(x, y) + \operatorname{sgn}(xy(2\tau - x)(2\tau - y))U_{yy}(x, y) = (A_{xy} + A_{yx})U(x, y), \quad (1)$$

где оператор $A_{xy} \equiv (H(2\tau - x)R_x^\tau H(x) + H(x)R_x^{-\tau} H(2\tau - x))(H((2\tau - x)(y - \tau))R_y^\tau + H(y(\tau - y))R_y^{-\tau} + H(y(y - 2\tau))R_y^{2(y-\tau)})$; $0 < \tau \equiv \operatorname{const}$; $H(\xi)$ – функция Хевисайда; $R_t^{\Theta(x,y)}$ – оператор сдвига по t : $R_t^{\Theta(x,y)}q(t) = q(t - \Theta(x, y))$; рассматривается в области

$$D = \bigcup_{k=1}^4 D_k \bigcup I_1 \bigcup I_2,$$

когда $D_1 = \bigcup_{n=1}^3 D_1^n$, причём $D_1^1 = \{(x, y) : 0 < x < \tau, 0 < y < \tau\}$ и $D_1^2 = \{(x, y) : -y < x < y + \tau, -\tau/2 < y < 0\}$, $D_1^3 = \{(x, y) : -\tau/2 < x < 0, -x < y < x + \tau\}$ – подобласти эллиптичности и гиперболичности области D_1 ; D_2 – отображение D_1 относительно $y = \tau$; $D_3 \cup D_4$ – отображение $D_1 \cup D_2$ относительно $x = \tau$; $I_1 = \{(x, y) : 0 < x < 2\tau, y = \tau\}$, $I_2 = \{(x, y) : x = \tau, 0 < y < 2\tau\}$.

Для уравнения (1) в области D поставлена задача Трикоми (задача Т).

Теорема единственности регулярного решения задачи Т для уравнения (1) в области D доказана методом Трикоми при ограничениях на величину отклонения $\tau \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ аргументов x и y .

Редукция уравнения (1) к системе уравнений смешанного типа

$$L\bar{\bar{U}}_n(x, y) = \alpha_n B\bar{\bar{U}}_n(x, y), \quad (x, y) \in D_1^n \quad (n = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где $L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \operatorname{sgn}(xy)\frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\bar{\bar{U}}_n(x, y)$ – вектор-функции в областях эллиптичности и гиперболичности области D_1 ;

$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \alpha_3 = 1$; $B = \begin{pmatrix} Q & C \\ C & Q \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q$ – нуль-матрица

(2×2) ; сводит построение классического решения задачи Т в области D для уравнения (1) с опережающе-запаздывающими аргументами и замкнутой линией вырождения ($x = 0, x = 2\tau, 0 \leq y \leq 2\tau$ и $y = 0, y = 2\tau, 0 \leq x \leq 2\tau$) к построению классического решения задачи Т в области D_1 системы (2) без отклонения аргументов с двумя перпендикулярными линиями ($x = 0, 0 \leq y \leq \tau; y = 0, 0 \leq x \leq \tau$) вырождения.

Доказательство существования решения задачи Т области D_1 для системы (2) связано с разрешимостью системы разностных уравнений

$$\begin{aligned} (1 + iR_x^{2i\tau})(\nu_j(x) + \int_0^x \nu_j(t) \frac{\partial}{\partial x} I_0(i\sqrt{t(x-t)}) dt) = \\ = \gamma_j(x, \nu_k(x)), \quad 0 < x < \tau \quad (j, k = 1, 2; j \neq k), \end{aligned}$$

где $I_0(s)$ – модифицированная функция Бесселя порядка ноль; $i = \sqrt{-1}$; $\nu_1(x) = U_y(x, 0), \nu_2(y) = U_x(0, y)$.

**О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН**

Захаров Евгений Владимирович¹

Рыжаков Глеб Владимирович²

Сетуха Алексей Викторович³

1: *д.ф – м. н., профессор, факультет ВМК МГУ имени
М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

2: *к.ф – м. н., Сколковский институт науки и технологий
(Сколтех), Москва, Россия*

3: *д.ф – м. н., профессор, НИВЦ МГУ имени М. В. Ломоносова,
Москва, Россия*

*E-mail: zspec@smc.msu.ru, gryzhakov@mail.ru,
setuhaav@rambler.ru*

Рассматривается трехмерная задача дифракции монохроматического электромагнитного поля на теле или системе тел, каждое из которых может быть телесным и ограниченным замкнутой поверхностью, или представлять собой тонкую поверхность (экран). Поверхности тел предполагаются идеально проводящими, окружающая среда однородной. Предположим, что поверхности тел образуют заданную суммарную поверхность Σ и пусть Ω есть область вне суммарной поверхности Σ .

Применен подход, основанный на сведении задачи к граничному интегральному уравнению 1-го рода с сильно-сингулярным интегралом, который одинаково применим как к задачам дифракции волн на тонких экранах, так и к задачам на объектах, ограниченных замкнутыми поверхностями. Использована численная схема решения такого интегрального уравнения, основанная на методах кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокации, с раскрытием особенности в интеграле в смысле конечного значения по Адамару.

Пусть первичное поле описывается напряжённостями электрического и магнитного полей $\vec{E}^0(x)e^{-i\omega t}$, $\vec{H}^0(x)e^{-i\omega t}$, $x \in \mathbb{R}^3$. Задача состоит в нахождении напряжённостей вторичных электрического и магнитного полей, которые ищутся в виде $\vec{E}(x)e^{-i\omega t}$, $\vec{H}(x)e^{-i\omega t}$, $x \in \Omega$ и должны удовлетворять уравнениям Максвелла, условию Майкснера на ребре и условию излучения Зоммерфельда на бесконечности [1,2]. На поверхности Σ ставится условие равенства нулю краевых значений касательной компоненты суммарного электрического поля. При таких условиях задача имеет единственное решение [1,2].

Вторичное электрическое поле ищется в виде векторного потенциала [1]

$$\vec{E}(x) = \int_{\Sigma} \vec{K}(\vec{j}(y), x, y) d\sigma_y, \quad \vec{K}(\vec{j}, x, y) = \text{grad}_x \text{div}_x \left(\vec{j} F(x-y) \right) + k^2 \vec{j} F(x-y),$$

где $F(x-y) = e^{ikR}/R$, $R = |x-y|$, — функция Грина (фундаментальное решение) скалярного уравнения Гельмгольца, k — волновое число, $\vec{j}(y)$ — неизвестное векторное поле на поверхности Σ (с точностью до постоянного коэффициента $\vec{j}(y)$ есть плотность токов, наведённых на поверхности Σ).

Неизвестная функция \vec{j} должна быть решением интегрального уравнения с интегралом, понимаемым в смысле конечного значения по Адамару:

$$\int_{\Sigma} \vec{n}(x) \times \vec{K}(\vec{j}(y), x, y) d\sigma_y = \vec{f}(x), \quad \vec{f}(x) = -\vec{E}^0 \times \vec{n},$$

где $\vec{n} = \vec{n}(x)$, $x \in \Sigma$ — орт вектора нормали к поверхности Σ , ” \times ” — векторное произведение.

Для численного решения интегрального уравнения осуществляется разбиение $T = \{\sigma_i, x^i, \vec{n}_i\}_{i=1, \dots, n}$ поверхности Σ на n ячеек, с выбранными на них точками коллокации $x^i \in \sigma_i$ и ортами нормали $\vec{n}_i = \vec{n}(x^i)$. Пусть \vec{j}_i — приближенное значение неизвестной функции в точке коллокации x^i для $i = 1, \dots, n$, причем, векторы \vec{j}_i ищутся ортогональными к векторам \vec{n}_i .

Ядро интегрального уравнения представляется в виде $\vec{K} = \vec{K}_0 + \vec{K}_1$, где $\vec{K}_0(\vec{j}, x, y) = (-\vec{j} + 3\vec{r}(\vec{r}, \vec{j}))/R^3$, $\vec{r} = x - y$, $R = |\vec{r}|$, \vec{K}_1 — регулярная часть, подчиненная оценке $|\vec{K}_1(\vec{j}, x, y)| \leq |\vec{j}|O(1/R)$ при $R \rightarrow 0$.

Записывая для приближенного поля $\vec{E}(x)$ граничное условие в точках коллокации, получаем систему операторных уравнений:

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} \vec{j}_k = \vec{f}(x^i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

A_{ik} — линейный оператор, который вектору \vec{J} , ставит в соответствие вектор

$$A_{ik} \vec{J} = \vec{E}_k(\vec{J}, x^i) \times \vec{n}_i, \quad \vec{E}_k = \vec{E}_k^0 + \vec{E}_k^1, \quad \vec{E}_k^m(\vec{J}, x) = \int_{\sigma_k} \vec{K}_m(\vec{J}, x, y) d\sigma_y,$$

$k = 1, \dots, n$, $m = 1, 2$. При этом для интеграла в выражении для вектора \vec{E}_k^0 удалось получить приближенное аналитическое выражение, а интеграл для вектора \vec{E}_k^1 аппроксимируется формулой $\vec{E}_k^1(\vec{J}, x) \approx K_1(\vec{J}, x, x^k) \int_{\sigma_k} d\sigma_y$, в которой интеграл также можно приближенно вычислить аналитически, если ячейка аппроксимируется системой треугольников.

Ведением на каждой ячейке локального ортогонального базиса в плоскости, ортогональной вектору \vec{n}_i , систему операторных уравнений (1) можно переписать в виде системы из $2n$ скалярных линейных уравнений.

Метод протестирован при решении ряда модельных задач, для которых получено хорошее согласование найденных характеристик поля в дальней зоне с известными теоретическими и экспериментальными данными.

Список литературы

1. Хёнл Х., Мауэ А., Веспфаль К. Теория дифракции (пер. с немецкого). М.: Мир, 1964.
2. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния: пер. с англ. М.: Мир, 1987.

**О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ДЛЯ ПОГЛОЩАЮЩИХ СРЕД**

Ильинский Анатолий Серафимович¹
Смирнов Юрий Геннадьевич²

1: *д.ф.м. н., профессор, факультет ВМК МГУ имени
М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

2: *д.ф.м. н., профессор, Пензенский государственный университет,
Пенза, Россия*

E-mail: seld@cs.msu.ru, smirnovyug@mail.ru

Наиболее естественный подход к решению задачи дифракции электромагнитного поля на идеально проводящем тонком ограниченном экране – сведение ее к решению интегрального уравнения электрического поля на экране [1]. Мы рассмотрим только случай плоского прямоугольного экрана.

В работе [2] было показано, что в случае поглощающей среды интегральное уравнение электрического поля будет эллиптическим и справедлива теорема о сходимости метода Галеркина для базисных функций, удовлетворяющим условию аппроксимации в соответствующем пространстве.

Пусть $\Omega := \{(x_1, x_2, x_3) : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, x_3 = 0\} \subset \mathbf{R}^2$. Рассмотрим интегродифференциальное уравнение

$$\operatorname{grad} A(\operatorname{div} u) + k^2 Au = f, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где $Au = \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y) dy$, $u = u(x) = (u_1, u_2)^T$ – поверхностный ток, $k \neq 0$ – волновое число пространства $x = (x_1, x_2)$, а div и grad – операции поверхностной (двумерной) дивергенции и градиента [1]. Предположим, что $\operatorname{Im} k > 0$. Будем считать, что $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Это условие выполняется, если источники электромагнитного поля не лежат на поверхности экрана.

Определим гильбертово пространство $W = W(\bar{\Omega})$ как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_W$,

$$\|u\|_W^2 = \int \langle \xi \rangle^{-1} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int \langle \xi \rangle^{-1} |\xi \cdot \widehat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Здесь через \widehat{u} обозначено преобразование Фурье распределения u .

В качестве приложения результатов [2] докажем сходимость метода Галеркина с базисными и тестовыми функциями “roof-top”.

Выберем в прямоугольнике Ω равномерную прямоугольную сетку с шагами h_1 и h_2 по осям x и y с узлами $M_{ij} = (x_i, y_j)$, $x_i = ih_1$, $y_j = jh_2$ ($i = 0, \dots, N_1$, $j = 0, \dots, N_2$), $h_1 = a/N_1$, $h_2 = b/N_2$.

Функции “rooftop” ассоциированы с ребрами (“реберные функции”) – каждому ребру отвечает одна функция, которая отлична от нуля только в двух прямоугольниках, имеющих это ребро своей стороной. Пусть прямоугольники Π_j^+ и Π_j^- имеют общую сторону – ребро с номером j , а $(x_1^{(j)}, y_1^{(j)})$ и $(x_2^{(j)}, y_2^{(j)})$ – координаты его вершин. Базисную функцию $\varphi_j(x, y)$, отвечающую ребру j , определим по правилу:

$$\text{при } x_1^{(j)} = x_2^{(j)} \quad \varphi_j(x, y) = \frac{1}{2h_1} \begin{cases} (x - x_1^{(j)} + h_1, 0), & (x, y) \in \Pi_j^+, \\ (x_2^{(j)} + h_1 - x, 0), & (x, y) \in \Pi_j^-, \end{cases}$$

$$\text{при } y_1^{(j)} = y_2^{(j)} \quad \varphi_j(x, y) = \frac{1}{2h_2} \begin{cases} (0, y - y_1^{(j)} + h_2), & (x, y) \in \Pi_j^+, \\ (0, y_2^{(j)} + h_2 - y), & (x, y) \in \Pi_j^-, \end{cases}$$

и $\varphi_j \equiv 0$ вне Π_j^+, Π_j^- .

Имеет место аппроксимация элементов $\varphi \in W$ базисными функциями φ_j . Рассмотрим конечномерное подпространство $X_n = \text{span} \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, являющееся линейной оболочкой базисных функций $\varphi_j \quad j = 1, \dots, n$, где n – количество внутренних ребер сетки. Нетрудно проверить, что $\varphi_j \in W(\Omega)$, $X_n \subset W$. Имеет место следующий результат.

Теорема 1. Пусть $h_1/h_2 \leq M$ и $h_2/h_1 \leq M$ для некоторого M . Тогда метод Галеркина

$$-(A \text{div } \varphi_n, \text{div } g) + k^2(A\varphi_n, g) = (f, g), \quad \varphi_n \in X_n, \forall g \in X_n,$$

для уравнения электрического поля (1) сходится с выбором базисных функций “rooftop” и справедлива квазиоптимальная оценка скорости сходимости $\|u - u_n\|_W \leq C_0 \inf_{\psi \in X_n} \|\psi - u\|_W$, где u, u_n – точное и приближенные решения, а константа C_0 не зависит от h_1 и h_2 .

Кроме того, результат о сходимости остается справедливым для любого плоского ограниченного экрана, построенного на прямоугольной сетке.

Для решения задач дифракции на плоских экранах сложной формы можно применять субиерархические алгоритмы [3].

Список литературы

1. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: ИПРЖР, 1996.
2. Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г. Эллиптичность интегрального уравнения электрического поля для поглощающих сред и сходимость метода Рао – Уилтона – Глиссона // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 1. С. 105–113.

3. Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г. Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм для решения задач дифракции электромагнитных волн на плоских экранах // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53, № 4. С. 441–446.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОФТАЛЬМОЛОГИИ

**Ирошников Никита Георгиевич, Ларичев Андрей Викторович,
Николаев Илья Петрович¹**

Разгулин Александр Витальевич, Старостин Александр Сергеевич²

1: к.ф – м. н., доцент; к.ф – м. н., доцент; к.ф – м. н., доцент,
физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

2: д.ф – м. н., профессор; студент, факультет ВМК МГУ имени
М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: razgulin@cs.msu.su, larichev@optics.ru

Одной из основных задач офтальмологии является неинвазивная диагностика живых структур глаза человека. Для такой диагностики обычно используется серия изображений соответствующего отдела глаза (например, глазного дна), которые в силу ряда причин являются неидеальными. Несовершенство оптической системы человеческого глаза не позволяет получать изображения с высокой разрешающей способностью, необходимой для ранней диагностики различных заболеваний. Исследование отделов глаза накладывает существенные ограничения на интенсивность зондирующего излучения, что заставляет работать с изображениями, для которых отношение сигнал/шум ненамного превышает единицу. Кроме того, к специфике оптической системы глаза человека следует отнести некогерентное освещение, наличие зрачка, а также присутствие фазовых искажений, вызванных динамическими аберрациями. В этой связи актуальна разработка методов анализа изображений, нацеленных на работу в описанных условиях.

Рассматриваемая задача формулируется в виде интегрального уравнения 1 рода типа свертки с передаточной функцией, которая отражает отмеченные выше специфические особенности оптической системы глаза человека. В качестве исходных данных используется набор распределений интенсивности, который является результатом регистрации последовательной серии зашумленных изображений. В этой ситуации, во много аналогичной постановкам задач восстановления астрономических изображений, хорошо зарекомендовал себя подход, основанный на использовании корреляционных функций третьего порядка и биспектров [1] в сочетании с методом регуляризации А.Н. Тихонова для борьбы с артефактами [2]. В данной работе представлены результаты применения регуляризованного биспектрального метода к восстановлению изображений в условиях типичных аберраций оптической системы глаза человека.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-02-00677.

Список литературы

1. Bartelt H., Lohmann A. W., and Wirnitzer B. Phase and amplitude recovery from bispectra // *Applied Optics*. 1984. Vol. 23. P. 3121-3129.
2. Iroshnikov N., Larichev A., Potyagalova A., Razgulin A. Tikhonov-regularized bispectral variational method for optical signal reconstruction // *Computational Mathematics and Modeling*. 2013. Vol. 24, № 4. P. 505-516.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ НАВЬЕ-СТОКСА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Кальменов Тынысбек Шарипович

академик НАН РК, профессор

E-mail: kalmenov.t@mail.ru

Институт математики и математического моделирования, Алматы,
Казахстан

В полосе $\mathbf{R}_{0T}^n = \{x \in \mathbf{R}^n, 0 < t < T\}$ рассмотрим задачу Навье-Стокса:
Найти решение системы уравнений

$$\mathbf{L}u_i = \diamond u_i + \tilde{u}_i = \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i, \quad (1)$$

$$\mathbf{div} u = 0, \quad (2)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u_i|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Здесь использованы обозначения

$$\tilde{u}_i = \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (4)$$

$$\diamond u_i = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) u_i. \quad (5)$$

В виду теоретической и прикладной значимости проблеме Навье-Стокса посвящены многочисленные работы. Среди них отметим работу О.А. Ладыженской [1], где приведены основные результаты по данной проблеме.

Лемма 1. Оператор Q , определенный равенством

$$(Qg)(x, t) = \frac{1}{\sigma_n} \mathbf{grad} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\mathbf{div} g(\xi, t)}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi, \quad (6)$$

где $g = (g_1, \dots, g_n)$, является проектором, т.е. $Q^2 = Q$.

Лемма 2. Задача (1)-(3) эквивалентна системе интегро - дифференциальных уравнений

$$\mathbf{L}u_i = \diamond u_i + ((E - Q)\tilde{u})_i = ((E - Q)f)_i \quad (7)$$

с начальным условием

$$u_i|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

Имеет место:

Теорема. Пусть $f_i(x, t) = t^\gamma \tilde{f}_i(x, t)$, где $\tilde{f}_i \in L_p(\mathbf{R}_{0T}^n)$, $\|\tilde{f}_i\|_{L_p(\mathbf{R}_{0T}^n)} \leq r$, $p > 1$. Тогда существует такое фиксированное положительное число $\bar{\gamma}$, зависящее от r , что при $\gamma \geq \bar{\gamma}(r)$ существует единственное решение $u_i \in W_p^{2,1}(\mathbf{R}_{0T}^n)$ задачи (7)-(8), удовлетворяющее неравенству

$$\|u_i\|_{W_p^{2,1}(\mathbf{R}_{0T}^n)} \leq C \sum_{k=1}^n \|\tilde{f}_k\|_{L_p(\mathbf{R}_{0T}^n)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Список литературы

1. Ладыженская О. А. Шестая проблема тысячелетия: Уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость // Успехи математических наук. 2003. Т. 58, № 2.

**ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОДНОВРЕМЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУХ
КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ**

Камынин Виталий Леонидович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: vlkamynin2008@yandex.ru

*Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
Москва, Россия*

В докладе рассматриваются обратные задачи для параболического уравнения на плоскости

$$u_t - a(t, x)u_{xx} + b(t, x)u_x + d(t, x)u = f(t)g(t, x), (t, x) \in [0, T] \times [-l, l].$$

В первой обратной задаче мы ищем три неизвестные функции $\{u(t, x), b(t, x) \equiv b(t), f(t)\}$ при условии задания краевых условий первого рода и двух дополнительных условий

$$\int_{-l}^l u(t, x)\omega(x)dx = \varphi(t), \int_{-l}^l u_x(t, x)\omega(x)dx = \psi(t).$$

Во второй обратной задаче мы ищем три неизвестные функции $\{u(t, x), d(t, x) \equiv d(t), f(t)\}$ также при условии задания краевых условий первого рода и двух дополнительных условий

$$\int_{-l}^l u(t, x)\omega(x)dx = \varphi(t), \int_{-l}^l u(t, x)\chi(x)dx = \psi(t).$$

Ранее обратные задачи такого рода не рассматривались.

Доказаны теоремы существования и единственности решения данных обратных задач.

Для каждой из рассматриваемых обратных задач мы также получаем оценки максимумов модулей неизвестной правой части и неизвестного коэффициента уравнения с константами явно выписываемыми через входные данные обратных задач.

Кроме того приводятся нетривиальные примеры обратных задач, к которым применимы доказанные теоремы существования и единственности.

Часть результатов доклада опубликована в [1].

Список литературы

1. Камынин В. Л. Обратная задача одновременного определения правой части и коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении на плоскости // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50.

**О КРАТНЫХ КОРНЯХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ
РЕШЕНИИ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ГРАНИЧНОМ
УСЛОВИИ**

Капустин Николай Юрьевич

д.ф.м. н., доцент

E-mail: n.kapustin@bk.ru

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В работе [1] рассмотрена задача

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

$$(a - \lambda)X'(0) + b\lambda X(0) = 0, \quad X'(1) = 0, \quad (2)$$

со спектральным параметром в граничном условии. Физические параметры a и b предполагаются положительными. Эта задача имеет только собственные функции

$$X_n(x) = \sqrt{2} \sin \sqrt{\lambda_n}(1 - x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

с положительными собственными числами – корнями характеристического уравнения

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} = \frac{(a - \lambda)}{b\sqrt{\lambda}}. \quad (3)$$

Присвоим нулевой индекс любой, наперед выбранной функции, а все остальные занумеруем в порядке возрастания. В упомянутой работе [1] доказано, что система $\{X_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ образует базис в пространстве $L_p(0, 1)$, $p > 1$, а при $p = 2$ даже базис Рисса.

Все корни уравнения (3) простые при положительных значениях параметров a и b . Проанализируем это уравнение при произвольных значениях этих параметров, вообще говоря и комплексных. Обозначив $z = \sqrt{\lambda}$, перепишем уравнение (3) в виде

$$zb \sin z = (a - z^2) \cos z \quad (4)$$

и продифференцируем его. Получим равенство

$$z \sin z + bz \cos z = -2z \cos z - (a - z^2) \cos z. \quad (5)$$

Умножив соотношение (4) на $\sin z$, а соотношение (5) на $\cos z$, и сложив, будем иметь уравнение для кратных корней

$$bz + b \sin z \cos z + 2z \cos^2 z = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = bx + b \sin x \cos x + 2x \cos^2 x.$$

Принимая во внимание значения: $f(\pi/4) = b\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4}$ и $f(\pi/2) = b\frac{\pi}{2}$ убеждаемся в том, что, например, при $b = -1/2$ между точками $x = \pi/4$ и $x = \pi/2$ есть значение x_0 , для которого $f(x_0) = 0$. С положительным параметром $a = x_0^2 - x_0 \operatorname{tg} x_0/2$ и отрицательным параметром $b = -1/2$ получаем задачу (1)-(2) с кратным корнем характеристического уравнения даже при действительных значениях параметров граничного условия (2).

Пусть в общем случае выполнены условия: $\pi/2 < \operatorname{arg} \sqrt{\lambda_n} \leq \pi/2$, где собственные числа λ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, являются занумерованными в порядке возрастания их абсолютных величин корнями уравнения (3). Справедлива

Теорема 1. *Если $a \notin \{z^2 + bz \operatorname{tg} z\}$, где $\{z\}$ – множество (комплексных) корней уравнения (6), то система $\{X_n(x)\}$, $n = 0, 1, \dots, m-1, m+1, \dots$, собственных функций задачи (1)-(2) без любой собственной функции является базисом в пространстве $L_p(0, 1)$, $p > 1$ (базисом Рисса при $p = 2$).*

Список литературы

1. Моисеев Е. И., Капустин Н. Ю. О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357 – 1360.

**ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА**

Кожанов Александр Иванович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: kozhanov@math.nsc.ru

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия*

Доклад посвящен изложению результатов о разрешимости задачи сопряжения (обобщенной задачи дифракции) для неклассических дифференциальных уравнений вида

$$L_p u \equiv (-1)^{p+1} D_t^{2p} u - h(x) u_{xx} + c(x, t) u = f(x, t) \quad (1)$$

(здесь $p > 0$ — целое число, $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$). Рассматриваются случаи

1) $h(x)$ — положительная непрерывная всюду, за исключением, быть может, одной точки функция;

2) $h(x)$ — знакопеременная с одной точкой смены знака, имеющая, быть может, в этой точке разрыв первого рода функция.

Помимо задачи сопряжения для уравнения (1) изучаются также задачи сопряжения для уравнений составного типа

$$M u \equiv (-1)^{p+1} D_t^{2p} (u - g(x) u_{xx}) - h(x) u_{xx} + c(x, t) u = f(x, t)$$

с положительной функцией $g(x)$, имеющей, быть может, одну точку разрыва первого рода, для уравнений, имеющих в разных подобластях разный порядок по переменной t для некоторых других уравнений.

Для всех рассматриваемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений (т. е. решений, имеющих суммируемые с квадратом по соответствующим подобластям все входящие в уравнение производные).

**О ПОСТАНОВКЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И ИХ КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ**

**Козловская Инесса Станиславовна, Корзюк Виктор Иванович,
Мандрик Александр Анатольевич**

к.ф – м. н., доцент; чл. – корр. НАН Беларуси, профессор

E-mail: kozlovskaja@bsu.by, korzyuk@bsu.by

ФПМИ Белгосуниверситета, Минск, Беларусь

Доклад посвящен гиперболическим уравнениям с частными производными вида

$$\prod_{k=1}^m (\partial_t - a^{(k)} \partial_x + b^{(k)}) u(t, x) = f(t, x) \quad (1)$$

в случае двух независимых переменных t и x . Здесь рассматриваются как строго гиперболические уравнения, так и нестрого гиперболические уравнения. Интерес представляют классические решения и, в первую очередь, в аналитическом виде. Это позволяет правильно сделать постановку той или иной задачи для такого вида уравнений.

Нахождение классических решений задач всегда было актуальным для теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это важно и для численных методов решения граничных задач, так как они во многих случаях основаны на классических решениях. Заметим, что классические решения определяются не только правильным выбором вида граничных условий для дифференциальных уравнений с частными производными, но и условиями согласования для функций, входящих в условия и уравнения. Строятся в аналитическом виде классические решения смешанных задач для гиперболических уравнений третьего порядка.

Отметим, что строгая постановка граничных задач с плохими условиями согласования сводится к дополнительным условиям сопряжения на соответствующих характеристиках.

В [1] рассмотрены классические решения задачи Коши в полуплоскости, в том числе, для всех уравнений третьего порядка вида (1). Изучение задачи Коши представляет не только самостоятельный интерес, но с нее, как правило, начинается построение аналитических решений смешанных и других задач для такого рода уравнений.

Для некоторых уравнений третьего порядка в аналитическом виде построены классические решения граничных задач как для строго гиперболических уравнений вида(1), так и для нестрого гиперболических.

Список литературы

1. Корзюк В. И. Мандрик А. А. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с волновым оператором. // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 4. С. 492 – 504.
2. Korzyuk V.I., Kozlouskaya I.S., Kozlov A.I. 5. Cauchy Problem in Half-Plane for Hyperbolic Equation with Constant Coefficients. Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2012. Cambridge Scientific Publishers. 2013. P.45-71.

**КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ
ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ**

**Козловская Инесса Станиславовна, Корзюк Виктор Иванович¹
Моисеев Евгений Иванович²**

1: к.ф. – м. н., доцент; чл. – корр. НАН Беларуси, профессор, ФПМИ
Белгосуниверситета, Минск, Беларусь

2: академик РАН, профессор, факультет ВМК МГУ имени
М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: kozlovskaja@bsu.by, korzyuk@bsu.by,
moiseev@cs.msu.su

При математическом моделировании процессов из физики и других областей естествознания возникают задачи, в которых в интегральном виде задаются значения искомой функции. Таким нелокальным задачам посвящена уже достаточно многочисленная литература. Однако в большинстве эти задачи рассмотрены в обобщенной постановке. Большой интерес, исходя из практического использования, представляют классические решения. Оказывается, что метод отыскания классических решений, предложенный в случае граничных задач для гиперболических уравнений [1–5], можно использовать и для нелокальных задач с интегральными условиями. Этот подход продемонстрирован для простейшей задачи для одномерного волнового уравнения при наличии интегрального условия. Он может быть использован для более общих гиперболических уравнений и задач для них с более общими интегральными условиями без существенных изменений, учитывая конкретную постановку.

Следует отметить работы [2, 6, 7], в которых определены решения этим методом при наличии интегральных граничных условий. Однако присутствие в этих условиях особенностей не позволяет найти классические решения во всей области задания искомых функций.

В замыкании $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$ области $Q = (0, \infty) \times (0, l)$ двух независимых переменных $(t, x) \in \bar{Q} \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим волновое уравнение

$$(\partial_{tt} - a^2 \partial_{xx}) u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \bar{Q}, \quad (1)$$

где a^2, l – положительные действительные числа, $(0, l) \subset [0, l]$, $(0, \infty) \subset [0, \infty)$, $\partial_{tt} = \partial^2 / \partial t^2$, $\partial_{xx} = \partial^2 / \partial x^2$ – частные производные по t и x второго порядка. К уравнению (1) на нижнем основании $\Omega^{(0)} = \{(t, x) \in \bar{Q} \mid t = 0\}$ полуполосы \bar{Q} присоединяются условия Коши

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

граничное условие на боковой линии $\Gamma = \{(t, x) \in \bar{Q}, x = 0\}$

$$u(t, 0) = \mu(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (3)$$

и интегральное условие

$$\int_0^l u(t, x) dx = s(t), \quad t \in [0, l]. \quad (4)$$

Здесь $f : \bar{Q} \ni (t, x) \rightarrow f(t, x)$ – заданная функция на \bar{Q} , $\varphi : [0, l] \ni x \rightarrow \varphi(x) \in \mathbb{R}$, $\psi : [0, l] \ni x \rightarrow \psi(x) \in \mathbb{R}$ – функции на $[0, l]$, $\mu : [0, \infty) \ni t \rightarrow \mu(t) \in \mathbb{R}$, $s : [0, \infty) \ni t \rightarrow s(t) \in \mathbb{R}$ – заданные функции на $[0, \infty)$.

Функции f , φ , ψ , μ , s удовлетворяют следующим условиям согласования:

$$\int_0^l \varphi(x) dx - s(0) = 0,$$

$$\mu(0) - \varphi(0) = \delta^{(1)}, \quad \frac{1}{a} (\psi(0) - \mu'(0)) = \delta^{(2)}, \quad \frac{1}{a^2} (\mu''(0) - \varphi''(0) - f(0, 0)) = \delta^{(3)},$$

$$\varphi(0) - \frac{1}{a} \int_0^l \psi(x) dx - \mu(0) + \frac{1}{a} s'(0) = \sigma^{(1)}$$

$$\varphi'(0) - \varphi'(l) + \frac{1}{a} \psi(0) + \frac{1}{a^2} s''(0) - \frac{1}{a} \mu'(0) - \frac{1}{a^2} \int_0^l f(0, x) dx = \sigma^{(2)},$$

$$\varphi''(0) + \frac{1}{a} \psi'(0) - \frac{1}{a} \psi'(l) - \frac{1}{a^2} \mu''(0) + \frac{1}{a^3} s'''(0) + \frac{1}{a^2} f(0, 0) -$$

$$- \frac{1}{a^3} \int_0^l \partial_t f(0, x) dx - \frac{1}{a^2} \int_0^l \partial_x f(0, x) dx = \sigma^{(3)}.$$

Список литературы

1. Корзюк В.И., Козловская И.С. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 5. – С.700-709.
2. Корзюк В.И., Ерофеев В.Т., Пулко Ю.В. Классическое решение начально-краевой задачи для волнового уравнения с интегральным по времени граничным условием // Доклады НАН Беларуси. 2009. Т.82, №5. С. 36-41.

3. Корзюк В. И., Козловская И. С. Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в заданный момент времени. I // Труды Института математики. 2010. Т.18, №2. С. 22-35.
4. Корзюк В. И., Козловская И. С. Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в заданный момент времени. II // Труды Института математики. 2011. Т.19, №1. С. 62-70.
5. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Kovnatskaya O. A. Classical solution of problem of control boundary conditions in case of the first mixed problem for one-dimensional wave equation. Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Mathematical physics and modeling in economics, finance and education. Wydawnictwo WSFiZ. Siedlce. 2011. P. 68-78.
6. Korzyuk V. I., Erofeenko. V. T., Sheika J. V. Classical Solution for Initial Boundary-Value Problem for Wave Equation with Integral Boundary Condition. Mathematical Modelling and Analysis. Volume 17, №3. 2012. P.309-329.
7. Корзюк В. И., Козловская И. С., Шейко Ю. В. Решение начально-краевой задачи для волнового уравнения с дробными производными в граничных условиях. Материалы 6-ой Международной конференции, посвященной памяти профессора А.А.Килбаса. Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. AMADE-2011. Минск. Издательский центр БГУ. С.97-108.

**РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА
КАДОМЦЕВА-ПЕТВИАШВИЛИ И ЗАХАРОВА-КУЗНЕЦОВА**

**Корпусов Максим Олегович, Свешников Алексей Георгиевич,
Юшков Егор Владиславович**

д.ф – м. н., профессор; д.ф – м. н., профессор; к.ф – м. н., н. с.

E-mail: korpusov@gmail.com, yushkov.msu@mail.ru

Физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Хорошо известно какую роль в приложениях математической физики играет уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Не так давно для этого уравнения С. И. Похожаевым были получены достаточные условия разрушения решения на конечном промежутке времени. При этом были рассмотрены как классические, так и слабые решения соответствующих начально-краевых задач. Для исследования феномена разрушения использовался оригинальный метод нелинейной емкости, впервые предложенный в работе Э. Митидиери и С.И. Похожаева в 2001 году.

С другой стороны, не менее используемыми в физических приложениях являются многомерные обобщения уравнения Кортевега-де Фриза: уравнение Кадомцева-Петвиашвили

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x = \pm \Delta_y u \quad \Delta_y \equiv \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial y_{N-1}^2}, \quad N \geq 2$$

и его сильно диссипативный вариант:

$$(u_t + uu_x - u_{xxxx})_x = \pm \Delta_y u;$$

уравнение Захарова-Кузнецова:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + \Delta_y u_x = 0;$$

уравнение Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова:

$$(u_t - uu_x - u_{xx})_x = \Delta_y u;$$

уравнение Хохлова-Заболоцкой:

$$(u_x - uu_\tau)_\tau = \Delta_y u, \quad \tau = t - x;$$

родственное ему уравнение Линя-Рейснера-Цзяня:

$$(u_t + (K_\infty + u)u_x)_x = \Delta_y u$$

и, наконец, уравнение Островского:

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x = u.$$

Этот список, объединенный общей нелинейностью, может быть дополнен родственным уравнением Кадомцева-Петвиашвили-Бенджамена-Бона-Махони:

$$(u_t + uu_x \pm u_{xxt})_x = \pm \Delta_y u.$$

В настоящей работе исследован феномен разрушения решений уравнений типа Кадомцева-Петвиашвили и Захарова-Кузнецова, на примере, трех начально-краевых задачах: в слое $(x, y) \in (0, L) \times \mathbb{R}^{N-1}$, в полупространстве $x > 0$, $y \in \mathbb{R}^{N-1}$ и во всем пространстве $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$ при $t > 0$ и при $N \geq 2$. Во всех случаях методом нелинейной емкости удастся получить достаточные условия разрушения за конечное время и оценки на время разрушения сверху, а также показать влияние начальных и граничных условий на скорость разрушения.

Как наиболее простой пример результатов, полученных в работе, можно привести следующий:

Теорема. *Предположим, что начальные данные $u_0(x, y)$ удовлетворяют следующему условию*

$$F(0) > \frac{a}{k},$$

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^4 \varphi(y) \left(u(x, y, t) - \frac{4!}{(L-x)^2} \right) dx dy,$$

тогда классическое решение задачи

$$(u_t - uu_x + u_{xxx})_x = \sigma \Delta_y u, \quad t > 0, \quad x \in (0, L), \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad L > 0, \quad \sigma = \pm 1,$$

$$u(x, y, t=0) = u_0(x, y), \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = u_{xxx}|_{x=0} = 0,$$

не существует глобально во времени. Более того, имеет место оценка снизу

$$F(t) \geq \frac{a}{k} \frac{1 + c_0 e^{2akt}}{1 - c_0 e^{2akt}}, \quad c_0 = \frac{kF_0 - a}{kF_0 + a},$$

следовательно,

$$\lim_{t \uparrow T_\infty} F(t) = +\infty, \quad t \leq T_\infty \leq -\frac{1}{2ak} \ln \left(\frac{kF_0 - a}{kF_0 + a} \right),$$

$$\text{где } a^2 = 6!L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varphi(y) dy + \frac{L^9}{405} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \varphi|^2}{\varphi} dy, \quad k^2 = \frac{25}{4L^5} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varphi(y) dy \right|^{-1}.$$

Важно, что используемый метод позволяет получать результаты о разрушении и для ненулевых граничных условий, и для условий разного типа. При этом, нельзя не отметить, что в некоторых случаях результат о разрушении можно дополнить результатом о локальной во времени разрешимости, доказываемым методом сжимающих отображений.

Список литературы

1. Pokhozhaev S. I. On the nonexistence of global solutions for some initial-boundary value problems for the Korteweg–de Vries equation // *Differ. Equ.*, 47:4 (2011), 488–493.
2. Pokhozhaev S. I. Weighted Identities for the Solutions of Generalized Korteweg–de Vries Equations // *Math. Notes*, 89:3 (2011), 382–396.
3. Похожаев С. И. Об отсутствии глобальных решений уравнения Кортевега–де Фриза // *Уравнения в частных производных, СМФН*, 39, РУДН, М., 2011, 141–150.
4. Митидиери Э., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных. Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН. 2001, 234.
5. Корпусов М. О., Свешников А. Г., Юшков Е. В. Разрушение решений нелинейных уравнений типа Кадомцева–Петвиашвили и Захарова–Кузнецова // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014 (в печати).
6. Korpusov M. O., Yushkov E. V. Local solvability and blow-up for Benjamin-Bona-Mahony-Burgers, Rosenau-Burgers and Korteweg-de Vries-Benjamin-Bona-Mahony equations // *Electron. J. Diff. Equ.*, Vol. 2014 (2014), No. 69, pp. 1-16.

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С НЕКЛАССИЧЕСКОЙ АСИМПТОТИКОЙ СПЕКТРА

Макин Александр Сергеевич

д.ф - м. н., профессор

E-mail: alexmakin@yandex.ru

Московский государственный университет приборостроения и информатики, Москва, Россия

Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля

$$u'' - q(x)u + \lambda u = 0 \quad (1)$$

с вырожденными [1] краевыми условиями

$$u'(0) + du'(\pi) = 0, \quad u(0) - du(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $d \neq 0$, а $q(x)$ – произвольная комплекснозначная функция из класса $L_2(0, \pi)$.

Обозначим через $c(x, \mu), s(x, \mu)$ ($\lambda = \mu^2$) фундаментальную систему решений уравнения (1) с начальными условиями $c(0, \mu) = s'(0, \mu) = 1$, $c'(0, \mu) = s(0, \mu) = 0$. Обозначим также через PW_σ класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leq \sigma$, таких что $\|f(z)\|_{L_2(R)} < \infty$, а через PW_σ^- обозначим множество нечетных функций из PW_σ .

Несложные вычисления показывают, что характеристическое уравнение любой задачи (1), (2) может быть приведено к виду $\Delta(\mu) = 0$, где

$$\Delta(\mu) = \frac{d^2 - 1}{d} + c(\pi, \mu) - s'(\pi, \mu) = \frac{d^2 - 1}{d} + \frac{f(\mu)}{\mu},$$

где функция $f(\mu) \in PW_\pi^-$. Следующее утверждение устанавливает достаточные условия, которым должна удовлетворять функция, для того, чтобы являться характеристическим определителем $\Delta(\mu)$ задачи (1), (2).

Теорема 1. Пусть функция $v(\mu)$ представляется в виде

$$v(\mu) = \gamma + \frac{f(\mu)}{\mu}, \quad (3)$$

где γ – некоторое комплексное число, функция $f(\mu) \in PW_\pi^-$ и удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{\infty} |\mu^m f(\mu)|^2 d\mu < \infty$, где m – некоторое неотрицательное целое число. Тогда существует такая функция $q(x) \in W_2^m(0, \pi)$, что характеристический определитель $\Delta(\mu)$ задачи (1), (2), где $d = (\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4})/2$ или $d = (\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4})/2$, с потенциалом $q(x)$ тождественно равен функции $v(\mu)$.

Таким образом, теорема 1 сводит вопрос о структуре спектра задачи (1), (2) к вопросу о разложении аналитической функции в форме (3) в каноническое произведение. В частности, теорема 1 дает удобный способ построения примеров с наперед заданной, в том числе неклассической асимптотикой спектра. В этой связи заметим, что значительный интерес представляют существенно несамосопряженные, по терминологии В.А. Ильина, краевые задачи, т.е. задачи, имеющие бесконечно много присоединенных функций. Применение теоремы 1 позволяет среди существенно несамосопряженных задач выделить подкласс задач, где размерности корневых подпространств, отвечающих собственным значениям λ_n , монотонно не убывают и стремятся к бесконечности при $|\lambda_n| \rightarrow \infty$.

Обозначим через $g(\lambda_n)$ – кратность собственного значения λ_n задачи (1), (2). Устанавливается существование такого потенциала $\tilde{q}(x) \in L_2(0, \pi)$, что спектр задачи (1), (2) с потенциалом $\tilde{q}(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\lambda_n) = \infty, \quad (4)$$

причем все $\lambda_n > 0$, и такого потенциала $\hat{q}(x) \in L_2(0, \pi)$, что для спектра задачи (1), (2) с потенциалом $\hat{q}(x)$ выполняется условие (4) и, кроме того, условие $\lim_{n \rightarrow \infty} |Im \mu_n| = \infty$, где $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$. Доказывается, что в обоих случаях система собственных и присоединенных функций задачи (1), (2) полна в $L_2(0, \pi)$.

Заметим, что в случае невырожденных двухточечных краевых условий кратность собственных значений ограничена одной постоянной [1].

Список литературы

1. Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. М.: Киев, 1977.

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИЛОЙ С
ОДНОРОДНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ТИПА ТОРМОЖЕНИЯ**

Моисеев Евгений Иванович, Холомеева Анна Андреевна

академик РАН, профессор; к. ф - м. н., ассистент

E-mail: smc@cs.msu.su, kholomeeva@cs.msu.su

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В работе ведется исследование поведения упругого стержня длины l , колебания которого описываются однородным волновым уравнением

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, Q_T = [0 < x < l] \times [0 < t < T], \quad (1)$$

на левом конце стержня осуществляется управление силой

$$u_t(0, t) = \mu(t), 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

а на правой границе стержня задано граничное условие

$$u_x(l, t) + \text{th } b \cdot u_t(l, t) = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

с произвольным параметром b , которое может быть интерпретировано как условие сопротивления вязкой среды на правом конце стержня ([1]).

Ставится задача отыскания такого граничного управления $\mu(t)$, которое бы перевело за относительно большой промежуток времени T колеблющийся стержень из произвольного начального состояния

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), 0 \leq x \leq l \quad (4)$$

в произвольно заданное финальное состояние

$$u(x, T) = \widehat{\varphi}(x), u_t(x, T) = \widehat{\psi}(x), 0 \leq x \leq l. \quad (5)$$

Поскольку при относительно больших промежутках времени T существует бесконечно много искомым граничных управлений, ставится задача об отыскании оптимального граничного управления, то есть такой функции $\mu(t)$, которая доставляла бы минимум интегралу граничной энергии

$$\int_0^T \mu^2(t) dt. \quad (6)$$

Прежде задачи оптимального граничного управления с граничным условием типа торможения исследовались авторами в случае управления смещением в статье [2].

В данной работе было проведено исследование разрешимости начально-краевой задачи для волнового уравнения (1) с начальными условиями (4) и граничными (2), (3) в терминах обобщенного решения из пространства Соболева $W_2^1(Q_T)$, при этом решение задачи (1)-(4) понимается в смысле интегрального тождества.

Оптимальное граничное управление было найдено в явном аналитическом виде. В частном случае при значении параметра $b = 0$, поставленная задача переходит в задачу граничного управления силой на одном конце стержня при условии, что второй конец стержня свободен, при этом полученное решение полностью совпадает с тем, которое было получено в статье В.А. Ильина и Е.И. Моисеева [3].

Работа выполнена в рамках программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-5461.2014.9) и фонда РФФИ (проекты 14-01-00164 а, 14-01-31132 мол-а).

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 2004.
2. Моисеев Е.И., Холомеева А.А. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце струны при наличии сопротивления среды на другом конце // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 10. – С.1350-1355.
3. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струным // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60. Вып. 6. – С. 89-114.

**НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ И ИХ СВОЙСТВА**

Моисеев Тихон Евгеньевич

д.ф.м. н., с. н. с.

E-mail: tsmoiseev@mail.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

1. Постановка задачи. В области $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, где $\mathcal{D}_1 = \{0 < r < 1, 0 < \theta < \pi\}$, (r, θ) — полярные координаты, а \mathcal{D}_2 — треугольник в нижней полуплоскости, который ограничен отрезками прямых $y = 0$, $x \in [0, 1]$, $y = -x$, $x \in [0, 1/2]$, $y = x - 1$, $x \in [1/2, 1]$, требуется найти регулярное решение уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = 0. \quad (1)$$

В области эллиптичности уравнения заданы смешанные краевые условия

$$u(1, \theta) = f(\theta), \quad \theta \in [0, \pi], \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \varkappa \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{\theta=\pi} = 0. \quad (3)$$

Будем предполагать, что функция $f(\theta)$ удовлетворяет условию Гельдера с некоторым показателем α . Условие (3) — это задание наклонной производной с постоянным углом наклона.

В гиперболической части области уравнения Лаврентьева–Бицадзе данные заданы на одной из характеристик этого уравнения

$$u(x, x - 1) = 0, \quad x \in [1/2, 1]. \quad (4)$$

Решение задачи (1) – (4) будем искать в классе функций: $u \in C^0(\bar{\mathcal{D}}) \cap C^2(\mathcal{D}_1) \cap C^2(\mathcal{D}_2)$. На линии изменения типа уравнения будем требовать выполнение условий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, -0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, +0), \\ k \frac{\partial u}{\partial y}(x, -0) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x, +0). \end{aligned} \quad (5)$$

Условие (5) будем называть “обобщенным условием склеивания по Франклю”. Более подробно об этом условии склеивания Франкля написано в монографии [1]. Это условие может приводить к неединственности решения задачи. В частности, при $k = 1$, когда градиент решения задачи

(1) – (5) непрерывен, за исключением угловых точек, в которых он может иметь особенности, решение задачи Трикоми (1) – (5) неединственно при условии $1 + \varkappa < 0$, а при $1 + \varkappa \geq 0$ – единственно. Этот результат был получен в статье [2].

Задача (1) – (5) сводится к следующей вспомогательной задаче в области эллиптичности уравнения: найти гармоническую функцию, которая удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad (6)$$

краевым условиям (2), (3) и условиям на линии изменения типа

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + k \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{\theta=0} = 0. \quad (7)$$

Для дальнейшего изложения удобно ввести следующие обозначения: $z = r e^{i\theta}$, $t = e^{i\varphi}$, γ – полуокружность, лежащая в верхней полуплоскости, причем направление обхода контура берется против часовой стрелки, именно, от точки $A = (-1, 0)$ до точки $C = (1, 0)$.

Введем обозначения $\operatorname{tg} \theta_0 = k$, $\operatorname{tg} \theta_1 = \varkappa$, причем потребуем, чтобы θ_0 и θ_1 принадлежали интервалу $(-\pi/2, \pi/2)$. Отметим, что $k + \varkappa$ и $\theta_0 + \theta_1$ одного знака. В случае $\theta_0 + \theta_1 = 0$ градиент решения не обращается в бесконечность в начале координат. Решение краевой задачи (2), (3), (6), (7) будем искать в классе функций $u \in C^0(\bar{\mathcal{D}}) \cap C^2(\mathcal{D})$, причем градиент решения задачи может обращаться в бесконечность ниже первой степени в точках $A = (1, 0)$, $B = (0, 0)$, $C = (-1, 0)$.

В докладе будут выписаны интегральные представления решения задачи Трикоми, как в эллиптической, так и в гиперболической части области. Причем справедливы

Теорема 1. *Решение задачи Трикоми (1)–(5) при $\theta_0 + \theta_1 = 0$ существует и единственно.*

Теорема 2. *Решения задачи Трикоми (1)–(5) при $\theta_0 + \theta_1 < 0$ существуют с точностью до нетривиального решения данной задачи.*

Теорема 3. *Решение задачи Трикоми (1)–(5) при $\theta_0 + \theta_1 > 0$ существует и единственно*

Автор благодарит академика В. А. Ильина за ценные советы.

Работа выполнена при поддержке ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-5461.2014.9), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 13-01-00241-а и 14-01-00163-а).

Список литературы

1. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 296 с.

2. Моисеев Т.,Е. О разрешимости задачи Трикоми со смешанными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 10. С. 1512–1514.

**О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ПРОЦЕССА НАГРЕВА НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ
«ТЭН-ПЕСОК-ВОЗДУХ»**

Наимов Алижон Набиджанович, Сеницын Антон Александрович

д. ф – м. н., профессор; к. т. н., доцент

E-mail: nan67@rambler.ru, nee-energo@yandex.ru

Вологодский государственный университет, Вологда, Россия

Доклад посвящен исследованию начально-краевой задачи следующего вида:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = a^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) + \frac{1}{x} \frac{\partial U}{\partial x}(t, x) \right], \quad t > 0, \quad r < x < R, \quad (1)$$

$$c_r \frac{\partial U}{\partial t}(t, r) - k \frac{\partial U}{\partial x}(t, r + 0) = Q, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$-k \frac{\partial U}{\partial x}(t, r + 0) = h_r [U(t, r) - U(t, r + 0)], \quad t > 0, \quad (3)$$

$$-k \frac{\partial U}{\partial x}(t, R - 0) = h_R [U(t, R - 0) - U(t, R)], \quad t > 0, \quad (4)$$

$$-k \frac{\partial U}{\partial x}(t, R - 0) = c_R \frac{\partial U}{\partial t}(t, R) + \alpha_R U(t, R), \quad t > 0, \quad (5)$$

$$U(0, x) = u_0, \quad r \leq x \leq R. \quad (6)$$

Данная задача представляет собой математическую модель процесса нагрева неоднородной среды "ТЭН-песок-воздух" [1]. Построение и исследование данной модели проводится по методологии работы [2], состоящей из следующих этапов:

1. Построение математической модели процесса нагрева в виде начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с краевыми условиями, учитывающими неоднородность среды.

2. Решение начально-краевой задачи методом разделения переменных, где необходимо построить базис собственных функций, удовлетворяющих краевым условиям.

3. Расчет тепловых характеристик процесса на основе экспериментальных данных посредством формул стационарного и регулярного режимов.

Исследуемый процесс нагрева неоднородной среды "ТЭН-песок-воздух" отличается от процесса, рассмотренного в работе [2]. Вследствие этого, во-первых, получается другая начально-краевая задача, во-вторых, базис собственных функций невозможно найти в явном виде. В настоящей работе доказано существование и полнота собственных функций соответствующей задачи Штурма-Лиувилля. С их помощью выводится формула решения начально-краевой задачи (1)-(6).

Решение задачи (1)-(6) находим в следующем виде:

$$U(t, x) = \bar{U}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i V_i(x) e^{-\lambda_i a^2 t}.$$

Здесь функция

$$\bar{U}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} U(t, x), \quad r \leq x \leq R,$$

определяет стационарный режим. Ее, как в работе [2], можно находить явно, воспользовавшись краевыми условиями. Числа $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ и функции $V_1(x), \dots, V_n(x), \dots$ определяются как собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля в форме Кнезера:

$$xV''(x) + V'(x) + \lambda xV(x) = 0, \quad r < x < R,$$

$$\lambda c_r a^2 V(r) + kV'(r+0) = 0, \quad -kV'(r+0) = h_r(V(r) - V(r+0)),$$

$$(-\lambda c_R a^2 + \alpha_R V(R)) = -kV'(R-0), \quad -kV'(R-0) = h_R(V(R-0) - V(R)).$$

Задачу Штурма-Лиувилля можно преобразовать к следующему виду, исключая $V(r)$, $V(R)$ и полагая $a = 1$, $k = 1$,

$$xV''(x) + V'(x) + \lambda xV(x) = 0, \quad r < x < R, \quad (7)$$

$$\lambda c_1 h_1 V(r+0) + (h_1 - \lambda c_1) V'(r+0) = 0, \quad (8)$$

$$h_2(\lambda c_2 - \beta) V(R-0) + (\lambda c_2 - \beta - h_2) V'(R-0) = 0, \quad (9)$$

где c_1 , c_2 , h_1 , h_2 , β - заданные вещественные положительные числа, λ - вещественный числовой параметр.

Теорема. Краевая задача (7)-(9) имеет счетное число положительных собственных значений $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$, для которых верна асимптотическая формула

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(n + m_0)}{R - r} + o(1) \right)^2, \quad n \rightarrow \infty,$$

где m_0 - фиксированное целое число, зависящее от данных задачи. При этом других собственных значений не существует.

Список литературы

1. Телков М. Г., Тимошенко П. О., Суханов И. А., Наимов А. Н., Синицын А. А. Исследование температурного режима в процессе нагрева неоднородной среды "ТЭН-песок-воздух" // Научный журнал "Фундаментальные исследования". 2012. № 11-2. С. 458 – 462.
2. Самарский А. А. Об одной задаче распространения тепла. 1 // Вестник МГУ. 1947. № 3. С. 85 – 102. (В книге: Избранные труды А. А. Самарского. М.: МАКС Пресс, 2003.)

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ВНУТРЕННЕКРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Нахушев Адам Маремович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: niipma@mail333.com

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия

Смысл предлагаемого приема дискретизации локальных краевых условий продемонстрируем на следующих уравнениях математической физики:

$$u_{yy} = a^2 u_{xx}, \quad z \in \Omega^-, \quad a = \text{const} > 0; \quad (1)$$

$$u_y = b^2 u_{xx}, \quad z \in \Omega_r^+, \quad b = \text{const} > 0, \quad r \leq \infty. \quad (2)$$

Здесь: 1) $\Omega_r^+ = \{z : 0 < x < r, 0 < y < T\}$ – область евклидовой плоскости точек $z = (x, y)$; 2) Ω^- – область, ограниченная отрезком $A_0B_0 = \{(0, y) : 0 \leq y \leq T\}$, $A_0 = (0, 0)$, $B_0 = (0, T)$, отрезком A_0C_0 прямой $x + ay = 0$, $C_0 = (-aT/2, T/2)$ и отрезком B_0C_0 прямой $x - ay = -aT$; 3) $\Omega = \Omega_r^+ \cup \Omega^- \cup \{(0, y) : 0 < y < T\}$, $\bar{\Omega}$ – замыкание области Ω .

1. Пусть $u = u(x, y)$ – решение волнового уравнения (1) в области Ω^- , удовлетворяющее условиям: $u(-ay/2, y/2) = 0$, $0 \leq y \leq T$; $p\tau'(y) + q\nu(y) = \varphi(y)$, $0 < y < T$, где $\tau(y) = u(0, y) \in C[0, T] \cap C^1]0, T]$, $\nu(y) = u_x(0, y) \in C]0, T[\cap L[0, T]$, $p, q = \text{const}$, $p^2 + q^2 \neq 0$. Тогда $\tau'(y) = a\nu(y)$ и

$$(ap + q)\nu(y) = \varphi(y) \quad (ap + q \neq 0). \quad (3)$$

Равенство (3), после замены $\nu(y)$ левой разностной производной $[\tau(y) - u(-h, y)]/h$, где $0 < h$ – шаг по оси x , приводит к внутреннекраевому условию Бицадзе-Самарского [1]: $u(0, y) = u(-h, y) + h\varphi(y)/[ap + q]$.

2. Пусть $u = u(x, y)$ – решение уравнения Фурье (2) в области Ω_∞^+ , удовлетворяющее условиям: $u(x, 0) = 0$, $0 \leq x < \infty$; $pu_y(0, y) + qu_x(0, y) = \varphi(y)$, $0 < y < T$, $p \neq 0$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \max_{[0, T]} |u(x, y)| \exp(-\varepsilon x^2) = 0$, $\varepsilon = \text{const} > 0$; $\tau(y) = u(0, y) \in C[0, T] \cap C^1]0, T]$; $\nu(y) = u_x(0, y) \in C]0, T[\cap L^2[0, T]$. Тогда $\tau'(y) = -bD_{0y}^{1/2}\nu(\eta)$ и

$$pb D_{0y}^{1/2}\nu(\eta) - q\nu(y) = -\varphi(y), \quad (4)$$

$$\nu(y) = \Phi(y) = -\frac{1}{pb} D_{0y}^{-1/2}\varphi(\eta) - \frac{q}{(pb)^2} \int_0^y \varphi(\eta) E_2 \left[\frac{q}{pb} (y - \eta)^{1/2}; 1 \right] d\eta, \quad (5)$$

где D_{0y}^α – оператор Римана-Лиувилля, $E_2[z; 1] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k/2)}$ – функция Миттаг-Леффлера [2, с. 92].

Равенство (5), после замены $\nu(y)$ правой разностной производной $[u(h, y) - \tau(y)]/h$, приводит к условию Бицадзе-Самарского вида: $u(0, y) = u(h, y) - h\Phi(y)$ для уравнения (2) в области Ω_∞^+ .

3. Пусть $u = u(x, y)$ – ограниченное решение задачи сопряжения уравнений (1) и (2) в области $\Omega = \Omega^- \cup \Omega_\infty^+ \cup \{(0, y) : 0 < y < T\}$, удовлетворяющее условиям: $u(-0, y) = u(+0, y) \in C[0, T]$, $u_x(-0, y) = u_x(+0, y) \in L^2[0, T] \cap C]0, T[$, $u(-ay/2, y/2) = \psi(y) \in C^1[0, T]$; $u(x, 0) = 0$ при $0 \leq x < \infty$. Тогда $\tau'(y) = a\nu(y) + 2\psi'(y) = -bD_{0y}^{1/2}\nu(\eta)$, $\tau(0) = u(0, 0) = \psi(0) = 0$,

$$\nu(y) = \Psi(y) = -\frac{2}{b}D_{0y}^{1/2}\psi(\eta) - \frac{a}{b^2} \int_0^y \psi'(\eta) E_2 \left[-\frac{a}{b}(y - \eta)^{1/2}; 1 \right] d\eta. \quad (6)$$

Равенство (6), после замены $\nu(y)$ центральной разностной производной $[u(h, y) - u(-h, y)]/(2h)$, приводит к условию $u(h, y) = u(-h, y) + 2h\Psi(y)$, $h \leq y \leq T - h$.

4. Пусть $u = u(x, y)$ – решение уравнения (2) в области Ω_r , $r < \infty$, удовлетворяющее условиям задачи Самарского [3, с. 140]: $u(0, y) = \tau(y) \in C[0, T]$, $u(x, 0) = \varphi(x) \in C[0, r]$, $\int_0^r u(x, y) dx = \int_0^r \varphi(x) dx$. Тогда $u_x(0, y) = \nu(y) = \nu_r(y) = u_x(r, y) \in L^2[0, r] \cap C]0, r[$. Равенство $\nu(y) = \nu_r(y)$, $0 < y < T$, после замены $\nu_r(y)$ левой разностной производной, а $\nu(y)$ – правой, приводит к следующему внутреннекраевому условию типа нелокального условия Бицадзе-Самарского [1]:

$$u(r, y) = u(h, y) + u(r - h, y) - \tau(y), \quad 0 \leq y \leq T.$$

А.А. Самарский в своих фундаментальных работах обращал внимание на важность дискретных аналогов непрерывных краевых условий, которым удовлетворяют все решения дифференциального уравнения из заданного класса.

Список литературы

1. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739-740.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2003. 272 с.
3. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ФРАКТАЛЬНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Нахушева Виктория Адамовна

д.ф. – м. н.

E-mail: niipma@mail333.com

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия

Я.Б. Зельдович и Д.Д. Соколов [1] отмечали, что "физические приложения фракталов в определенном смысле были начаты работами Эйнштейна и Смолуховского по броуновскому движению еще в самом начале века"; "боязнь сингулярностей в общей теории относительности являлась, в сущности, отголоском представления о неприменимости недифференцируемых объектов".

Классическое броуновское движение основано на уравнении диффузии Фурье

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где $\rho = \rho(x, t)$ – плотность частиц в точке $x \in [0, \infty[$ в момент времени t , $0 < \kappa = \text{const}$ – коэффициент диффузии. Оно является исключительным случаем уравнения фрактальной диффузии [2]:

$$D_{0y}^\alpha \rho(x, \eta) = a_\alpha \frac{\partial^2 \rho(x, y)}{\partial x^2}, \quad y \equiv t > 0. \quad (2)$$

Здесь

$$D_{0y}^\alpha \rho(x, \eta) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{\rho(x, \eta)}{(y-\eta)^\alpha} d\eta$$

– оператор Римана-Лиувилля частного дифференцирования по y порядка $\alpha \in]0, 1[$ с началом в точке 0 и с концом в точке y , a_α – коэффициент фрактальной диффузии, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Функция

$$\Gamma(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(y-\eta)}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa(y-\eta)} \right], \quad y \equiv t > \eta,$$

является фундаментальным решением уравнения (1), моделирующим эволюцию массы частиц, сосредоточенной в точке $x = \xi \geq 0$. В частности, функция

$$\rho(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa y}} \exp \left[-\frac{x^2}{4\kappa y} \right], \quad y = t > 0,$$

моделирует эволюцию единичной массы, первоначально сосредоточенной в точке $x = 0$. Ее можно интерпретировать и как плотность вероятности частицы в момент времени $y > 0$, если эта частица в момент $y = 0$ была расположена в точке $x = 0$.

Фундаментальное решение $\Gamma_\alpha(x, y; \xi, \eta)$ уравнения (2) определяется формулой

$$\Gamma_\alpha(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{a_\alpha}}(y - \eta)^{\alpha/2-1} \Phi_\alpha \left(-\frac{|x - \xi|}{\sqrt{a_\alpha}(y - \eta)^\alpha} \right), \quad y > \eta, \quad (3)$$

где

$$\Phi_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha/2 - \alpha k/2)}$$

– функция Райта.

В работе обосновано, что функцию (3) можно эффективно использовать для определения обобщенного броуновского движения как немарковского случайного процесса с переходной плотностью, являющейся фундаментальным решением уравнения (2). Такой подход позволяет ввести понятие фрактального броуновского движения как случайного процесса с переходной плотностью, являющейся решением нагруженного дифференциального уравнения фрактальной диффузии (2). Исследованное Мандельбротом и Ван Несом [3, с. 291] фрактальное броуновское движение не обладает этим свойством: соответствующая переходной функции переходная плотность является решением уравнения вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = h\sigma^2(t - \eta)^{2h-1} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad \sigma = \text{const} > 0, \quad t > \eta,$$

где $0 < h = \text{const} < 1$, которое простой заменой временной переменной по формуле $\tau = (t - \eta)^{2h}/2$ сводится к уравнению Фурье с $\varkappa = \sigma^2$ [4].

Список литературы

1. Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д. Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика // Успехи физических наук. 1985. Т. 146, вып. 3.
2. Нахушева В. А. О некоторых фрактальных дифференциальных уравнениях математических моделей катастрофических ситуаций // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 1. С. 506-512.
3. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Техносфера, 2006. 488 с.
4. Nakhushev A. M., Nakhusheva V. A. Some mathematical models of fractional Brownian motion / Papers to the compendium "Physics of Extreme States of Matter". Moscow, 2014. p. 28-30.

**НЕЛОКАЛЬНАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ
БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО**

Нахушева Зарема Адамовна

к.ф. - м. н., доцент

E-mail: niipma@mail333.com

*Научно-исследовательский институт прикладной математики и
автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН,
Нальчик, Россия*

В области $\Omega = \{z : a < x < b, 0 < y < T\}$ плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка эллиптического типа

$$L_z u \equiv \Delta_z u + A(z)u_x + B(z)u_y + C(z)u = F(z) \quad (1)$$

с оператором Лапласа $\Delta_z = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, непрерывными на компакте $\bar{\Omega} = \{z : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq T\}$ действительными коэффициентами $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ и правой частью $F(z)$.

Задача 1. *Найти регулярное, дважды непрерывно дифференцируемое, в области Ω решение $u(z) = u(x, y)$ уравнения (1) непрерывное в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющее условиям*

$$u(a + iy) = \sum_{j=1}^m A_j(y)u(x^j + iy) + \varphi(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (2)$$

$$u(b + iy) = \sum_{j=1}^n B_j(y)u(\xi^j + iy) + \psi(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (3)$$

$$u(x) = \tau_0(x), \quad u(x + iT) = \tau_1(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (4)$$

где $A_j(y)$, $\varphi(y)$, $B_j(y)$, $\psi(y)$, $\tau_0(x)$ и $\tau_1(x)$ – заданные действительные функции, непрерывные на сегменте $[0, T]$ и $[a, b]$ соответственно, $a < x^1 < x^2 < \dots < x^m < b$, $a < \xi^1 < \xi^2 < \dots < \xi^n < b$.

Пусть $u(z) = \tau(x)$ решение задачи 1, не зависящее от $y = \text{Im } z$. Тогда оно будет решением обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\tau''(x) + A(x)\tau'(x) + C(x)\tau(x) = F(x), \quad a < x < b, \quad (5)$$

в интервале $\Omega = \{x : a < x < b\}$ из класса $C[a, b]$, удовлетворяющее условиям

$$\tau(a) = \tau_0(a), \quad \tau(b) = \sum_{j=1}^n B_j(0)\tau(\xi^j) + \psi(0). \quad (6)$$

При $A_j(y) \equiv 0$, $j = 1, 2, \dots, m$; $B_j(y) \equiv 0$, $j = 2, 3, \dots, n$; $B_1(y) \equiv 1$, $\psi(y) \equiv 0$ задача 1 совпадает с задачей Бицадзе-Самарского [1]. Случай $A_1(y) \equiv B_1(y) \equiv 1$, $m = n = 1$ поставленной задачи для уравнения Лапласа

$$\Delta_z u = 0$$

изучен на корректность в работе [2].

Нелокальная краевая задача (6) для уравнения (5) исследована в работе В.А. Ильина и Е.И. Моисеева [3] в случае, когда $a = 0$, $b = 1$, $C(x) \leq 0$, $\psi(0) = 0$, числа $\alpha_j = B_j(0)$, $j = 1, 2, \dots, n$ либо неположительны, либо неотрицательны и удовлетворяют неравенствам

$$-\infty < \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq 1.$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. Пусть $A_j(y) \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$; $B_j(y) \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$; $A_m(y) \leq 1$, $B_n(y) \leq 1$ для всех $y \in [0, T]$, $C(z) \leq 0$ в области Ω ; $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ и $F(z)$ — непрерывны по Гельдеру в $\bar{\Omega}$. Тогда существует и притом единственное решение задачи 1.

Список литературы

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщенных линейных эллиптических краевых задачах // Доклады АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 1925–1935.
2. Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче для уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 1. С. 171–174.
3. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальная краевая задача для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и в разностной постановках // Доклады АН СССР. 1986. Т. 291, № 3. С. 534–539.

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП СРАВНЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Нефедов Николай Николаевич

д.ф - м. н., профессор

E-mail: nefedov@phys.msu.ru

Физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Представлены основные идеи асимптотического принципа сравнения в применении к нелинейным параболическим уравнениям, называемым в приложениях уравнениями реакция-диффузия-адвекция. Примером таких уравнений может служить следующее

$$\varepsilon^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, \nabla u, x, \varepsilon), \quad x \in \mathcal{D} \subset R^N, t > 0,$$

различные варианты которого выступают в качестве математических моделей во многих приложениях, и характерной особенностью которого являются решения с пограничными и внутренними слоями.

1. Решения с пограничными и внутренними слоями.

$$\varepsilon^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, x, \varepsilon), \quad x \in \mathcal{D} \subset R^N, t > 0,$$

$$u = h(x), \quad x \in \partial \mathcal{D}, t > 0,$$

2. Решения с внутренними слоями.

$$\varepsilon^2 \Delta u - \vec{A}(u, x) \nabla u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, x, \varepsilon), \quad x \in \mathcal{D}, t > 0,$$

$$u = h_i(x), \quad x \in \partial \mathcal{D}_i, i = 1, 2, t > 0.$$

3. Начально-краевые задачи для системы уравнений

$$\varepsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v, x, \varepsilon),$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v, x, \varepsilon), \quad x \in (0, 1), t > 0,$$

Для этих задач и их некоторых обобщений обсуждаются следующие вопросы:

1. Существование и асимптотическая устойчивость стационарных решений.

2. Асимптотическое описание движущихся внутренних слоев - фронтов.

3. Стабилизация решений начально-краевых задач к стационарному решению.

Представленные результаты являются дальнейшим развитием работ [1-4].

Работа поддержана проектом РФФИ 13-01-00200.

Список литературы

1. Nefedov N. N., Recke L., and Schneider K. R. Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations, *J. Math. Anal. Appl.* 2013. V. 405, P. 90 – 103.
2. Нефедов Н. Н., Давыдова М. А. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных квазилинейных уравнениях реакция-диффузия-адвекция // *Дифференциальные уравнения.* 2013. Т. 49, №6. С. 715 – 733.
3. Nefedov N. N., Comparison principle for reaction-diffusion-advection problems with boundary and internal layers// *In Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin, 2013, V. 8236, P. 62 – 72.*
4. Нефедов Н. Н., Никитин А. Г., Петрова М. А., Рекке Л. Движущиеся фронты в интегро-параболических уравнениях реакция-адвекция-диффузия. // *Дифференциальные уравнения.* 2011. Т.47, №9. С. 1305 – 1319.

**ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Орловский Дмитрий Германович

д.ф.м. н., профессор

E-mail: odg@bk.ru

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Москва, Россия*

В гильбертовом пространстве H рассмотрим нелокальную краевую задачу для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} u''(t) + Au(t) = f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = \alpha u(T) + x, \\ u'(0) = \beta u'(T) + y, \end{cases} \quad (1)$$

где A – самосопряженный положительно определенный оператор в H . Решение задачи – это функция $u \in C^2([0; T], H) \cap C([0; T], D(A))$, удовлетворяющая системе (1).

Нас будет интересовать следующий вопрос: при каких значениях параметров α и β поставленная задача имеет и притом единственное решение для любого самосопряженного положительно определенного оператора A в H , любых $x \in D(A)$, $y \in D(A^{1/2})$ и любой $f \in C^1([0; T]; H)$. Множество всех таких пар (α, β) назовем областью корректности.

Теорема. *Область корректности центрально симметрична. В первой координатной четверти она ограничена координатными осями, отрезком прямой $\beta = 1, 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3}$, отрезком прямой $\alpha = 1, 0 \leq \beta \leq \frac{1}{3}$ и графиком кривой, задаваемой в полярных координатах уравнением*

$$r = \sqrt{\frac{3 \sin 2\varphi - 1}{2 \sin^2 2\varphi}}, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \leq \varphi \leq \operatorname{arcctg} \frac{1}{3}.$$

Во второй координатной четверти она ограничена квадратом $-1 < \alpha \leq 0, 0 \leq \beta < 1$ и квадрантом $-\infty < \alpha < -1, 1 < \beta < +\infty$.

График области корректности приведен ниже.

Иллюстрации

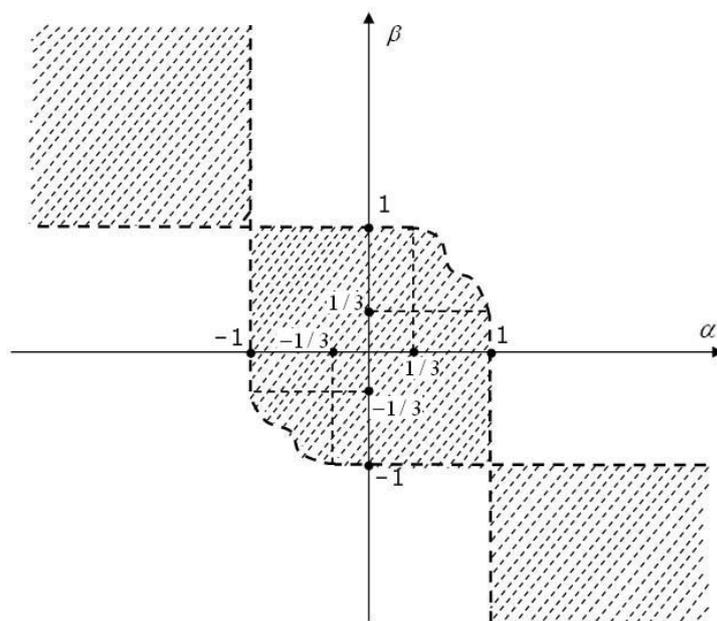


Рис. 5: Область корректности.

**О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВАХ И ЗАДАЧАХ СОПРЯЖЕНИЯ
НА ГИПЕРПЛОСКОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ**

Плещинский Николай Борисович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: pnb@kpfu.ru

ИВМиИТ, Казанский федеральный университет, Казань, Россия

1. Будем искать в верхнем полупространстве $x_n > 0$ n -мерного пространства решения системы уравнений с частными производными вида

$$\sum_{k=1}^n A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + B u = 0, \quad (1)$$

здесь $u = (u_1(x), \dots, u_m(x))$, A_k и B – постоянные матрицы.

Пусть $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Сколько условий Коши $u_j(x', 0) = u_j(x')$ нужно задать на гиперплоскости $x_n = 0$, чтобы выделить единственное решение?

Применим интегральное преобразование Фурье по касательным переменным $x' \rightarrow \xi'$. Запишем новую систему уравнений так, чтобы в каждом уравнении осталось не более одной производной по x_n . Пусть $r \leq m$ – ранг матрицы A_n . Первые r искомым функций назовем ведущими.

Пусть $\lambda_p(\xi')$, $h^p(\xi')$, $p = 1..r$, – простые собственные значения и собственные векторы верхнего левого блока матрицы коэффициентов полученной системы уравнений. Ее общее решение (ведущие неизвестные)

$$\tilde{u}(\xi', x_n) = \sum_{p=1}^r c_p(\xi') e^{-\lambda_p(\xi')x_n} h^p(\xi'). \quad (2)$$

Решение уравнений (1) принадлежит классу U_s , $1 \leq s \leq r$, если в сумме (2) содержится только s первых слагаемых.

Теорема 1. *Если проекции векторов $h^p(\xi')$ на s -мерное подпространство линейно независимы, то по s условиям Коши на гиперплоскости однозначно определяется решение уравнений (1) класса U_s .*

2. Если искать решение уравнений (1) в классе U_s , но задавать на гиперплоскости условий больше, чем s , то получим переопределенную граничную задачу. Условия разрешимости переопределенных задач устанавливают связи между образами Фурье граничных функций.

Теорема 2. *Пусть на гиперплоскости $x_n = 0$ задано $s + q$ граничных условий, $0 < q < r - s$. Решение класса U_s задачи Коши для системы*

уравнений (1) в верхнем полупространстве существует тогда и только тогда, когда равны нулю последние q решений системы уравнений

$$\sum_{p=1}^{s+q} c_p(\xi') h_j^p(\xi') = u_j(\xi'), \quad j = 1 \dots s + q.$$

Случай нижнего полупространства рассматривается аналогично.

3. Зачем нужны переопределенные граничные задачи? Пусть гиперплоскость $x_n = 0$ разделена на части \mathcal{M} и \mathcal{N} . Будем искать в верхнем полупространстве решение системы уравнений (1), удовлетворяющее одним граничным условиям на \mathcal{M} и другим условиям на \mathcal{N} .

Теорема 3. Если в граничных условиях участвуют $s + q$ следов искомых функций, причем какие-то s из них заданы на \mathcal{M} и какие-то s заданы на \mathcal{N} , то смешанная граничная задача сводится к системе из q интегральных уравнений.

4. Будем искать в двух полупространствах решения систем уравнений вида (1), удовлетворяющие условиям вида $D^+ u^+(x') + D^- u^-(x') = e(x')$, где $u^\pm(x')$ – следы на гиперплоскости ведущих искомых функций. В таких задачах сопряжения условия разрешимости вспомогательных переопределенных задач заменяют уравнения с частными производными.

Теорема 4. Пусть $r^\pm = 2s$. Задача о скачке в классах U_s^\pm с условиями сопряжения

$$u_j^+(x') - u_j^-(x') = e_j(x'), \quad j = 1 \dots 2s, \quad (3)$$

равносильна системе из $4s$ линейных алгебраических уравнений для $4s$ образов Фурье следов граничных функций.

5. Пусть на части \mathcal{N} гиперплоскости заданы однородные условия вида (3), а на другой части \mathcal{M} – граничные условия

$$u_j^+(x') = u_j^-(x') = -u_j^0(x'), \quad j = 1 \dots s.$$

Теорема 5. Смешанная задача сопряжения сводится к системе из s интегральных уравнений на \mathcal{M} относительно сужений на \mathcal{M} функций $e_j(x')$, $j = s + 1 \dots 2s$.

6. Частным случаем системы уравнений (1) является система уравнений Максвелла для комплексных амплитуд электромагнитного поля. Ведущими искомыми функциями являются касательные (к плоскости $z = 0$) составляющие векторов E и H . Смешанная задача сопряжения равносильна задаче дифракции электромагнитной волны на экране.

Второй пример – система уравнений динамической теории упругости при гармонической зависимости от времени. Смешанная задача в полупространстве равносильна задаче дифракции упругой волны на дефекте, расположенном на границе полупространства.

MULTIDIMENSIONAL PROTTER-MORAWETZ PROBLEM

Nedyu Popivanov

Dr.Sc., Professor

E-mail: nedyu@fmi.uni-sofia.bg

*Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University “St. Kliment
Ohridski”, Sofia, Bulgaria*

Two-dimensional transonic potential flows in the fluid dynamics lead to boundary value problems for equations of mixed type. In particular, the Guderley–Morawetz problem is connected to the models of flows around airfoils. At an AMS conference in the 1950s, M. H. Protter proposed BVPs that are multidimensional analogues of the 2-D Guderley–Morawetz problem. These mixed-type Protter–Morawetz problems have been studied by many authors in the 1970s and 1980s, but a general understanding of the situation is still not at hand. Even the question of well-posedness is surprisingly subtle and not completely resolved. To explain the difficulties in solving Protter–Morawetz problem and illustrate the differences with the two-dimensional case, in [1] and [2] we study the Protter problems in the hyperbolic part of the domain. Consider in \mathbb{R}^4 with points $(x, t) = (x_1, x_2, x_3, t)$, the wave equation

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} - u_{tt} = f(x, t) \quad (1)$$

in the domain

$$\Omega = \{(x, t) : 0 < t < 1/2, t < |x| < 1 - t\},$$

bounded by the two characteristic cones

$$\Sigma_1 = \{(x, t) : 0 < t < 1/2, |x| = 1 - t\},$$

$$\Sigma_2 = \{(x, t) : 0 < t < 1/2, |x| = t\}$$

and the ball $\Sigma_0 = \{t = 0, |x| < 1\}$, centered at the origin $O(0, 0, 0, 0)$. Alongside to the mixed-type problem, Protter proposed boundary value problems for the wave equation that will be discussed here.

Problem P1. *Find a solution of the wave equation (1) in Ω which satisfies the boundary conditions*

$$P1 : \quad u|_{\Sigma_0} = 0, \quad u|_{\Sigma_1} = 0.$$

Its adjoint problem is:

Problem P1*. Find a solution of the wave equation (1) in Ω which satisfies the adjoint boundary conditions

$$P1^* : \quad u|_{\Sigma_0} = 0, \quad u|_{\Sigma_2} = 0.$$

Protter formulated and studied the R^3 variants of Problems $P1$ and $P1^*$ as multidimensional analogues of the Darboux problem in the plane. Not long after that it was found that the homogeneous adjoint Problem $P1^*$ has an infinite number of classical solutions. Although in 1960 Garabedian proved the uniqueness of a classical solution of Protter's multidimensional hyperbolic Problem $P1$, in contrast to the plane Darboux problems, the Problem $P1$ is not well posed. Actually, in the frame of classical solvability the problem is not Fredholm, because it has an infinite-dimensional cokernel. Instead, the notion of generalized solution that allows the solution to have a singularity on the inner cone Σ_2 was introduced. Now, it is known that the unique generalized solution of Problem $P1$ may have a strong power-type singularity even for some very smooth functions f . This feature deviates from the conventional belief that such BVPs are classically solvable for smooth right-hand side functions. Another interesting aspect is that the singularity is isolated at the vertex O of Σ_2 and does not propagate along the characteristic cone, which makes this case different from the traditional case of propagation of singularity.

We study the behaviour of the solution of Problem $P1$. When f is a harmonic polynomial we find the exact asymptotic expansion of the generalized solution in negative powers of the distance to the singular point O . Based on this result we treat the more general case of smooth right-hand side and discuss the semi-Fredholm solvability of the problem. We obtain necessary and sufficient conditions for the existence of bounded solution. Alternatively, when these conditions are not fulfilled, some known results suggest that the solution may have at most exponential growth. We construct an infinitely smooth right-hand side function such that the corresponding generalized solution to Protter's problem has indeed an exponential singularity.

Список литературы

1. N. Popivanov, T. Popov and R. Scherer, Singular Solutions with Exponential Growth to Protter's Problems // Siberian Advances in Mathematics, 2013, Vol. 23, No. 3, 219 – 226.
2. N. Popivanov, T. Popov and R. Scherer, Protter-Morawetz Multidimensional Problems // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2012, Vol. 278, 179 – 198.

**ОБРАТНЫЕ И ПРЯМЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ**

Прилепко Алексей Иванович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: prilepko.ai@yandex.ru

факультет Мехмат МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Рассматриваются линейные и нелинейные обратные задачи о нахождении источников и коэффициентов для эволюционных уравнений. Для таких задач дополнительно к условиям корректной разрешимости прямых задач задаются некоторые функционалы от решения. В частности, для неизвестных коэффициентов зависящих от пространственной переменной в обратных задачах задаются функционалы зависящие также от пространственных переменных. Подобные задачи можно трактовать как задачи "прогноз управления". Например, если неизвестен коэффициент поглощения зависящий от пространственной переменной, но дополнительно известно значение решения в некоторый фиксированный момент времени $t_1 > 0$, тогда корректно решая обратную задачу, мы можем корректным образом предсказать значение решения в любой (даже достаточно большой) момент времени.

Отметим также, что указанные обратные задачи об источнике тесно связаны с прямыми нелокальными задачами для эволюционных уравнений, когда вместо начальных данных Коши задаются некоторые функционалы от искомым решений на некотором промежутке времени. Для модельных задач эти функционалы, как и источник зависят от пространственных переменных.

Постановки и утверждения иллюстрируются примерами для уравнений математической физики, например, параболического типа, система Навье-Стокса и др.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Псху Арсен Владимирович

д.ф.м. н., доцент

E-mail: pskhu@mail333.com

НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} \right) u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

где $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = D_{0y}^\alpha$ — оператор дробного дифференцирования Римана – Лиувилля порядка α , $0 < \alpha < 1$, с началом в точке $y = 0$, по переменной y [1]; $\lambda = \text{const} > 0$.

Линейные дифференциальные уравнения дробного порядка, не превосходящего единицу, исследовались в работах [2], [3], [4] и др. (см. библиографию, приведенную в [5] и [6]). В указанных работах для уравнений вида (1) изучались начальные и краевые задачи в ограниченных и неограниченных прямоугольных областях. В данной работе исследуется краевая задача для уравнения (1) в области с криволинейной границей.

Пусть $D = \{(x, y) : z(y) < x < a, 0 < y < b\}$, где $z(y)$ – неубывающая непрерывная на $[0, b]$ функция, $z(0) = 0$, $z(y) < a$, $0 < a$, $b \leq \infty$. Исследуется задача: найти решение уравнения (1) в области D , удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \tau(x), \quad 0 < x < a; \quad u(z(y), y) = \varphi(y), \quad 0 < y < b.$$

Показано, что в случае, когда функция $z(y)$, определяющая боковую границу области D , удовлетворяет условию Гельдера с показателем превосходящем α , исследуемая задача однозначно разрешима.

Список литературы

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
2. Clément Ph., Gripenberg G., Londen S-O. Schauder estimates for equations with fractional derivatives // Transactions of the American Mathematical Society. 2000. V. 352, № 5. P. 2239 – 2260.

3. Псху А. В. Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2000. Т. 5, № 1. С. 45–53.
4. Псху А. В. Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1092 – 1099.
5. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.
6. Псху А. В. Краевая задача для многомерного дифференциального уравнения дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 3. С. 385 – 395.

**ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ВОЛНОВОГО
УРАВНЕНИЯ**

Пулькина Людмила Степановна

д.ф. – м. н., профессор

E-mail: louise@samdiff.ru

Механико – математический факультет СамГУ, Самара, Россия

В докладе будет рассмотрена задача с нелокальным по времени интегральным условием для волнового уравнения.

Пусть Ω — ограниченная область в R^n с гладкой границей $\partial\Omega$, T — конечное число. Обозначим $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$ — боковую поверхность цилиндра Q_T .

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - \Delta u + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

и поставим для него следующую задачу:

найти в цилиндре Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию

$$u(x, t) \Big|_{S_T} = 0 \quad (2)$$

и начальным данным

$$u(x, 0) = 0, \quad \int_0^T k(t)u(x, t)dt = h(x). \quad (3)$$

Второе из условий (3) можно рассматривать как модель действия некоего прибора, регистрирующего физические поля [1]. С другой стороны, оно является нелокальным условием первого рода, что может привести на некотором этапе исследования разрешимости задачи к операторному уравнению первого рода. В [2] предложен метод, позволяющий перейти от задачи с нелокальными условиями первого рода к эквивалентной задаче с условиями второго рода для случая пространственно нелокальных условий. Этот метод оказался применимым и для нелокальных по времени условий. Под нелокальными интегральными условиями второго рода мы понимаем соотношения, содержащие как интеграл от искомого решения, так и след решения или его производных на границе области.

Лемма. *Если функция $k(t)$ в (3) удовлетворяет условиям*

$$k \in C^1[0, T] \cap C^2(0, T), \quad k(T) = k'(T) = 0, \quad k(0) \neq 0$$

и выполняется условие согласования $h(x)\Big|_{\partial\Omega} = 0$, то задача (1)–(3) эквивалентна задаче отыскания решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2), $u(x, 0) = 0$ и нелокальному условию второго рода

$$u_t(x, 0) + \int_0^T K(x, t)u(x, t)dt = g(x), \quad (4)$$

где

$$K(x, t) = -\frac{k''(t) + c(x, t)k(t)}{k(0)},$$

$$g(x) = \frac{1}{k(0)}[k'(0)\varphi(x) - \int_0^T k(t)f(x, t)dt - \Delta h(x)].$$

Эта лемма позволяет перейти от задачи (1)–(3) к задаче с нелокальным условием второго рода (4), разрешимость которой доказана методом вспомогательных задач. Применение условия (4) к решению вспомогательной задачи привело к операторному уравнению, однозначно разрешимому при выполнении условий, сформулированных в основной теореме. Полученные априорные оценки, лемма и разрешимость операторного уравнения позволили доказать разрешимость поставленной задачи.

Обозначим $c_0 = \max_{\bar{Q}_T} |c(x, t)|$, $k_0 = \max_{\bar{\Omega}} \int_0^T K^2(x, t)dt$, $c_1 = c_0(T + 1)$.

Теорема. Пусть выполняются условия леммы, а также

$$c \in C(\bar{Q}_T), c_t \in C(Q_T), f, f_t \in L_2(Q_T), g \in L_2(\Omega);$$

$$\varphi \in W_2^2 \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \psi \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega);$$

$$k_0 < \frac{c_1}{e^{c_1 T} - 1}.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение (1)–(3), принадлежащее пространству $W_2^2(Q_T)$.

Список литературы

1. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. Издательство Московского университета. 1994.
2. Пулькина Л. С. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями 1 рода с ядрами, зависящими от времени // Известия вузов. Математика. 2012. № 10. С. 32–44.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЛАКСА (ВНУТРЕННЯЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ)

Радкевич Евгений Владимирович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: evrad07@gmail.com

факультет Мехмат МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Для одного примера систем законов сохранения (так называемой усечённой системы Эйлера) исследована проблема локальной достижимости точек фазового пространства. Усечённая система Эйлера даёт пример нестрого гиперболической системы законов сохранения, для которых на критическом многообразии (кратных собственных значений) нет полного базиса собственных векторов, есть присоединённый вектор. Построенные бифуркации критических ударных волн дают ответ на давно поставленную Лаксом задачу о том, что происходит с ударной волной, при прохождении ею в фазовом пространстве критического многообразия.

**АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ-ФРАНКЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА
С ЧАСТНОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ**

Репин Олег Александрович

д.ф - м. н., профессор

E-mail: matstat@mail.ru

*Самарский государственный экономический университет, Самара,
Россия*

Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - D_{0+,y}^\alpha u = 0, & (y > 0, 0 < \alpha < 1), \\ xu_{xx} + yu_{yy} + pu_x + qu_y = 0, & (y < 0, \frac{1}{2} < p, q < 1, q \geq p), \end{cases} \quad (1)$$

где $D_{0+,y}^\alpha$ - частная дробная производная Римана-Лиувилля порядка α от функции $u(x, y)$ по второй переменной.

Настоящая работа посвящена изучению уравнения (1) в области D , которая представляет собой объединение квадрата $D^+ = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$, единичного интервала $(0, 1)$ прямой $y = 0$ и области D^- , лежащей в нижней полуплоскости ($y < 0$) и ограниченной характеристиками $AC : x + y = 0$, $BC : \sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1$ уравнения (1), $A(0, 0), B(1, 0)$.

Для уравнения (1) изучим задачу, которую назовем аналогом задачи Трикоми-Франкля: найти решение $u(x, y)$ уравнения (1) в области D , удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_0(y), u(1, y) = \varphi_1(y), 0 < y < 1$$

$$u|_{AC} = \psi(x), 0 \leq x \leq \frac{1}{4},$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\alpha} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u(x, y) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\alpha} (y^{1-\alpha} u(x, y))_y = -x^{p-1} \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^q u_y(x, y) \quad (0 < x < 1).$$

Здесь $\psi(x), \varphi_0(y), \varphi_1(y)$ - заданные функции, такие, что

$$\psi(x), y^{1-\alpha} \varphi_0(y), y^{1-\alpha} \varphi_1(y) \in C[0, 1], \varphi_0(0) = \varphi_1(0) = 0.$$

Доказана однозначная разрешимость исследуемой задачи.

**НЕКЛАССИЧЕСКИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Розов Николай Христович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: fro.mgu@mail.ru

*факультет педагогического образования МГУ имени М. В. Ломоносова,
Москва, Россия*

Релаксационные колебания широко распространены в механике, радиофизике, экологии, технике. Так принято называть периодические по времени процессы, в которых в течение каждого периода происходит несколько последовательных чередований участка медленного, плавного изменения характеристики процесса и участка её быстрого, скачкообразного изменения. Теоретический пример «классического» релаксационного цикла доставляет уравнение Ван дер Поля с «большим» параметром, а примером релаксационных колебаний в технике может служить явление помпажа.

Однако существуют и такие сингулярно возмущенные системы, в которых наблюдаются релаксационные циклы качественно иного, «неклассического» типа. «Неклассические» релаксационные колебания наблюдаются, например, в модифицированной модели ФитцХью – Нагумо функционирования нейрона, в которой медленная компонента цикла асимптотически близка к разрывной функции, а его быстрая компонента δ -образна.

**ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО
ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

Сабитов Камиль Басирович

д.ф. - м. н., профессор

E-mail: sabitov_fmfm@mail.ru

Институт прикладных исследований РБ, Стерлитамак, Россия

Рассмотрим уравнение

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + q(x)u = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, t) | 0 < x < \pi, -\alpha < t < \beta\}$, где α и β – заданные положительные числа. Потенциал (или коэффициент теплообмена) $q(x)$ – определенная на $[0, \pi]$ достаточно гладкая функция, причем $q(x) \geq 0$.

В начале рассмотрим случай, когда $q(x)$ известен.

Начально-граничная задача. Найти в области D функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, t) \in C^1(\bar{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \quad (2)$$

$$Lu(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D_+ \cup D_-; \quad (3)$$

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) + Hu(\pi, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, -\alpha) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (5)$$

где h и H – заданные положительные постоянные, $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям согласования с граничными условиями (4), $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

В уравнении (1), разделяя переменные $u(x, t) = X(x)T(t)$, относительно $X(x)$ получим спектральную задачу:

$$X''(x) + (\lambda - q(x))X(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad (6)$$

$$X'(0) - hX(0) = 0, \quad X'(\pi) + HX(\pi) = 0. \quad (7)$$

Как известно, что при $q(x) \in C^1[0, \pi]$ задача (6) и (7) имеет счетное множество собственных значений λ_n , $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, а соответствующая система собственных функций $\{X_n(x)\}$ ортогональна и полна в пространстве $L_2[0, \pi]$, и поэтому в нем образует ортогональный базис. При этом справедливы следующие асимптотические формулы при больших n :

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$X_n(x) = \cos nx + \frac{\xi_n(x)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \alpha_n = \int_0^\pi X_n^2(x) dx = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$\omega = h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(x) dx, \quad \xi_n(x) = \sin nx \left(-\frac{\omega x}{\pi} + h + \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) d\tau \right),$$

числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ называются спектральными данными задачи (6) и (7).

Теорема 1. Если существует решение задачи (2)–(5), то оно единственно только тогда, когда при всех $n \in \mathbb{N}_0$ выполнены условия

$$\cos \rho_n \alpha + \rho_n \sin \rho_n \alpha \neq 0. \quad (8)$$

Пусть теперь в постановке задачи (2)–(5) неизвестны функции $u(x, t)$, $q(x)$ и постоянные h и H . В связи с этим надо ввести дополнительные условия. На основании теории обратной задачи Штурма-Лиувилля [1] будем предполагать выполнение одного из следующих условий (A_i) , $i = 1, 2$:

- известны спектральные данные $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ задачи (6), (7) с неизвестным потенциалом $q(x)$ из класса $C^3[0, \pi]$ и неизвестными коэффициентами h и H (условие (A_1));

- известны собственные значения λ_n и μ_n соответственно спектральных задач (6), (7) и (6),

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X'(\pi) - H X(\pi) = 0,$$

здесь h_1 и H – действительные числа, $h_1 \neq h$ (условие (A_2)).

На основании [2] и условий (A_1) и (A_2) можно поставить следующие обратные задачи для уравнения (1) в области D .

Первая обратная задача. Найти функцию $u(x, t)$ и коэффициенты $q(x)$, h и H , удовлетворяющие условиям (2)–(5) и (A_1) .

Вторая обратная задача. Найти функцию $u(x, t)$ и коэффициенты $q(x)$, h и H , удовлетворяющие условиям (2)–(5) и (A_2) .

Теорема 2. Пусть $u(x, t)$, $q(x)$, h , H и $\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{q}(x)$, \tilde{h} , \tilde{H} – решения первой обратной задачи и выполнены условия (8) при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $[0, \pi]$, $h = \tilde{h}$, $H = \tilde{H}$ и $u(x, t) = \tilde{u}(x, t)$ на \bar{D} .

Теорема 3. Пусть $u(x, t)$, $q(x)$, h , H и $\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{q}(x)$, \tilde{h} , \tilde{H} – решения второй обратной задачи и выполнены условия (8) при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $[0, \pi]$, $h = \tilde{h}$, $H = \tilde{H}$ и $u(x, t) = \tilde{u}(x, t)$ в \bar{D} .

Список литературы

1. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука. 1984.
2. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ. 1994.

**НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕ
УСИЛЕННО РЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Садыбеков Махмуд Абдысаметович

д.ф. - м. н., профессор

E-mail: makhmud-s@mail.ru

*Институт математики и математического моделирования, Алматы,
Казахстан*

В работе в области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассматривается задача о нахождении решения уравнения теплопроводности

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) - q(x)u(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

и краевым условиям вида

$$\begin{cases} a_1 u_x(0, t) + b_1 u_x(1, t) + a_0 u(0, t) + b_0 u(1, t) = 0, \\ c_1 u_x(0, t) + d_1 u_x(1, t) + c_0 u(0, t) + d_0 u(1, t) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

где $a_k, b_k, c_k, d_k, k = 0, 1$ - комплексные числа.

Применение метода Фурье для решения задачи (1)-(3) приводит к следующей задаче: при каких условиях произвольная начальная функция $\varphi(x)$ разлагается в сходящийся ряд по собственным, либо по собственным и присоединенным функциям оператора, заданного дифференциальным выражением

$$l(y) = -y''(x) + q(x)y(x), \quad 0 < x < 1 \quad (4)$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} a_1 y'(0) + b_1 y'(1) + a_0 y(0) + b_0 y(1) = 0, \\ c_1 y'(0) + d_1 y'(1) + c_0 y(0) + d_0 y(1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Если краевые условия (5) являются усиленно регулярными, то имеет место базисность Рисса в L_2 систем собственных и присоединенных функций задачи. Основываясь на этом факте, в работе Н.И. Ионкина и Е.И. Моисеева [1] в предположении усиленной регулярности условий (5) модифицированным методом разделения переменных построено решение задачи (1)-(3), доказана его единственность и устойчивость по начальным данным в различных нормах.

В случае же, когда краевые условия являются регулярными, но не усиленно регулярными, вопрос о базисности систем собственных и присоединенных функций до конца окончательно еще не решен. Это не дает возможности прямого применения метода Фурье для решения задачи (1)-(3).

Следует отметить, что если система корневых функций задачи (4)-(5) удовлетворяет условиям теоремы В.А. Ильина [2], то задача (1)-(3) может быть решена методом Фурье, независимо от того, являются ли краевые условия (5) усиленно регулярными.

В настоящем докладе для случая $q(x) = q(1 - x)$ предлагается новый метод решения задачи (1)-(3) для случая, когда краевые условия (5) являются регулярными, но не усиленно регулярными, не зависящий от того образует ли базис система собственных и присоединенных функций соответствующей задачи (4)-(5). Предлагаемый метод решения задачи может быть применим для построения как классического, так и для различных типов обобщенных решений. Поэтому на конкретных условиях гладкости входящих в постановку задачи функций мы останавливаться не будем.

Лемма. *Если краевые условия (5) являются регулярными, но не усиленно регулярными, то краевые условия (3) всегда могут быть приведены к виду*

$$\begin{cases} a_1 u_x(0, t) + b_1 u_x(1, t) + a_0 u(0, t) + b_0 u(1, t) = 0, \\ c_0 u(0, t) + d_0 u(1, t) = 0, \end{cases} \quad |a_1| + |b_1| > 0$$

одного из следующих четырех типов:

- I. $a_1 + b_1 = 0, \quad c_0 - d_0 \neq 0;$
- II. $a_1 - b_1 = 0, \quad c_0 + d_0 \neq 0;$
- III. $c_0 - d_0 = 0, \quad a_1 + b_1 \neq 0;$
- IV. $c_0 + d_0 = 0, \quad a_1 - b_1 \neq 0.$

Теорема. *Решение задачи (1)-(3) в случае регулярных, но не усиленно регулярных условий, при $q(x) = q(1 - x)$ всегда может быть эквивалентно сведено к последовательному решению двух краевых задач с усиленно регулярными краевыми условиями типа Штурма.*

Пользуясь этой теоремой, существование решения задачи (1)-(3), его единственность и устойчивость по начальным данным в различных рассматриваемых классах решений могут быть легко получены из теорем для соответствующих задач с усиленно регулярными краевыми условиями.

Список литературы

1. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1284 – 1295.
2. Ильин В.А., Крицков Л.В. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным дифференциальным операторам // Функциональный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 96. ВИНТИ. М. 2006. С. 5 – 105.

NONLOCAL PROBLEMS FOR VLASOV EQUATIONS IN INFINITE CYLINDER

Skubachevskii Aleksander Leonidovich

д.ф – м. н., профессор

E-mail: skub@lector.ru

Peoples' Friendship University, Moscow, Russia

We consider the Vlasov-Poisson equations in infinite cylinder with nonlocal boundary condition for electric potential. The Vlasov-Poisson system describes evolution of electric potential and distribution functions for densities of charged particles in high-temperature rarefied plasma. The cylindrical shape of domain corresponds to thermonuclear reactor that is called “mirror trap”. We study classical solutions with supports of distribution functions strictly inside domain. We obtain sufficient conditions for existence and uniqueness of such solutions in Hölder spaces.

This work was partially supported by RFBR (grant № 14-01-00265).

**ОБ ЕДИНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТАНОВКАМ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
СМЕШАННОГО ТИПА**

Солдатов Александр Павлович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: soldatov48@mail.ru

*Белгородский государственный национальный исследовательский
университет, Белгород, Россия*

Формулируются две краевые задачи для уравнения смешанного типа, объединяющие различные известные постановки (задачи Трикоми, обобщенная задача Трикоми, задача Овсянникова и др.). Рассмотрения ведутся в рамках системы Лаврентьева-Бицадзе $(\operatorname{sgn} y)u_x = v_y, \quad v_y = -u_x$ в смешанной области D . Пусть ее эллиптическая часть $D^+ = D \cap \{y > 0\}$ ограничена гладкой дугой σ и отрезком $J = [0, 1]$ действительной оси, а гиперболическая часть D^- лежит внутри характеристического треугольника Δ и ограничена отрезком J , парой отрезков $l^+ = [0, \tau^+]$, $l^- = [1, \tau^-]$ боковых сторон Δ и нехарактеристической гладкой дугой γ с концами τ^\pm . Случаи $\tau^+ = 0$ или $\tau^- = 1$ не исключаются.

Задача R^\pm . *Найти решение $u + iv \in C(D)$ системы (1) с весовым поведением $(u + iv)(z) = O(1)|z|^{\lambda_0}|1 - z|^{\lambda_1}$, $z = x + iy$ в окрестности концов J по краевому условию $(au + bv)|_{\sigma \cup \gamma} = f$, $(v \pm u)|_{l^\pm} = g$.*

Здесь коэффициенты a, b непрерывны на каждой из дуг σ, γ и удовлетворяют условиям $(a \pm ib)(t) \neq 0$, $t \in \sigma$, $(a \pm b)(t) \neq 0$, $t \in \gamma$. Возможны следующие три случая.

а) Если граница ∂D не имеет характеристических направлений ($\tau^+ = 0$, $\tau^- = 1$), то R^+ и R^- являются классическими задачами Римана-Гильберта для рассматриваемой системы смешанного типа с данными $au + bv$ на всей границе $\partial D = \sigma \cup \gamma$.

б) Если $\tau^+ = 0$, $\tau^- \neq 1$, то R^+ являются аналогом обобщенной задачи Трикоми с данными $au + bv$ на $\sigma \cup \gamma$, а R^- по отношению к ней включает краевое условие $v - u$ на $l^- = [1, \tau^-]$. В частности, задача R^- имеет носителем своих краевых условий всю границу $\partial D = \sigma \cup \gamma \cup l^-$ и по отношению к R^+ является переопределенной. Аналогичное положение имеет место при $\tau^+ \neq 0$, $\tau^- = 1$ (с перестановкой знаков для R^\pm).

с) Если $\tau^+ \neq 0$, $\tau^- \neq 1$, то как и в случае а) задачи R^\pm "равноправны" и их краевые условия занимают $\sigma \cup \gamma \cup l^\pm$ и являются аналогами задачи Л.В.Овсянникова.

В случае б) задачи R^\pm неравноправны и одна из них является переопределенной по отношению к другой, так что одновременно они не могут быть корректными. В этом случае их "разделяют" различные области весовых порядков λ_0, λ_1 , фигурирующих в постановке задачи. Аналогичная ситуа-

ция с выделением специальных областей весового порядка для задачи R^\pm сохраняется и в случаях а) и с).

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Соловьёв Вячеслав Викторович

к.ф. – м. н., доцент

E-mail: soloviev.vyacheslav@gmail.ru

НИЯУ „МИФИ“, Москва, Россия

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, $0 < \alpha < 1$ – фиксированное число, $D \subset R^n$ – ограниченная область с границей класса $C^{2,\alpha}$. Пусть, далее, R^{n+1} – пространство точек $(y, x) = (y, x_1, \dots, x_n)$, $q > 0$, $q_1 < 0 < q_2$ – некоторые числа. Определим в R^{n+1} цилиндры :

$$\Omega = (q_1, q_2) \times D, Q(q) = \{(y, x) \in R^{n+1} : |y| < q, x \in D\}$$

Боковые поверхности этих цилиндров обозначим следующим образом:

$$\Gamma(q) = \{(y, x) \in R^{n+1} : |y| < q, x \in \partial D\}$$

Определим следующие функциональные пространства Гёльдера:

$$U(\Omega) = \{u \in C(\bar{\Omega}) : \exists q > 0 u \in C^{2,\alpha}(\Omega \cup \Gamma(q))\},$$

$$G(\Omega) = \{g \in C(\bar{\Omega}) : \exists q > 0 u \in C^\alpha(\Omega \cup \Gamma(q))\},$$

$$M(\partial\Omega) = \{\mu \in C(\partial\Omega) : \exists q > 0 \mu \in C^{2,\alpha}(\Gamma(q))\}.$$

Пусть в цилиндре $\bar{\Omega}$ определён равномерно эллиптический оператор следующего вида:

$$(Lu)(y, x) = a_{00}(y, x)u_{yy}(y, x) + \sum_{i=1}^n a_{0i}(y, x)u_{yx_i}(y, x) + b_0(y, x)u_y(y, x) + \\ + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y, x)u_{x_i x_j}(y, x) + \sum_{i=1}^n b_i(y, x)u_{x_i}(y, x) + c(y, x)u(y, x)$$

В цилиндре $\bar{\Omega}$ рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u, f) \in U(\Omega) \times C^\alpha(\bar{D})$ из условий:

$$(Lu)(y, x) - f(x)h(y, x) = g(y, x), (y, x) \in \Omega, u(y, x) = \mu(y, x), (y, x) \in \partial\Omega, \quad (1)$$

$$u(0, x) = \chi(x), x \in \bar{D}. \quad (2)$$

Для формулировки альтернативы Фредгольма для обратной задачи (1)-(2) определим линейное множество троек функций:

$$R(\Omega) = \{(g, \mu, \chi) : g \in G(\Omega), \mu \in M(\partial\Omega), \chi \in C^{2,\alpha}(\bar{D}), \mu(0, x) = \chi(x), x \in \partial D\}$$

Теорема 1 (альтернатива Фредгольма для задачи (1)-(2)).

Пусть для коэффициентов равномерно эллиптического в Ω оператора L и функции h справедливы условия:

$$a_{ij}, b_i, c, h \in C^\alpha(\Omega) \cap C^\alpha(\bar{Q}(q)) \cap C(\bar{\Omega}), (a_{ij})_y, (b_i)_y, c_y, h_y \in C^\alpha(\bar{Q}(q)), i, j = 0, \dots, n$$

выполнены неравенства $c(y, x) \leq 0, |h(0, x)| \geq h_0 > 0, (y, x) \in \Omega$. Тогда для обратной задачи (1)-(2) справедливо одно из двух утверждений:

1. неоднородная обратная задача (1)-(2) имеет единственное решение для любой тройки функций $(g, \mu, \chi) \in R(\Omega)$ (в частности, при $g = 0, \mu = 0, \chi = 0$ единственное решение $u = 0, f = 0$)
2. однородная обратная задача (т.е. задача (1)-(2) при $g = 0, \mu = 0, \chi = 0$) имеет конечное число линейно независимых решений.

Приведём пример реализации первого случая альтернативы Фредгольма в предположении, что оператор L имеет следующий, более простой вид:

$$(Lu)(y, x) = a(x)u_{yy}(y, x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(y, x) + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i}(y, x) + c(x)u(y, x)$$

В формулировке следующей теоремы под знаком нормы понимается обычная *sup*-норма.

Теорема 2. Пусть для коэффициентов равномерно эллиптического в цилиндре Ω оператора L и функции h справедливы условия:

$$a, a_{ij}, b_i, c \in C^\alpha(\bar{D}), i, j = 1, \dots, n, h, h_y, h_{yy} \in C^\alpha(\bar{\Omega}),$$

выполнены неравенства:

$$c(x) \leq 0, |h(0, x)| \geq h_0 > 0, \gamma = \max\{||h(q_1, \cdot)/h(0, \cdot)||, ||h(q_2, \cdot)/h(0, \cdot)||\} < 1.$$

Тогда существуют такие постоянные l_*, κ_* что, если выполнено, по крайней мере, одно из двух условий:

1. область D при некотором $i \in (1, \dots, n)$ лежит в полосе $0 < x_i < l_i, l_i < l_*$

2. для коэффициента $c(x)$ справедливо $c(x)/a(x) \leq -\kappa < 0, \kappa > \kappa_0,$

то обратная задача имеет единственное решение для любой тройки функций $(g, \mu, \chi) \in R(\Omega)$

Список литературы

1. Соловьёв В. В. Обратные задачи для эллиптических уравнений в пространстве. II // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 5. С. 714 – 723.

**ВЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ В ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ
ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ**

Тихонов Иван Владимирович

д.ф – м. н., профессор

E-mail: ivtikh@mail.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В 1935 г. А. Н. Тихонов опубликовал знаменитое исследование [1], посвященное проблемам единственности решения в задачах теплопроводности. Среди прочего он показал, что классическая задача Коши

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения $u(x, t) \not\equiv 0$, обладающие особым «взрывным» характером и очень быстрым «ростом» при $x \rightarrow \infty$. Конструкция таких решений была дана в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^{(k)}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

с функцией $\gamma \in C^\infty[0, \infty)$, $\gamma(t) \not\equiv 0$. Предполагается, что $\gamma^{(k)}(0) = 0$ при всех $k = 0, 1, \dots$, а $|\gamma^{(k)}(t)| \leq Mk^{\alpha k}$ при $t > 0$ с некоторыми $M > 0$, $1 < \alpha < 2$. Указанные оценки обеспечивают должную сходимость ряда и возможность его почленного дифференцирования. Существование нужных $\gamma(t)$ устанавливается в теории квазианалитических функций.

Сравнительно недавно выяснилось [2], [3], что конструкция А. Н. Тихонова может быть приспособлена под нужды обратных задач, давая там тонкие примеры неединственности для некоторых специальных ситуаций.

В докладе обсуждается возможность практического моделирования подобных решений, их экстраординарное поведение и возникающие из-за этого сложности.

Список литературы

1. Tychonoff A. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur // Матем. сборник. 1935. Т. 42, № 2. С. 199 – 216.
2. Тихонов И. В. Соображения монотонности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюллетень. 2001. Т. 2, № 1. С. 119 – 128.

3. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Матем. заметки. 2005. Т. 77. Вып. 2. С. 273 – 290.

**ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

Уткина Елена Анатольевна

д.ф.м. н., доцент

E-mail: eutkinal@yandex.ru

*Институт математики и механики имени Н. И. Лобачевского, КФУ,
Казань, Россия*

В области $D = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}u_{1x} + \alpha_{12}v_{1x} = a_{11}^1u_1 + a_{12}^1u_2 + a_{11}^2v_1 + a_{12}^2v_2 + f_1 \\ \alpha_{21}u_{2y} + \alpha_{22}v_{2y} = a_{21}^1u_1 + a_{22}^1u_2 + a_{21}^2v_1 + a_{22}^2v_2 + f_2, \end{cases} \quad (1)$$

$\alpha_{ij}, a_{ij}^k, f_i \in C(\bar{D})$, $i, j, k = 1, 2$. При этом $v_i(x, y)$ определяются соответственно по $u_i(x, y)$ по формуле

$$v_i(x, y) \equiv u_i[\lambda(y), \mu(x)], \quad (2)$$

где $\lambda, \mu \in C^1[0, 1]$ - взаимнообратные функции, отображающие отрезок $[0, 1]$ на себя с сохранением направления движения. В частности,

$$\lambda(0) = \mu(0) = 0, \quad \lambda(1) = \mu(1) = 1,$$

а повторное применение преобразования (λ, μ) возвращает координаты (x, y) в исходное положение:

$$v_i[\lambda(y), \mu(x)] \equiv u_i\{\lambda[\mu(x)], \mu[\lambda(y)]\} \equiv u_i(x, y). \quad (3)$$

Отметим, что подобный вариант смещения уже рассматривался в [1]-[3] для уравнений в частных производных второго и третьего порядка и здесь был впервые применен к системе. Регулярным решением (1) в D будем называть решение класса $u_1, u_2, u_{1x}, u_{1y} \in C(D)$.

Задача Гурса. *Найти регулярное в D решение системы (1), непрерывно продолжимое на границу D , удовлетворяющее условиям:*

$$u_1(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_2(x, 0) = \psi_2(x), \quad x, y \in [0, 1]. \quad (4)$$

Данная постановка включает в себя хорошо известную [4] задачу Гурса с условиями (4) для системы

$$\begin{cases} u_{1x} = a_{11}^1u_1 + a_{12}^1u_2 + f_1 \\ u_{2y} = a_{21}^1u_1 + a_{22}^1u_2 + f_2. \end{cases}$$

Задача Гурса для (1) редуцируется к системе нагруженных интегральных уравнений вида

$$u_1(x, y) = \sum_{i=1}^2 G_{1i}(A_{1i}, B_{1i}, u_1, u_2) + \omega_1(x, y),$$

$$u_2(x, y) = \sum_{i=1}^2 G_{2i}(A_{2i}, B_{2i}, u_1, u_2) + \omega_2(x, y),$$

где

$$G_{11} = A_{11}(x, y)(\alpha_{12}v_1(0, y) + \int_0^x \{B_{11}(t, y, u_1(t, y), u_2(t, y), u_1(\lambda(y), \mu(t)), u_2(\lambda(y), \mu(t)))\} dt.$$

$$G_{21} = A_{21}(x, y)(\alpha_{22}v_2(x, 0) + \int_0^y \{B_{21}(x, \tau, u_1(x, \tau), u_2(x, \tau), u_1(\lambda(\tau), \mu(x)), u_2(\lambda(\tau), \mu(x)))\} d\tau$$

Функции G_{i2} отличаются от G_{i1} ($i = 1, 2$) коэффициентами и тем, что x и y заменены соответственно на $\lambda(y)$, $\mu(x)$, A_{ij} , B_{ij} полностью известны и зависят от коэффициентов (1), а ω_i зависят еще и от граничных условий (2).

Доказано методом сжимающих отображений, что от упомянутой нагруженности можно избавиться при условии $\alpha_{11}(x, 0) \cdot \alpha_{21}(0, y) \neq 0$. Сама же система однозначно разрешима, если $\Delta_1(x, y) \cdot \Delta_2(x, y) \neq 0$, где

$$\Delta_i(x, y) = \begin{vmatrix} \alpha_{i1}(x, y) & \alpha_{i2}(x, y) \\ \alpha_{i2}(\lambda(y), \mu(x)) & \alpha_{i1}(\lambda(y), \mu(x)) \end{vmatrix}.$$

Список литературы

1. Жегалов В. И. Характеристическая граничная задача для гиперболического уравнения со смещением аргументов искомой функции // ДАН. 2012. Т. 146. № 5. С. 490-493.
2. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Задачи с нормальными производными в граничных условиях для гиперболического уравнения со смещением аргументов искомой функции // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 2. С. 223-228.
3. Уткина Е. А. Характеристическая граничная задача для уравнения третьего порядка с псевдопараболическим оператором и со смещением аргументов искомой функции // Изв. вузов. Математика. 2014. № 2. С. 54-60.

4. Чекмарев Т. В. Формулы решения задачи Гурса для одной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 9. С. 1614-1622.

**УТОЧНЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ
КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ
ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ МАКСВЕЛЛОВСКОГО ТИПА**

Хенкин Геннадий Маркович¹
Шананин Александр Алексеевич²

1: *д.ф. – м. н., профессор, Universite Pierre et Marie Curie, Paris, France*

2: *д.ф. – м. н., профессор, Московский физико-технический институт
(государственный университет), Долгопрудный, Россия*

E-mail: henkin@math.jussieu.fr, alexshan@yandex.ru

Рассматривается задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \varphi(f) \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad x \in R, t \geq 0$$

с начальными условиями $f(x, 0) = f^0(x)$ типа Римана, т.е. $f^0(x)$ функция ограниченной вариации на R такая, что $f^0(x) = \alpha^\pm$ при $\pm x \geq \pm x^\pm$. Будем для определённости считать, что $\alpha^- < \alpha^+$. Предположим, что $\varphi(f)$ положительная непрерывно дифференцируемая функция, производная которой имеет только изолированные нули. Наиболее естественные (но не эквивалентные) определения решения рассматриваемой задачи Коши заключаются в существовании решений уравнений

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + \varphi(f_\varepsilon) \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x^2}, \quad \varepsilon > 0, x \in R, t \geq 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial f_\varepsilon(x, t)}{\partial t} + \varphi(f_\varepsilon(x, t)) \frac{f_\varepsilon(x, t) - f_\varepsilon(x - \varepsilon, t)}{\varepsilon} = 0 \quad \varepsilon > 0, x \in R, t \geq 0 \quad (1b)$$

с начальным условием

$$f_\varepsilon(x, 0) = f^0(x), \quad (2)$$

таких, что при $t \geq 0 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x, t) - f(x, t)| dx = 0$. Будем в дальнейшем понимать решение исходной задачи Коши как предел решений задач Коши (1a), (2) с $\varepsilon = +0$ или (1b), (2) с $\varepsilon = +0$. Для уравнения (1a) положим $\Phi(u) = \int_{\alpha^-}^u \varphi(y) dy$, $u \in [\alpha^-, \alpha^+]$, а для уравнения (1b) положим

$$\Phi(u) = - \int_{\alpha^-}^u \frac{dy}{\varphi(y)}, \quad u \in [\alpha^-, \alpha^+]. \quad (3)$$

Пусть $\Phi^{**}(u)$ результат двух кратного применения преобразования Лежандра-Юнга-Фенхеля к функции $\Phi(u)$. Обозначим $S = \{u \in [\alpha^-, \alpha^+] | \Phi^{**}(u) > \Phi(u)\}$. Предположим,

что $S = (\alpha_0^-, \alpha_0^+) \cup (\alpha_1^-, \alpha_1^+) \cup \dots \cup (\alpha_L^-, \alpha_L^+)$,
 где $\alpha^- = \alpha_0^- < \alpha_0^+ < \alpha_1^- < \alpha_1^+ < \dots < \alpha_{L-1}^- < \alpha_{L-1}^+ < \alpha_L^- < \alpha_L^+ = \alpha^+$.
 Положим соответственно для уравнений (1a) и (1b)

$$c_l = \frac{1}{\alpha_l^+ - \alpha_l^-} \int_{\alpha_l^-}^{\alpha_l^+} \varphi(y) dy, \quad l = 0, \dots, L, \quad (4a)$$

$$c_l = (\alpha_l^+ - \alpha_l^-) \left(\int_{\alpha_l^-}^{\alpha_l^+} \frac{dy}{\varphi(y)} \right)^{-1}, \quad l = 0, \dots, L. \quad (4b)$$

Будем предполагать, что $\varphi(\alpha_0^-) \neq c_0, \varphi(\alpha_L^+) \neq c_L,$
 $\varphi'(\alpha_l^-) \neq 0$ ($l = 1, \dots, L$), $\varphi'(\alpha_l^+) \neq 0$ ($l = 0, \dots, L - 1$).

Пусть $f(y_l^-(t), t) = \alpha_l^-$, $f(y_l^+(t), t) = \alpha_l^+$. Определим Параметры $d_l(t)$
 по следующим формулам максвелловского типа: для задачи Коши (1a), (2)
 с $\varepsilon = +0$

$$\int_{y_l^-(t)}^{c_l t + d_l(t)} (f(x, t) - \alpha_l^-) dx + \int_{c_l t + d_l(t)}^{y_l^+(t)} (f(x, t) - \alpha_l^+) dx = 0,$$

для задачи Коши (1b), (2) с $\varepsilon = +0$

$$\int_{y_l^-(t)}^{c_l t + d_l(t)} (\Phi(f(x, t)) - \Phi(\alpha_l^-)) dx + \int_{c_l t + d_l(t)}^{y_l^+(t)} (\Phi(f(x, t)) - \Phi(\alpha_l^+)) dx = 0,$$

где функция $\Phi(u)$ определена по формуле (3).

Теорема. Существует t^* такое, что при $t \geq t^*$ $d(t) = d(t^*)$. Решения
 задач Коши (1a,b), (2) с $\varepsilon = +0$ имеют следующую асимптотическую
 структуру

$$\|f(\cdot, t) - \tilde{f}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

$$\tilde{f}(x, t) = \begin{cases} \alpha^-, & \text{если } x < c_0 t + d_0(t^*) \\ \varphi^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), & \text{если } c_l t + d_l(t^*) \leq x < c_{l+1} t + d_{l+1}(t^*), \quad l = 0, 1, \dots, L - 1 \\ \alpha^+, & \text{если } x \geq c_L t + d_L(t^*) \end{cases}$$

где функция $\varphi(u)$ определена на дополнении к множеству S , а c_l соот-
 ветственно по формулам (4a), (4b).

Если $f^0(x)$ непрерывная монотонно неубывающая функция, то можно
 положить $t^* = 0$.

Список литературы

1. Henkin G. M., Shanin A. A., Cauchy-Gelfand problem for quasilinear conservation law // Bull. Sci. math., 2014, <http://dx.doi.org/10.1016/j.bulsci.2014.01.001>

**ПРОХОЖДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ СЛОЙ КОМПОЗИТА С
КОМПОНЕНТАМИ ИЗ УПРУГОГО И ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛОВ**

Шамаев Алексей Станиславович, Шумилова Владлена Валерьевна

д.ф – м. н., профессор; к.ф – м. н.

E-mail: sham@rambler.ru, v.v.shumilova@mail.ru

*Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, Москва,
Россия*

Данный доклад посвящен исследованию задачи о прохождении плоской звуковой волны через плоский слой композита, расположенного в полосе $0 < x_1 < d$ и состоящего, в свою очередь, из периодически повторяющихся слоев двух изотропных компонентов. При этом в качестве первого компонента рассматривается упругий материал, а в качестве второго – либо вязкоупругий материал Кельвина-Фойгта, либо вязкоупругий материал с долговременной памятью, у которого регулярные части ядер релаксации представляют собой сумму нескольких экспонент. Кроме того, предполагается, что длина звуковой волны много больше толщины одного упругого или вязкоупругого слоя, а все слои композита параллельны либо плоскости Ox_2x_3 , либо плоскости Ox_1x_2 .

Для исследования поставленной задачи применяются усредненные модели слоистых композитов, полученные в работах [1] и [2]. С помощью усредненных моделей находятся комплексные амплитуды отраженной и прошедшей волн, а также коэффициент отражения от слоя и коэффициент прозрачности слоя композита толщины d . Кроме того, исследуется изменение уровня интенсивности звука на примере прохождения его через композит с заданными числовыми характеристиками.

Список литературы

1. Шамаев А. С., Шумилова В. В. О спектре одномерных колебаний композита, состоящего из слоев упругого и вязкоупругого материалов // Сиб. журн. индустр.матем. 2012. Т. 15, № 4. С. 124 – 134.
2. Шамаев А. С., Шумилова В. В. О спектре одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2013. Т. 53, № 2. С. 282 – 290.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКАХ НА ГРАФЕ С ЦИКЛОМ

Юрко Вячеслав Анатольевич

д.ф - м. н., профессор

E-mail: yurkova@info.sgu.ru

СГУ имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Рассмотрим компактный граф T в \mathbf{R}^m с множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_r\}$, $r \geq 1$, и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$, где v_1, \dots, v_r – граничные вершины, v_0 – внутренняя вершина, $e_j = [v_j, v_0]$, $j = \overline{1, r}$, $\bigcap_{j=0}^r e_j = \{v_0\}$, и e_0 – цикл. Пусть T_j , $j = \overline{0, r}$ – длина ребра e_j . Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, T_j]$ так, что при $j = \overline{1, r}$ вершина v_j соответствует $x_j = 0$, а при $j = 0$ оба конца $x_0 = +0$ и $x_0 = T_0 - 0$ соответствуют v_0 . Функция Y на T представима в виде $Y = \{y_j\}_{j=\overline{0, r}}$, где $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, T_j]$, определена на e_j . Положим $U_j(Y) := y_j'(0) - (i\rho h_{j1} + h_{j0})y_j(0)$, $j = \overline{0, r}$, где h_{jk} – комплексные числа, причем $h_{j1} \neq \pm 1$ при $j = \overline{1, r}$. Обозначим $h_k = \{h_{jk}\}_{j=\overline{0, r}}$, $k = 0, 1$. Пусть $q = \{q_j\}_{j=\overline{0, r}}$ и $p = \{p_j\}_{j=\overline{0, r}}$ – комплекснозначные функции на T , причем $q_j(x_j) \in L(0, T_j)$, $p_j(x_j) \in AC[0, T_j]$. Пара (q, p) называется потенциалом. Рассмотрим дифференциальное уравнение на T :

$$y_j''(x_j) + (\rho^2 + \rho p_j(x_j) + q_j(x_j))y_j(x_j) = 0, \quad x_j \in (0, T_j), \quad j = \overline{0, r}, \quad (1)$$

где $y_j(x_j)$, $y_j'(x_j) \in AC[0, T_j]$ удовлетворяются условия склейки в v_0 :

$$y_0(0) = \alpha_j y_j(T_j), \quad j = \overline{0, r}, \quad U_0(Y) = \sum_{j=0}^r \beta_j y_j'(T_j), \quad (2)$$

где α_j и β_j – комплексные числа, $\alpha_j \beta_j \neq 0$, $1 + \alpha_0 \beta_0 \neq 0$, причем выполняются условия регулярности склейки [1]. Рассмотрим краевую задачу $B_0 := B_0(q, p, h_1, h_0)$ на T для (1)-(2) с краевыми условиями $U_j(Y) = 0$, $j = \overline{1, r}$. Кроме того, рассмотрим краевые задачи $B_k := B_k(q, p, h_1, h_0)$, $k = \overline{1, r}$, для (1)-(2) с краевыми условиями $y_k(0) = 0$, $U_j(Y) = 0$, $j = \overline{1, r} \setminus k$. Обозначим $\Lambda_k := \{\rho_{kn}\}_{n \in \mathbf{Z}}$ – спектр $B_k(q)$, $k = \overline{0, r}$. В отличие от случая деревьев здесь задание спектров Λ_k , $k = \overline{0, r}$ не определяет однозначно потенциал, и мы нуждаемся в дополнительной информации. Пусть $\Lambda_{-1} := \{\rho_{-1, n}\}_{n \in \mathbf{Z}}$ – спектр задачи B_{-1} для уравнения (1) с граничными условиями Дирихле и условиями склейки вида (2), но с α_{-1} вместо α_0 ($\alpha_{-1} \neq \alpha_0$).

Обратная задача 1. Даны Λ_k , $k = \overline{-1, r}$, построить потенциал (q, p) на T и коэффициенты h_1, h_0 .

Пусть $\Lambda_{r+1} := \{\rho_{r+1, n}\}_{n \in \mathbf{Z}}$ – спектр задачи B_{r+1} для уравнения (1) с граничными условиями Дирихле и условиями склейки вида (2), но с β_{-1} вместо β_0 ($\beta_{-1} \neq \beta_0$).

Обратная задача 2. Даны Λ_k , $k = \overline{0, r+1}$, построить потенциал (q, p) на T и коэффициенты h_1, h_0 .

Теорема 1. *Задание спектров Λ_k , $k = \overline{-1, r}$ однозначно определяет потенциал (q, p) на T и коэффициенты h_1, h_0 .*

Теорема 2. *Задание спектров Λ_k , $k = \overline{0, r+1}$ однозначно определяет потенциал (q, p) на T и коэффициенты h_1, h_0 .*

Получены также алгоритмы решения этих обратных задач.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00134)

Список литературы

1. Yurko V. A. Inverse problems for non-selfadjoint quasi-periodic differential pencils // Analysis and Mathematical Physics. 2012. Vol. 2, № 3. P. 215 – 230.

Именной указатель

- Chechetkin V. M., 114
Efendiev Y., 64
Lazarov R., 64
Lugovsky A. Yu., 114
Marković M., 106
Pavićević Ž., 106
Popivanov N., 182
Popov Yu. P., 114
Shi S., 64
Skubachevskii A. L., 196
Абакумов М. В., 66
Абгарян К. К., 68
Абрамов А. А., 11
Абрашина – Жадаева Н. Г., 71
Алиханов А. А., 14
Амосов А. А., 115
Андреев В. Б., 16
Анпилов С. В., 72, 75
Ахметова О. В., 116
Бадерко Е. А., 119
Бадриев И. Б., 18, 21
Баев А. В., 121
Баззаев А. К., 23
Бандеров В. В., 21
Безродных С. И., 25
Белов А. А., 27
Бештоков М. Х., 30
Боголюбов А. Н., 78
Богомоллов С. В., 32
Борзов А. Г., 66
Брушлинский К. В., 80
Буничева А. Я., 66
Бутузов В. Ф., 124
Вабищевич П. Н., 34
Васильев В. Б., 126
Васильева Д. П., 82
Власов В. В., 129
Власов В. И., 25
Войцехович И., 91
Гайдуков Р. К., 131
Галанин М. П., 85
Гасилов В. А., 86
Глазырина О. В., 36
Головизнин В. М., 88
Гольдич А. С., 80
Горбунов – Посадов М. М., 85
Гордезиани Д. Г., 89
Гудич И. Г., 32
Гулин А. В., 38
Давиташвили Т. Д., 89
Данилов А. В., 91
Данилов В. Г., 131
Даутов Р. З., 40
Демьянко К. В., 42
Денисов А. М., 133
Денисов В. Н., 134
Димова М. Г., 82
Димова С. Н., 82
Дмитриев В. И., 93
Днестровский А. Ю., 91
Днестровский Ю. Н., 91
Древаль А. В., 66

Дряженков А. А., 44
Дубинский Ю. А., 136

Егоренков В. А., 95
Еленин Г. Г., 46
Ермаков А. В., 85
Есикова Н. Б., 32

Задворнов О. А., 48
Задворнова Г. О., 48
Зарубин А. Н., 137
Захаров Е. В., 139
Змитренко Н. В., 97

Ильинский А. С., 98, 142
Ильютко В. П., 72, 75
Ипатов С. И., 101
Ирошников Н. Г., 145

Калиткин Н. Н., 27
Калмыков А. В., 75
Кальменов Т. Ш., 147
Камынин В. Л., 149
Капустин Н. Ю., 150
Карчевский М. М., 51
Кобельков Г. М., 52
Ковальский А. А., 116
Кожанов А. И., 152
Козловская И. С., 153, 155
Колдоба А. В., 86
Корзюк В. И., 153, 155
Корпусов М. О., 158
Костомаров Д. П., 91
Кошелев В. Б., 66
Кузьмин Р. Н., 72, 75

Ларичев А. В., 145
Логинова М. М., 95
Лукин В. В., 85
Лысенко С. Е., 91

Мажорова О. С., 104
Макин А. С., 161
Мандрик А. А., 153

Маров М. Я., 101
Матус П. П., 53
Меладзе Г. В., 89
Меладзе Ю. Г., 89
Мирзаде Ф. Х., 86
Михайлов А. П., 97
Михайлов П. Н., 116
Моисеев Е. И., 155, 163
Моисеев Т. Е., 165
Мокин А. Ю., 72
Морозова В. А., 38
Мухартова Ю. В., 78
Мухин С. И., 66

Наимов А. Н., 168
Нахушев А. М., 170
Нахушев В. А., 172
Нахушева З. А., 174
Нефедов Н. Н., 176
Нечепуренко Ю. М., 42
Низьев В. Г., 86
Николаев И. П., 145
Новиков В. Г., 109
Новодережкин В. В., 72

Орловский Д. Г., 178
Орtiz Р. П., 129

Павлова М. Ф., 36
Пискарев С. И., 55
Плещинский Н. Б., 180
Повещенко Ю. А., 86
Попов И. В., 57
Попов Ю. П., 104
Потапов М. М., 44
Пошивайло И. П., 27
Прилепко А. И., 184
Псху А. В., 185
Пулькина Л. С., 187

Радкевич Е. В., 189
Разгулин А. В., 145
Ревизников Д. Л., 68

Репин О. А., 190
Родин А. С., 85
Розов Н. Х., 191
Романелли М., 91
Рыжаков Г. В., 139

Сабитов К. Б., 192
Савенкова Н. П., 72, 75
Садкан М., 42
Садыбеков М. А., 194
Самохин А. Б., 98
Свешников А. Г., 78, 158
Сетуха А. В., 139
Синицын А. А., 168
Складчиков С. А., 72
Скороходов С. Л., 25
Смирнов Ю. Г., 142
Солдатов А. П., 197
Соловьёв В. В., 199
Соловьёв С. И., 58
Соснин Н. В., 66
Старостин А. С., 145

Тимербаев М. Р., 61
Тимощенко И. А., 71
Тихонов И. В., 201
Трофимов В. А., 95
Тыртышников Е. Е., 63

Уткина Е. А., 203

Фаворский А. П., 66
Федотов Е. М., 40
Филиппов А. И., 116
Фрязинов И. В., 57

Хенкин Г. М., 206
Холодов А. С., 111
Холодов Я. А., 111
Холommeева А. А., 163
Хруленко А. Б., 66

Черепова М. Ф., 119
Черкасов С. В., 91

Шамаев А. С., 208
Шананин А. А., 206
Шумилова В. В., 208
Шхануков – Лафишев М. Х., 23

Щерица О. В., 104

Юрко В. А., 209
Южно Л. Ф., 11
Юшков Е. В., 158