

МЕТОД ЧАСТИЦ. НЕСЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ.

С.В. Богомолов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Описан вариант метода частиц, обладающий дополнительными средствами для моделирования разрывных решений. Рассматривается возможность его применения к несжимаемой вязкой двумерной жидкости.

PARTICLE METHOD. INCOMPRESSIBLE FLUID

S.V. Bogomolov

M.V. Lomonosov Moscow State University

A variant of particle method with additional means for modeling discontinuous solutions is described. A possibility for its application to incompressible viscous 2D fluid is considered.

МЕТОД ЧАСТИЦ.

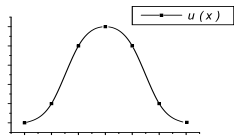
Целью настоящей раздела является общее описание идей метода частиц. Мы не будем подробно пересказывать всевозможные модификации метода, отсылая читателя, например, к пионерским работам Харлоу середины пятидесятых годов [1], классическому учебному пособию Хокни, Иствуда [2] или недавней книге Григорьева, Вшивкова [3], а постараемся сделать некоторые современные обобщения. Кроме того, внимательный анализ основ метода позволит нам прийти к его новым эффективным вариантам.

1. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ (детерминированные методы)

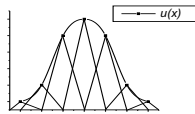
1.1. Представление функций

Математическое моделирование некоторого явления состоит в определении независимых переменных, функций этих переменных и действующих на них операторов. Численное моделирование требует дискретизации. Три способа дискретизации функций приводят к трем классам вычислительных методов: конечно - разностным методам, методу конечных элементов или методу частиц.

Конечно - разностная дискретизация оставляет минимальную информацию о независимой переменной и об исходной функции, а именно — сетку и сеточную функцию:

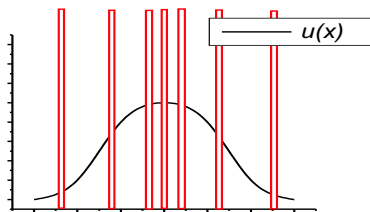


Метод конечных элементов требует еще и систему базисных функций:



Метод частиц представляет собой слабую аппроксимацию функции, т.е. замену ее конечной суммой δ -функций Дирака:

$$u(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i), \quad (1)$$



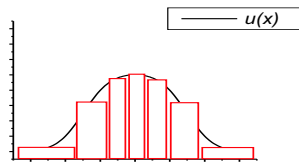
или приближенное представление обобщенной функции с помощью квадратурной формулы:

$$\int u(x)\varphi(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_i), \quad (2)$$

где неизвестными являются узлы x_i , а веса одинаковы — $\frac{1}{N}$. Такие квадратурные формулы носят имя Чебышева. Здесь $\varphi(x)$ — пробная функция, то есть функция достаточно гладкая и обращающаяся в ноль на бесконечности. Это равенство должно выполняться для любой финитной пробной функции, т.е. для любой области интегрирования, в том числе и для малой. Этот факт необходимо учитывать при выборе узлов и коэффициентов квадратурной формулы. Только лишь увеличение числа узлов — не экономично, т.к. характерная скорость сходимости методов частиц имеет порядок $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$. Мы вернемся к этому вопросу в конце главы. Простейшим является представление о функции $u(x)$ как о ступенчатой (П-образной), тогда можно положить

$$\delta(x - x_i) \approx \Pi_i(x - x_i),$$

а узлы выбирать так, чтобы интегралы по соседним подобластям были равными или сравнимыми. Таким образом, площадь (в одномерном случае) под графиком функции $u(x)$ заменяется набором, например, частиц — прямоугольников, центры которых — координаты частиц, что соответствует формуле прямоугольников приближенного интегрирования.



Итак, если задана функция $u(x)$, имеем узлы и веса, и наоборот, если в результате вычислений получились новые узлы и веса, можем восстановить искомую функцию.

1.2. Уравнение переноса

Обратимся теперь к тем последствиям для дискретизации операторов, которые влечет за собой представление функции набором частиц. Рассмотрим оператор переноса. Именно для него метод частиц является наиболее естественным и поэтому продуктивным.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial(a(t, x)u(x, t))}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

или в обобщенном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int u(x, t)\varphi(x) dx - \int a(t, x)u(x, t)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} dx = 0, \forall\varphi. \quad (4)$$

Строгие математические постановки обобщенных задач можно найти, например, в книгах [4,5]. В нашей статье мы хотим прежде всего описать работоспособные алгоритмы.

Подставим в это уравнение вместо функции $u(x, t)$ ее представление

$$u(x, t) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i(t)), \quad (5)$$

или

$$\int u(x, t)\varphi(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_i(t)). \quad (6)$$

Тем самым, вместо функции $u(x, t)$ неизвестными становятся узлы $x_i(t)$, а подстановка (5) (или (6)) в (4) приводит к уравнению:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x_i(t)) - a(t, x_i(t)) \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i(t)} \right] \approx 0.$$

или

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi'(x_i) \left[\frac{dx_i(t)}{dt} - a(t, x_i(t)) \right] \approx 0.$$

которое выполняется, если для каждого $i = 1, \dots, N$ справедлива система:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a(t, x_i(t)). \quad (7)$$

Таким образом, если координаты частиц (или узлы квадратурной формулы) изменяются в соответствии с (7), верным оказывается уравнение (4). Решая систему обыкновенных дифференциальных уравнений (7), мы получим слабое решение уравнения переноса.

Для квазилинейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

уравнения, описывающие траектории движения частиц (7) примут вид

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{1}{2}u(t, x_i(t)) \approx \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(x_i(t) - x_j(t)). \quad (9)$$

Если, вспоминая другое определение δ -функции как (неравномерного) предела последовательности финитных функций, стремящихся к бесконечности при фиксированной площади под графиком, в представлении (9) ввести аппроксимацию δ -функций классическими функциями - "шпалочками":

$$\delta(x) \approx w(x), \quad (10)$$

то такая аппроксимация приведет к замене обобщенного решения классическим.

Система уравнений (9) очевидна как с физической точки зрения, так и с точки зрения метода характеристик. Более деликатным является вопрос о способе аппроксимации решения набором N частиц по формуле (10). Мы вернемся к этому в п.3 настоящей главы.

2. ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД (стохастические методы)

2.1. Уравнение диффузии со сносом

Исторически сложилось так, что в естествознании наиболее распространенным является язык дифференциальных уравнений. Поэтому так и было построено наше изложение в предыдущем разделе. Хотя логичнее было бы отталкиваться от случайных процессов, что мы сейчас и продемонстрируем.

Сразу же отметим, что в результате получаются алгоритмы, моделирующие гораздо более широкий круг явлений, включая задачи с разрывными решениями, чего и требуют современные наука и технология.

Рассмотрим диффузионный процесс, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением по винеровской мере,

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))dt + \sigma(t, \xi(t))dw(t) \quad (11)$$

с начальным условием $\xi(0) = \xi_0$.

Он связан с обратным уравнением Колмогорова и в случае, когда мера вероятности перехода имеет плотность $u(x, t)$, — с прямым уравнением Колмогорова, или уравнением Фоккера - Планка:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial(a(t, x)u(x, t))}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\sigma^2(t, x)u(x, t))}{\partial x^2} \quad (12)$$

Эта связь и влечет за собой алгоритм стохастического метода частиц, а именно, для того, чтобы решить уравнение диффузии (12) надо смоделировать случайный процесс (11) и уметь вычислить плотность вероятности распределения его значений в нужный момент времени.

2.2. Процессы с разрывами

Большой класс физических явлений, например, движение молекул в разреженном газе, описывается стохастическим дифференциальным уравнением по мере Пуассона

$$d\xi(t) = \int_{\Theta} f(\theta, t, \xi(t)) \nu(d\theta \times dt) \quad (13)$$

где $\nu(d\theta \times dt)$ — пуассоновская мера, заданная на некотором (зависит от конкретной физической модели) множестве $\Theta \times (0, T)$ с интенсивностью $\Pi(d\theta) \times dt$, т.е. ее математическое ожидание $\mathbf{E}\nu(d\theta \times dt) = \Pi(d\theta) \times dt$, а $f(\theta, t, x)$ — функция скачка (которая тоже определяется физической моделью).

Плотность вероятности этого процесса подчиняется интегро - дифференциальному уравнению типа уравнения Больцмана

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \int_{\Theta} [u(t, x + f(\theta, t, x)) - u(t, x)] \Pi(d\theta) \quad (14)$$

Здесь мы даем общий обзор основных идей метода частиц. Строгие утверждения о стохастических дифференциальных уравнениях и связи их с уравнениями в частных производных содержатся в [6 - 8]. Наше изложение использует обозначения из книги [8].

3. ВАРИАНТЫ МЕТОДА ЧАСТИЦ

Получение уравнений движения частиц является фундаментом метода, но не исчерпывает всех его вычислительных особенностей. Очень важным этапом построения эффективных численных алгоритмов является оптимальная аппроксимация δ - функций, необходимая для вычисления скорости движения частиц. На этом этапе должна быть построена система обыкновенных или стохастических дифференциальных уравнений в виде, пригодном для применения вычислительных методов, дающих ее решение. Тут и возникает некая классификация метода по способу получения правых частей в системе уравнений движения частиц. Чтобы изложить основные идеи этого этапа построения алгоритмов метода частиц, нам достаточно будет рассмотреть простейший пример одномерного квазилинейного уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (15)$$

Система уравнений для траекторий движения частиц (9) выглядит следующим образом:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{1}{2} u(t, x_i(t)), i = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Вычисление скорости движения частицы в произвольной точке x_i есть решение задачи о восстановлении функции $u(x)$ по аппроксимирующей ее конфигурации частиц таким образом, чтобы выполнялось соотношение:

$$u(x_i) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(x_i - x_j). \quad (17)$$

Эта задача может быть решена по-разному.

3.1. Методы "частица — сетка" (или методы "частиц в ячейке")

Если мы ищем $u(x)$ как классическую функцию, то в представлении (17) от δ -функций мы должны перейти к их аппроксимациям классическими функциями $w^{(k)}(x)$ на основании другого определения δ -функции:

$$\delta(x - x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} w^{(k)}(x - x_0), \quad (18)$$

где $w^{(k)}(x)$ — гладкие неотрицательные финитные функции, значения которых в точке x_0 стремятся к бесконечности, а площадь под их графиками остается равной единице. Этот предел, конечно, не является равномерным.

Тогда вместо (17) получим

$$u(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N w^{(k)}(x - x_j). \quad (19)$$

По этой формуле мы можем восстанавливать функцию $u(x)$ в небольшом числе точек (например, принадлежащих некоторой пространственной сетке), а необходимые значения $u(x_i)$ вычислять с помощью интерполяции. Это и есть суть методов типа "частица — сетка". Небольшое количество арифметических действий в таких методах очевидно, также как и их грубость. Правда, в задачах физики плазмы, где преобладают дальнедействующие силы кулоновского типа, эти методы проявили себя вполне работоспособными.

3.1. Методы "частица — частица"

В задачах ближкодействия, к которым относится газовая динамика, необходимо использование более точных, но локальных, приближений:

$$u(x_i) \approx \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathbf{J}(x_i)} w^{(k)}(x_i - x_j). \quad (20)$$

Здесь, в силу финитности функций $w^{(k)}(x)$, суммировать надо не по всем $j = 1, \dots, N$, а только по множествам ближайших соседей $\mathbf{J}(x_i)$. Значительные вычислительные затраты по поиску этих соседей могут быть существенно сокращены предварительной сортировкой частиц по крупным ячейкам

так, что в итоге получаются алгоритмы с числом действий порядка $O(N)$, но, конечно, более медленные, чем методы "частица — сетка". Последние публикации [например, 9] говорят о все возрастающем интересе исследователей к методам типа "частица — частица".

3.2.1. Метод сглаженных частиц

Этот метод является вариацией предыдущего, и пользуется большой популярностью. Он основан на представлении:

$$u(x) = \int \delta(x - y)u(y)dy, \quad (21)$$

в котором δ - функция аппроксимируется сглаживающим ядром $W(x - y)$, а интеграл приближается с помощью квадратурной формулы, узлами которой являются координаты частиц. Этим методом можно пользоваться в том случае, если нам не требуется как можно более точно передавать разрывы решения.

3.2.2. Консервативный метод частиц

Приведенные выше модификации метода основаны на сглаживании δ - функций и ориентированы на получение классических решений. Поэтому их применение приводит к сглаживанию разрывных решений, которое можно уменьшить сужением носителей аппроксимирующих функций $w^{(k)}(x)$ или сглаживающего ядра $W(x - y)$ либо увеличением числа частиц N . Последнее ведет к сходимости порядка лишь $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$, следовательно, надо добиваться повышения точности другими путями.

Метод частиц обладает более широкими возможностями, т.к. он, по построению, позволяет получать обобщенные решения.

Еще раз подчеркнем, что метод состоит из двух составляющих — замене исходной бесконечномерной или очень большого числа измерений (как в случае прямого статистического моделирования поведения молекул газа) системы системой уравнений движения N частиц и аппроксимации правых частей в этих уравнениях. Природа погрешностей, возникающих на этих этапах различна.

Погрешность первого типа регулируется только числом моделирующих частиц, потому что мы не вольны изменять вид уравнений движения частиц, определяемый исходной задачей. Это налагает на аппроксимацию второго типа требование неприкосновенности положений частиц, или точек локализации δ - функций.

Последние же могут быть приближены какими угодно функциями $w^{(k)}(x)$, лишь только обладающими свойствами, указанными в определении (18). Однако это не совсем так. Для получения оптимальных алгоритмов мы должны наложить на эти функции дополнительные требования. Если мы хотим моделировать разрывные решения, то необходимо потребовать, чтобы $w^{(k)}(x_i)$ в соседних точках не перекрывались, т.е. эти функции не долж-

ными быть "широкими". С другой стороны, они не должны быть слишком "узкими": это не имеет значения для слабой аппроксимации функции $u(x)$ в точках x_i , но приводит к большим численным флуктуациям.

Это явление было отмечено на заре моделирования методом частиц задач физики плазмы при использовании модели "плоских листов", что привело к построению методов "частиц в ячейке". Численные флуктуации особенно губительны для задачах газовой динамики, что стало причиной долгого забвения метода частиц в этой области. Но необходимость в бездиссипативных алгоритмах (для решения, к примеру, задач с турбулентностью) приводит к возрождению интереса к методам частиц [9].

Посмотрим на природу этих флуктуаций. В чистом виде она проявляется, если в качестве $w^{(k)}(x)$ выбрать ступенчатую (Π-образную) функцию. Если частицы "широкие", то после их суммирования (точнее, суммирования аппроксимирующих их ступенчатых функций) в области между их координатами возникает ненужный всплеск, а если "узкие", то — провал. На это наблюдение можно возразить, что оно относится к приближению классическими функциями.

Однако эта неприятность сказывается и на исходной обобщенной аппроксимации, благодаря которой мы получили уравнения движения частиц. Иными словами, посмотрим как влияет приближение (19) на представление (1):

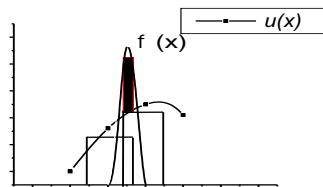
$$u(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i)$$

которое означает, что равенство (2)

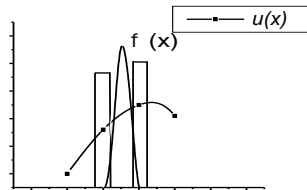
$$\int u(x)\varphi(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_i)$$

должно выполняться для любой пробной функции $\varphi(x)$.

Пусть мы построили такую аппроксимацию исходной функции $u(x)$ "широкими" частицами, что произошло их перекрывание. Тогда, взяв в качестве функции $\varphi(x)$ функцию, имеющую максимум в области перекрывания частиц и равную нулю в окрестности их координат (см. рис.),



мы получим результат сколь угодно сильно отличающийся от требуемого. Аналогичные соображения приводят к недопустимости "узости" частиц (см. рис.):



Такие функции $\varphi(x)$ не равны тождественно нулю. Если же подставить их в формулу (2), то справа мы получим нуль. Это означает, что точность квадратурной формулы (2) зависит только от числа частиц N и не зависит от того, как ведут себя функции в промежутках между точками x_i . Мы же хотим увеличить точность представления левой части (2) без увеличения числа узлов N , т.е. построить некую специфическую квадратурную формулу, учитывающую характер поведения функции $u(x)$ в промежутках между узлами x_i .

Эти замечания указывают на то, что оптимальной является такая аппроксимация δ -функций, при которой соседние частицы "соприкасаются". Мы будем требовать этого от наших алгоритмов.

Таким образом, задача ставится так: по заданной конфигурации частиц $\{x_i, i = 1, \dots, N\}$ построить аппроксимацию суммы δ -функций "соприкасающимися" функциями $w^{(k)}(x)$. Для этого надо допустить, чтобы индекс k был разным для разных x_i , т.е. можно просто писать: $w_i(x)$.

Эта задача может быть решена построением ячеек Дирихле: расстояния между частицами делятся пополам, тогда каждая частица получается составленной из двух частей, которые надо еще представить в виде одной П-образной функции. Потребовав полной (с обоими соседями) "соприкасаемости" мы получим несимметричные относительно точек x_i частицы.

Требование же симметричности частиц приводит к выделению ближайшего соседа ("соприкасаемость" достигается только с ним). Несмотря на нарушение свойства "полной соприкасаемости", мы получаем алгоритмы, выделяющие соседей по степени их влияния на рассматриваемую частицу, что делает метод более чувствительным. Кроме того, симметрия частиц значительно облегчает построение алгоритмов для многомерных задач.

Завершим изложение основных принципов конструирования тех методов частиц, которые мы разовьем в дальнейшем, важным соображением, приведшим к появлению в названии метода "Консервативный метод частиц" явной тавтологии — методы частиц тем и хороши, что являются консервативными по построению, поэтому этот термин в названии кажется лишним. Дело в том, что "правильная" аппроксимация, о которой мы только что говорили, различна в различные моменты времени, т.к. (неприкосновенные) координаты частиц все время меняются в соответствии с уравнениями движения. На каждом шаге по времени нужно строить новую аппроксимацию: если в результате смещения центров частиц произошло их перекрывание, то избавиться от него можно и нужно, изменяя только одну из частиц. Какую? Это зависит от дополнительных свойств исходной задачи, т.е. физической модели. Например, решая уравнение для импульса, перестройку частиц мы будем проводить так, чтобы не противоречить закону сохранения энергии.

Отметим здесь же, что такая перестройка частиц ведет к усилению естественной пространственной адаптации метода частиц, присущей ему изначально как методу построения точек сетки, каковыми можно назвать координаты частиц.

В результате применения описанных соображений даже для линейного уравнения переноса получается нелинейный алгоритм, содержащий много логических операций. Это не удивительно: при построении разностных схем для уравнения переноса также вводят "лимитеры", чтобы обеспечить монотонность [11].

Подробное изложение алгоритмов для одномерного уравнения Бюргера и системы уравнений газовой динамики мы приводили в [13 - 15]. В следующем разделе мы опишем двумерный алгоритм. В заключении же настоящего раздела сделаем терминологические замечания.

Рассматриваемые нами методы мы называем методами частиц по нескольким причинам. Во-первых, такое название очень точно передает их суть: способ построения, особенности реализации, физическую интерпретацию. Во-вторых, это название было, видимо, одним из первых и появилось вместе с появлением самого метода при моделировании плазмы. В-третьих, кроме физики плазмы (уравнения Власова, Фоккера-Планка, Ландау), оно является общепринятым (хотя и не без конкурентов) в других областях

микро-моделирования, связанных с другим кинетическим уравнением — уравнением Больцмана для описания разреженного газа и полупроводниковых приборов. Поэтому мы предпочитаем наше название таким, как "безсеточные" методы, методы подвижных конечных элементов, полностью лагранжевы методы, методы на неструктурированных сетках, методы маркеров, методы Монте-Карло, методы прямого статистического моделирования и т.п.

МЕТОД ЧАСТИЦ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ. НЕСЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ.

Применение метода частиц к макроскопическим задачам не является самоцелью. Оно вызвано стремлением получить методы сквозного счета в микро-макро задачах, где соседствуют разные способы описания газа, а микро-макроскопические уравнения приходится решать методом частиц.

Воспользуемся накопленным нами ранее [13 - 15] опытом построения методов частиц для того, чтобы обратиться к двумерным задачам. Кроме того, перейдем от газа к несжимаемой жидкости, что повлечет существенное изменение в способе моделирования градиента давления. И третье — будем рассматривать в качестве тестовой задачу Блазиуса об обтекании пластины [12], что означает необходимость учета граничных условий:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (23)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial up}{\partial x} + \frac{\partial vp}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

В качестве граничных условий возьмем стандартное условие прилипания ($u = v = 0$) на пластине и положим $u = 1, v = 0$ в набегающем потоке.

Начальные условия выберем близкими к классическому асимптотическому решению задачи Блазиуса: за пределами пограничного слоя, ширина которого вычисляется как

$$\delta_b(x) = 5,16 \sqrt{\frac{1}{Re} x / U_\infty},$$

скорость потока $U_\infty = 1$ и направлена вдоль пластины, а внутри погранслоя x -компонента скорости изменяется от нуля до U_∞ по параболическому закону; y -компонента определяется по заданной x -компоненте во всей области из уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Мы намеренно сохранили постоянную плотность ρ в уравнении неразрывности (24), что будет понятно в дальнейшем, когда мы обсудим, как изменять импульс частиц под влиянием неоднородного давления.

Главным отличием системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости от системы уравнений газовой динамики является отсутствие уравнения состояния. Это вносит некоторую неестественность в физическую трактовку выписанных уравнений: уравнение неразрывности из уравнения эволюции массы превращается в некоторое ограничение на компоненты скорости, а уравнения эволюции компонент скорости — в уравнение для определения давления. Эта нериятность связана, на наш взгляд, с математическим абстрагированием свойства несжимаемости. Мы учтем указанную особенность в нашем методе частиц.

С помощью метода суммарной аппроксимации [10] расцепим задачу (22)–(24) на последовательность следующих подзадач. Сначала будем решать двумерное квазилинейное уравнение переноса импульса с вязкостью, естественно, методом частиц. Далее учтем уравнение неразрывности, что поможет нам вычислить изменение импульса, связанное с градиентом давления.

4.1. Двумерное уравнение переноса.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

Аппроксимируя неизвестные функции u и v наборами δ - функций

$$u(x, y, t) \approx \sum_{i=1}^{N_u} c_i^u \delta(x - x_i^u(t), y - y_i^u(t)), \quad (27)$$

$$v(x, y, t) \approx \sum_{j=1}^{N_v} c_j^v \delta(x - x_j^v(t), y - y_j^v(t)), \quad (28)$$

получим систему $2N_u N_v$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_i^u(t)}{dt} &= u(x_i^u(t), y_i^u(t), t), i = 1, \dots, N_u, \\ \frac{dy_i^u(t)}{dt} &= v(x_i^u(t), y_i^u(t), t), i = 1, \dots, N_u, \\ \frac{dx_j^v(t)}{dt} &= u(x_j^v(t), y_j^v(t), t), j = 1, \dots, N_v, \\ \frac{dy_j^v(t)}{dt} &= v(x_j^v(t), y_j^v(t), t), j = 1, \dots, N_v, \end{aligned} \quad (29)$$

решение которой дает слабое решение квазилинейного уравнения переноса, точность которого необходимо дополнительно повысить консервативной перестройкой частиц.

Принципы, лежащие в основе этой перестройки, — такие же, как в одномерном случае, но их реализация осложняется присутствием большого числа частиц-соседей. Если после сдвига частицы перекрываются, то сужается та, сумма квадратов скоростей которой меньше. Тогда мы не вступим в противоречие с законом сохранения энергии. В двумерном случае у частицы соседей довольно много — среди тех, у которых сумма квадратов скоростей больше, чем у рассматриваемой частицы, мы должны выбрать того, площадь перекрывания с которым является максимальной. Если указанные условия выполнены, мы сужаем нашу частицу так, чтобы уменьшение ее площади равнялось площади перекрывания с наиболее "напирающим" на нее соседом. Сужение приведет к увеличению суммы квадратов скоростей (т.е. плотности кинетической энергии), которое не может превысить этой величины у "напирающего" соседа. Если такое случается, то эта сумма кладется равной "влияющей", а наша частица немного сдвигается в направлении линии, соединяющей центры взаимодействующих частиц. В двумерном случае последний шаг можно опустить, так как сужение, в отличие от одномерного случая, происходит по площади, а не по ширине, частицы, что оказывает меньшее влияние на нарушение аппроксимации δ - функциями.

Если рассматриваемая частица имеет перекрытия с какими-то соседями, но сумма квадратов ее скоростей больше, чем у них, тогда мы оставляем нашу частицу неизменной.

Если же не выполнено ни одно из условий, описанных выше, точнее, если наша частица отделена от всех соседей некоторыми промежутками, то последние должны быть заполнены с помощью ее расширения. С одним дополнительным условием: сумма квадратов ее скоростей должна быть больше, чем у любого из соседей. И расширяться она будет до того соседа, сумма квадратов скоростей которого наиболее близка к нашей. При этом ее новая (в результате расширения) плотность кинетической энергии не может стать меньше, чем у соседа, приведшего к этому изменению.

4.2. Двумерное уравнение Бюргерса.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (30)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (31)$$

Расщепление по физическим процессам приводит к последовательному решению двумерного уравнения переноса без изменения импульса частиц и уравнению диффузии импульса без изменения положения частиц.

Второе означает учет потоков импульса между соседними частицами: находим длину общей части границы рассматриваемой частицы и близкого (т.е. такого, который с ней перекрывается или находится на расстоянии, не превышающем некоторой характерной величины, например, ширины частицы) ее соседа и умножаем на поток, определяемый как соответствующая разностная производная, а затем суммируем по всем близким соседям.

Таким же образом вычисляется отток импульса на пластине.

Вязкий член не влияет на положения частиц, а только перераспределяет импульс между ними, что мы будем делать одновременно с первым этапом сдвига и перестройки частиц, хотя большей точности можно достичь расщеплением этих двух этапов. Нас извиняет то, что вязкость, или диффузия импульса, является непрехотливым оператором.

4.3. Учет градиента давления.

Мы уже подчеркивали, что правильное вычисление силы давления, которая является внешней для каждой частицы, очень важно для решения одномерных задач газовой динамики. Эта важность возрастает при рассмотрении несжимаемой жидкости. У нас отсутствует уравнение состояния. С другой стороны, имеется уравнение эволюции массы в пространстве, которое нет смысла решать, потому что плотность жидкости остается неизменной. Тем не менее, постараемся его решить методом частиц. Тогда мы получим, что после сдвига некоторые частицы перекрываются. Чтобы убрать этот эффект, какие-то частицы мы должны сузить, что будет означать изменение их плотности, а это невозможно. Выходом, на наш взгляд, является следующее рассуждение: перекрывание частиц можно трактовать как их перемешивание, при котором плотность остается постоянной, но происходит перераспределение импульса в частицах его моделирующих.

Отсюда вытекает следующий алгоритм. Берем конфигурацию частиц-импульсов, полученную на предыдущем этапе расщепления, вычисляем их новые скорости, сдвигаем частицы в соответствии с новым полем скоростей, вычисляем площади их перекрывания, умножаем их на разности скоростей и эти величины прибавляем (или отнимаем) к импульсам соответствующих частиц. При этом одна частица будет приобретать импульс, а другая терять ровно такой же, в полном соответствии с моделью несжимаемой жидкости и в отличие от сжимаемого газа.

4.4. Рождение — гибель частиц.

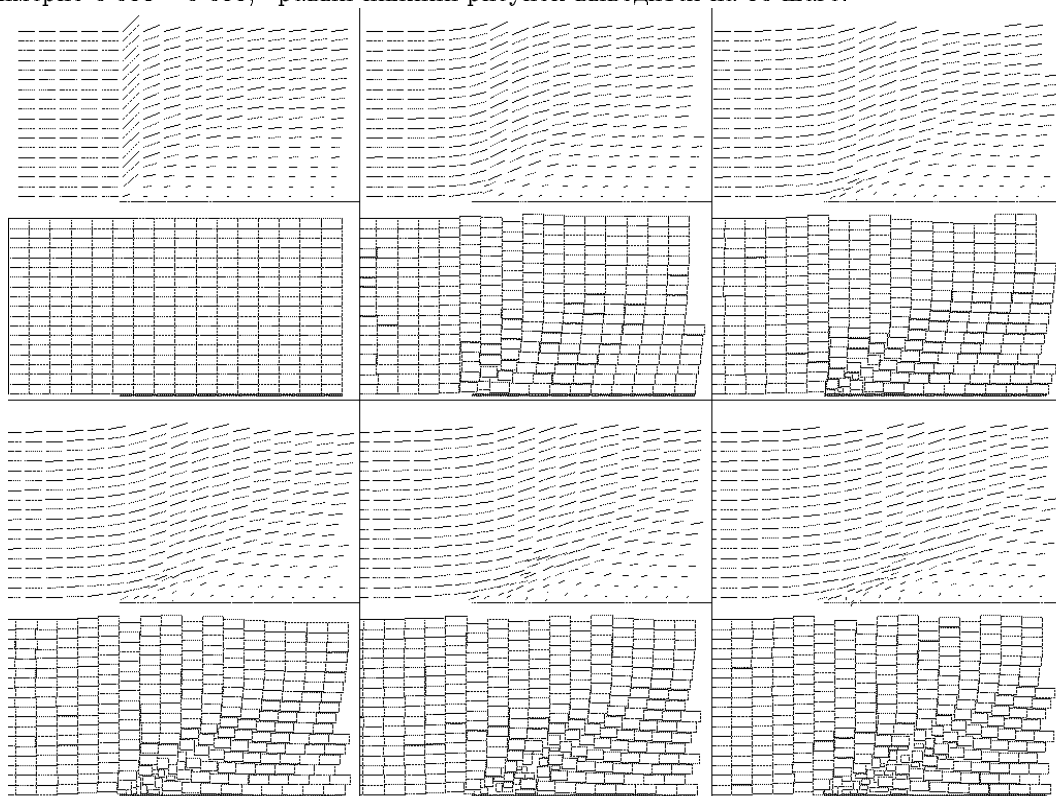
Еще одним отличием задачи Блазиуса от исследованных выше задач газовой динамики является ее сингулярность на носике обтекаемой пластины: продольная компонента скорости резко падает до нуля. С этим не может справиться никакое уменьшение шага по времени. Изменение размеров частиц происходит настолько интенсивно, что приходится включать механизм "рождения — гибели" частиц. Он очень прост идейно, но трудно реализуем программно.

Если ширина частицы по одному из направлений становится меньше предельной, то она должна слиться с частицей, приведшей к такой деформации.

Если частица оказалась изолированной от соседей, но ее расширения не происходит, то пустое пространство между частицами должно быть заполнено новой частицей, импульс которой должен быть изъят из частицы с большей энергией.

Описанные процедуры требуют довольно много операций, поэтому пороги "рождения — гибели" частиц не должны быть низкими.

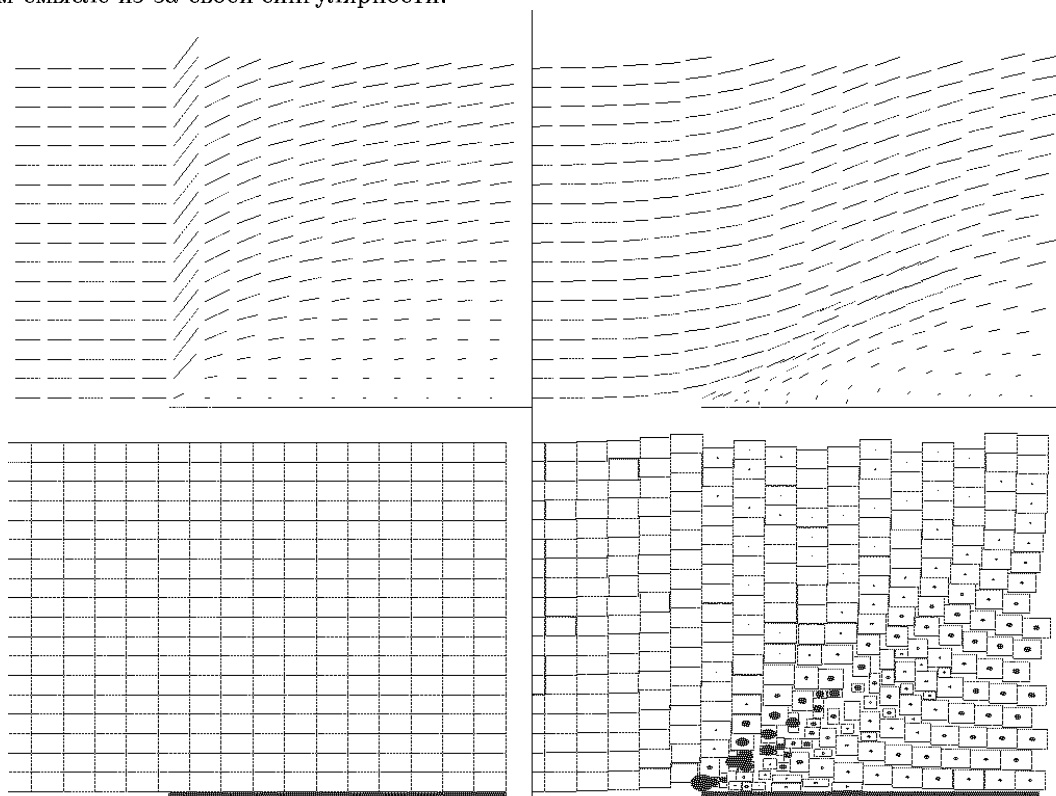
Результаты расчета через промежутки времени примерно равные времени прохода одной частицы на расстояние порядка ее длины приведены на рисунке, представляющего собой копию экрана компьютера. В левом верхнем угле — начало. В верхней части рисунка — поле скорости (стрелки на векторах не нарисованы, чтобы не загромождать рисунок), в нижней — положения и площади частиц-импульсов. Носик пластины находится на расстоянии $1/3$ от левого края области, длина и ширина которой равны 1, $\frac{1}{Re} = 0.05$. Шаг по времени равен 0.003, начальные размеры 288 частиц примерно 0.063×0.056 , правый нижний рисунок выводится на 90 шаге.



Такое представление результатов выбрано нами в силу того, что частицы

располагаются нерегулярным образом, что затрудняет построение графиков.

На следующем рисунке приводится сравнение с точным асимптотическим решением задачи Блазиуса в начальный и конечный моменты времени: чем больше кружки в центрах частиц, тем больше различие между значениями x -компоненты скорости в асимптотическом и численном решениях. Видно, что это различие уменьшается по мере удаления от носика пластины. Ясно также, что указанная задача не является тестовой в полном смысле из-за своей сингулярности.



Этим численным примером мы пытаемся продемонстрировать применимость идей метода частиц для двумерной несжимаемой жидкости. Для изучения реальной точности метода необходимо проведение серии расчетов.

Автор глубоко признателен А.А. Самарскому, А.А. Арсеньеву и Б.Н. Четверушкину за мотивацию к работе, А.П. Фаворскому за критические замечания, а также Л.В. Дородницыну за помощь в сравнении с точным решением задачи Блазиуса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *F.H. Harlow* The Particle - in - Cell Computing Method in Fluid Dynamics // *Methods Comput. Phys.*, 1964, vol.3, p. 319. Имеется перевод: *Ф.К. Хар-*

лоу Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики. - В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха и М Ротенберга. - М.: Мир, 1967, с. 316.

2. *R. W. Hockney, J. W. Eastwood.* Computer simulation using particles. - McGraw-Hill, 1981.

3. *Ю.Н. Григорьев, В.А. Вшивков.* Численные методы "частицы - в - ячейках". - Новосибирск: Наука, 2000.

4. *В.С. Владимиров.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981.

5. *А.Н. Тихонов, А.А. Самарский.* Уравнения математической физики. - М.: Изд - во МГУ, 1999.

6. *А.А. Арсеньев.* Лекции о кинетических уравнениях. - М.: Наука, 1992.

7. *А.В. Скороход.* Стохастические уравнения для сложных систем. - М.: Наука, 1983.

8. *В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Наука, 1985.

9. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona, 11 - 14 September 2000. Book of Abstracts.

10. *А.А. Самарский.* Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989.

11. *В.Я. Гольдин, Н.Н. Калиткин, Т.В. Шишова.* Нелинейные разностные схемы для гиперболических уравнений. // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1965, т.5, No.5, с.938.

12. *Л.И. Седов.* Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1994.

13. *С.В. Богомолов.* Метод частиц с весами для уравнения Бюргерса // Математическое моделирование, 1994, т.6, No.5, с.77.

14. *С.В. Богомолов, А.А. Замараева, Х.Карабелли, К.В. Кузнецов.* Консервативный метод частиц для квазилинейного уравнения переноса. // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1998, т.38, No.9, с.1602.

15. *С.В. Богомолов, К.В. Кузнецов.* Метод частиц для системы уравнений газовой динамики. // Математическое моделирование, 1998, т.10, No.7, с.93.