

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН НА МЕЛКОЙ ВОДЕ МЕТОДОМ ЧАСТИЦ

© С.В.Богомолов, Е.В.Захаров, С.В.Зеркаль

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

С помощью консервативного варианта метода частиц проведен численный анализ моделей течения несжимаемой жидкости в неглубоких каналах. Особое внимание уделено разрывным решениям, моделирующим резкие скачки уровня жидкости. Приведено сравнение с результатами, полученными с помощью разностных схем.

THE SHALLOW WATER WAVE SIMULATING BY PARTICLE METHOD

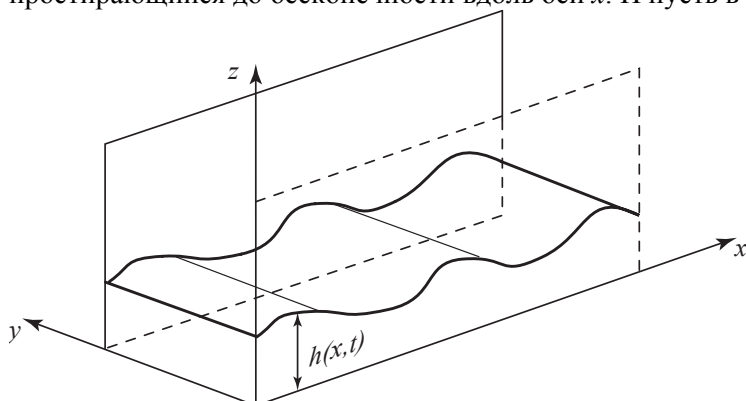
S.V.Bogomolov, E.V.Zakharov, S.V.Zerkal

Moscow State University named by M.Lomonosov

The computational analysis dealing with models of the incompressible fluid flowing into the non-deep channels is presented. It is emphasized on a sudden flood wave in channels. There is a comparison of the numerical results obtained with the difference schemes.

1. Изучение волновых явлений в неглубоких каналах (теория «мелкой воды» [1,2]) представляет значительный практический интерес. Особый интерес для моделирования представляют часто возникающие явления внезапного повышения уровня (так называемый «прыжок воды») [2]. В гидравлике они называются *гидравлическими прыжками* или *борами* [1,3]. При моделировании движения несжимаемой жидкости обычно используется система квазилинейных уравнений гиперболического типа, решения которой, вообще говоря, разрывны (что соответствует в теории мелкой воды «прыжку воды»). Это обстоятельство затрудняет применение разностных схем и накладывает требование к соблюдению консервативности. Вместе с тем в задачах газовой динамики, именно для описания разрывных решений, достаточно эффективным оказался метод частиц [4,5]. Отметим, что система уравнений теории мелкой воды по форме совпадает с системой уравнений газовой динамики (изоэнтропическое течение идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 2$) [1-3]. Поэтому представляется естественным применить метод частиц для исследования моделей теории мелкой воды с целью описания появляющихся там разрывных решений. К такому типу задач можно отнести задачи о разрушении плотины, о распространении бора в покоящуюся воду, задачу о гидравлическом прыжке. В настоящей работе даны постановки соответствующих математических задач для системы квазилинейных уравнений гиперболического типа; построена и реализована вычислительная схема, основанная на консервативном варианте метода частиц [4]; проведено сравнение численных решений с решениями, построенными в [1] методом характеристик.

2. Пусть имеется канал постоянного поперечного сечения (рис. 1) с постоянным наклоном дна, простирающийся до бесконечности вдоль оси x . И пусть в данном канале в поле силы тяжести течет



несжимаемая жидкость. Предполагается, что жидкость лишена внутреннего трения, трения о стенки и дно канала, а уровень жидкости над дном канала h является малой величиной по сравнению с характерными размерами течения, размерами неровностей дна и т.п. Будем считать, что течение жидкости характеризуется одной пространственной переменной x и зави-

Рис. 1. Канал постоянного поперечного сечения.

сит от времени t . Тем самым считается, что скорость жидкости u имеет отличную от нуля компоненту u_x (которую будем обозначать u), а остальными компонентами можно пренебречь; кроме того, считается, что уровень h зависит также лишь от x и t .

Система уравнений, описывающая течение жидкости в канале, имеет вид [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} = -\frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} \end{array} \right. \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (1)$$

Для системы уравнений (1) ставится задача с начальными условиями вида:

$$\left. \begin{array}{l} u(x, t) \Big|_{t=0} = u^0(x), \\ h(x, t) \Big|_{t=0} = h^0(x), \end{array} \right. \quad -\infty < x < \infty \quad (2)$$

где $u^0(x)$, $h^0(x)$ – заданные функции. Далее будет рассмотрен ряд моделей теории мелкой воды, для которых начальные условия $\{u^0, h^0\}$ будут кусочно-постоянными функциями (либо одна из них, либо обе одновременно).

В [1] методом характеристик построено решение системы (1) (при $t > 0$) и на этой основе дана качественная физическая интерпретация эволюции течения жидкости. Кратко она состоит в следующем. Пусть в некоторой точке $x = x_l$ задано возмущение, такое что, либо скорость u , либо возвышение свободной поверхности h изменяется определенным образом во времени. При этом имеется существенное различие между распространением возмущения, которое вызывается монотонным *понижением* свободной поверхности в точке $x = x_l$, и возмущения, возникающего при *повышении* свободной поверхности в этой точке. В первом случае (при распространении понижения в покоящуюся воду) течение непрерывно всюду. Во втором случае течение будет непрерывным лишь до определенного момента времени, после чего образуются скачки, которые можно интерпретировать как развитие боров и бурунов в воде.

Отметим, что в газовой динамике имеются ситуации, аналогичные этим двум случаям: рассмотрим длинную трубу, наполненную покоящимся газом и закрытую с одной стороны поршнем. Если поршень выдвигается из газа так, что в покоящийся газ распространяется волна разрежения, то возникающее движение будет непрерывным. Однако, если поршень вдвигается в газ так что образуется волна сжатия, то она всегда превращается в ударную волну. Указанная аналогия позволяет в теории мелкой воды ввести понятие волновой скорости $c = \sqrt{gh}$, которой соответствует понятие скорости звука в газовой динамике.

3. В данной работе для численного решения задачи (1)-(2) применена модификация метода частиц, основанная на консервативной обработке частиц [4,5]. Следуя [4], будем в начале рассматривать квазилинейные уравнения переноса, записав их в виде одного уравнения для функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$ (обозначающей либо h , либо hu):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

В силу того, что начальные функции (2) могут не обладать достаточной гладкостью, решение (3) будем искать в классе обобщенных функций и перейдем от дифференциального уравнения (3) к интегральному соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int v \varphi dx - \int uv \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = 0, \quad (4)$$

где $\varphi(x)$ – произвольная достаточно гладкая финитная функция, а $v(x, t)$ – является обобщенным решением уравнения (4) (в классе обобщенных функций).

Аппроксимируем $v(x, t)$ функциями $v_N(x, t)$, определяемыми как конечная сумма δ -функций Дирака,:

$$v_N(x, t) = \sum_{i=1}^N c_i \delta(x - x_i(t)), \quad (5)$$

где c_i - веса, $x_i(t)$ - координаты частиц. Подставив в (4) вместо функции $v(x, t)$ ее представление (5),

получим соотношение:

$$\sum_{i=1}^N c_i \frac{\partial \varphi(x_i(t))}{\partial x} \left(\frac{dx_i(t)}{dt} - u(x_i(t), t) \right) = 0. \quad (6)$$

Так как (6) справедливо для любой финитной функции $\varphi(x)$, тогда траектории частиц $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$), должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = u(x_i(t), t), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

Таким образом, если координаты частиц $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$), изменяются в соответствии с (7), автоматически выполняется уравнение (4), а $v(x, t)$ будет обобщенным (слабым) решением задачи (3).

Для построения численного алгоритма аппроксимируем δ -функции классическими функциями-«шапочками» $w^{(k)}(x)$, где $w^{(k)}(x)$ – неотрицательные финитные функции, а номер k определяет выбор функции в соответствующей последовательности $w^{(1)}(x), w^{(2)}(x), \dots$. Естественно,

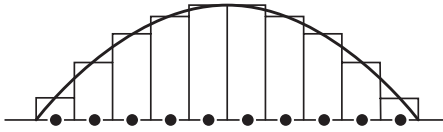


Рис.2. Аппроксимация частицами-прямоугольниками произвольной параболы. Точками обозначены центры частиц.

что возникает вопрос выбора конкретного вида функций $w^{(k)}(x)$. При моделировании разрывных решений в качестве $w^{(k)}(x)$ удобно выбирать кусочно-постоянные функции (прямоугольники). При этом оптимальной будет аппроксимация, при которой частицы соприкасаются друг с другом (рис.2.) [4,5].

Для решения задачи (1)-(2) используется схема

расщепления, вводятся два набора частиц с координатами $\{\xi_i(t), i = 1..N\}$ и $\{\eta_j(t), j = 1..M\}$ (для плотности массы h и плотности импульса hu , соответственно). После чего решение задачи (1)-(2) сводится к последовательному решению уравнений:

$$1. \frac{d\xi_i(t)}{dt} = u(\xi_i(t), t), \quad i = 1..N \quad (8.1)$$

$$2. \frac{d\eta_j(t)}{dt} = u(\eta_j(t), t), \quad j = 1..M \quad (8.2)$$

$$3. \left(\frac{\partial hu}{\partial t} \right)_j = \left(-\frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} \right)_j, \quad j = 1..M. \quad (8.3)$$

Необходимо отметить, что порядок, в котором решаются уравнения (8), может быть различным. Так в [4] уравнения решаются в следующей последовательности: (8.2), (8.3), (8.1); в [5] – (8.1), (8.3), (8.2). Кроме того, если в начальный момент времени координаты ξ_i ($i = 1..N$) и η_j ($j = 1..M$) совпадают, то в последующие моменты это, как правило, не так (вследствие того, что скорости в правых частях (8.1), (8.2) будут различными [5]).

В настоящей работе применен алгоритм, который сохраняет совпадение координат частиц в (8.1), (8.2), что приводит к решению последовательности уравнений:

$$1. \frac{dx_i(t)}{dt} = u(x_i(t), t), \quad i = 1..N \quad (9.1)$$

$$2. \left(\frac{\partial hu}{\partial t} \right)_i = \left(-\frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} \right)_i, \quad i = 1..N. \quad (9.2)$$

Кратко алгоритм решения состоит в следующем:

1) решается уравнение (9.1) по схеме Эйлера:

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \tau u_i^n, \quad i = 1..N;$$

2) с целью выполнения условия соприкасаемости производится перестройка частиц, аппроксимирующих искомые функции (плотности массы h и плотности импульса hu) с сохранением их масс. Это приводит к изменению параметров частиц (размеров прямоугольников при постоянной площади);

- 3) вычисление новых значений масс частиц, аппроксимирующих плотность импульса (решение уравнения (9.2), производится по схеме, приведенной в [4]);
- 4) вычисление нового поля скоростей (искомой функции u).

Как видно, данный алгоритм реализации

метода частиц содержит способ их перестройки (пункт 2). Для этого предлагается следующая процедура перестройки частиц, основанная на их попарном взаимодействии (рис.3):

- a) при «наползании» частиц будет перестраиваться частица с меньшей плотностью массы;
- b) при «разлете» частиц перестраиваться будет частица, у которой скорость больше.

Отметим, что в ходе применения этой процедуры в задачах о распространении ударной волны может возникнуть ситуация, при которой плотность массы перестроенной частицы может превысить ту, которая привела к этой перестройке (рис.4, a-b), что противоречит законам сохранения и приводит к нефизичным осцилляциям численного решения. Эта проблема характерна и для разностных методов газовой динамики. Поэтому в настоящей работе в силу принципа сохранения симметрии частиц при перестройке таких частиц изменяется и их положение (рис.4, c).

Предложенный алгоритм был реализован и опробован на ряде моделей теории мелкой воды. Некоторые результаты проведенных вычислительных экспериментов приведены в следующих разделах работы.

4. Задача о разрушении плотины. Рассмотрим горизонтальный канал постоянного поперечного сечения, простирающийся до бесконечности в обе стороны, который имеет тонкую перегородку в сечении $x = x_1$ (рис.5). При $x < x_1$ вода имеет глубину h_1 , а при $x > x_1$ – глубину h_0 ,

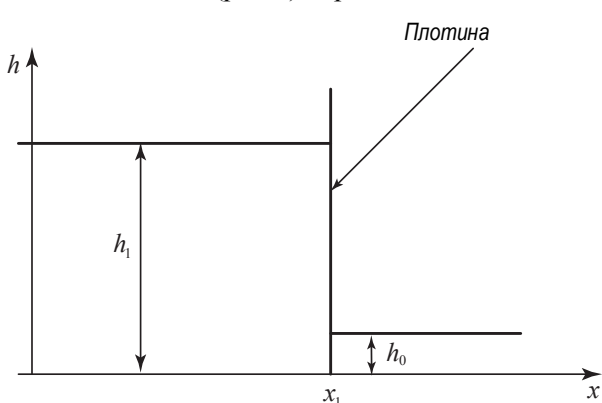


Рис. 5. Задача о разрушении плотины.

В этом разделе будем рассматривать частный случай $h_0 = 0$.

Численное решение задачи о разрушении плотины, полученное методом частиц, представлено

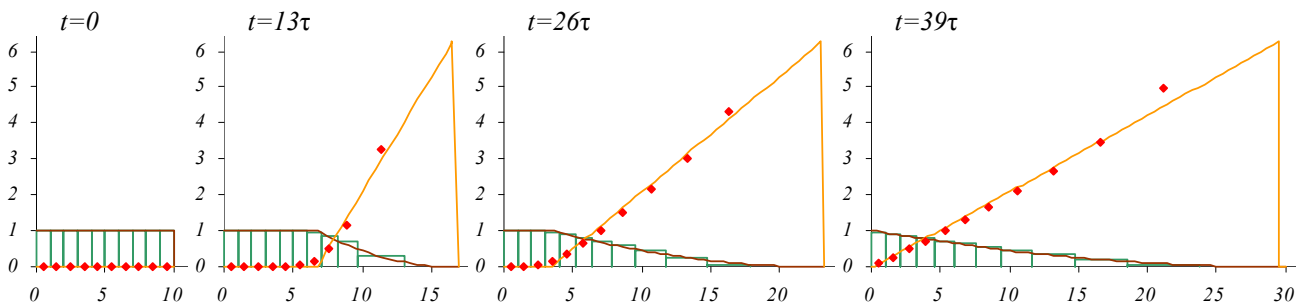


Рис. 6. Решение задачи о прорыве плотины при $h_0 = 0$. Плотина находится в точке $x = 10$.

на рис.6. Точками на графиках изображены значения скоростей частиц u , прямоугольниками – частицы, отвечающие за уровень жидкости h . Сплошные линии на графиках рис.6 – решение, полученное в [1]. Плотина находится в точке с координатой $x = 10$. Число частиц $N = 10$, т.е. расстояние между час-

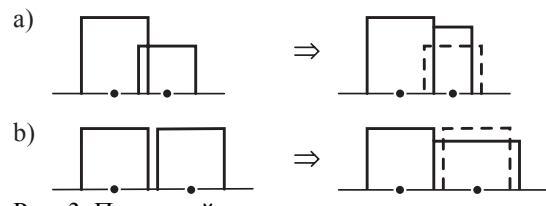


Рис. 3. Перестройка частиц.

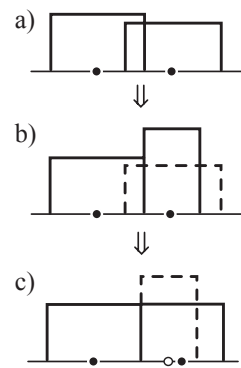


Рис. 4. Изменение положения частицы при перестройке.

$$\begin{cases} u(x, t)|_{t=0} = u_0 = 0 & -\infty < x < \infty \\ h(x, t)|_{t=0} = \begin{cases} h_1, & x \leq x_1 \\ h_0, & x \geq x_1 \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

$$h_1 > h_0 \geq 0.$$

тицами в начальный момент времени равно 1. На графике показано решение с шагом $\tau = 0.08$ для шагов $-0; 13, 26; 39$.

Как видно из начального условия (10) функция $h(x)$ в точке $x = x_1$ терпит разрыв. При $t > 0$ этот разрыв мгновенно сглаживается, а поверхность части жидкости, находящейся в движении, принимает форму параболы (рис.7), касающейся оси x (т.е. дна) в точке $x = x_1 + 2c_1t$. Указанная парабола проходит от фронта волны до точки $x = x_1 - c_1t$, после которой поверхность жидкости становится горизонтальной ($c_1 = \sqrt{gh_1}$ – волновая скорость в жидкости глубины h_1).

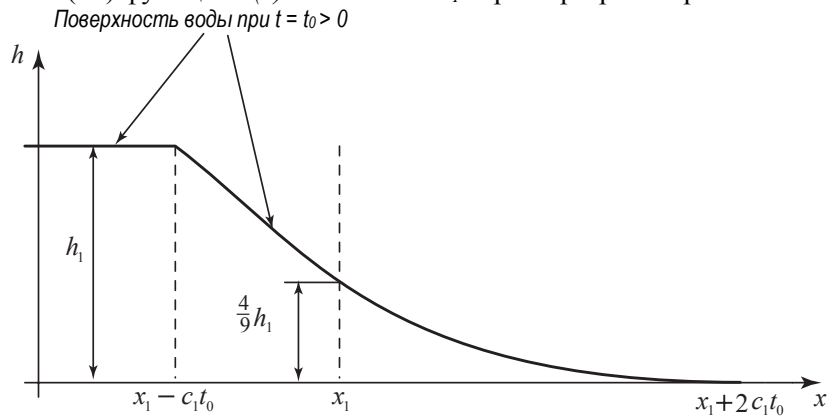


Рис. 7. Решение задачи о разрушение плотины при $h_0 = 0$.

Интересно отметить некоторые особенности процесса в случае $h_0 = 0$. На рис.8 представлен уровень жидкости h в зависимости от x для различных моментов времени. Как видно из рисунка расход воды в створе плотины постоянен в силу постоянства глубины и скорости в этой точке.

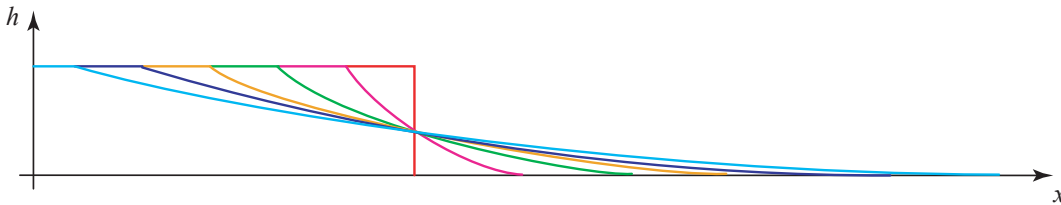


Рис. 8. Уровень воды выше и ниже плотины для различных моментов времени в случае $h_0 = 0$.

Эта особенность процесса разрушения плотины была отмечена в [1] и подтверждена при численном решении задачи методом частиц. При этом высота свободной поверхности непрерывна всюду и монотонно возрастает при движении от фронта потока влево, а скорость частиц воды падает по абсолютной величине. Это тот случай, когда поршень, находящийся в точке x_1 , начинает двигаться вправо. Ускорение поршня предполагается бесконечным, так что его скорость внезапно меняется от нуля до постоянного конечного значения, при котором происходит отрыв поршня от воды и последующее движение поршня не оказывает влияния на движение воды.

5. Задача о распространении бора. Рассмотрим следующую задачу: поршень, расположенный в левом конце канала, наполненного покоящейся водой, внезапно начинает вдвигаться в воду с постоянной скоростью w (рис.9). Так как поршень движется с постоянной скоростью, то возникающее движение будет ударной волной, распространяющейся в покоящуюся воду и оставляющей за собой зону постоянного состояния (т.е. $u \equiv const, h \equiv const$), в которой жидкость движется со скоростью поршня w . Этот случай соответствует случаю распространения бора в покоящуюся воду.

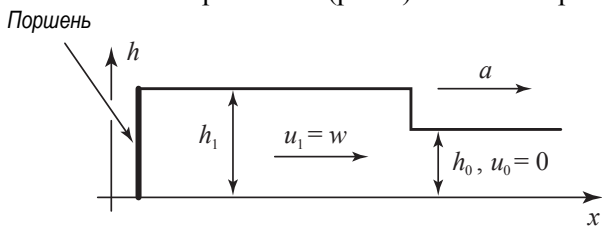


Рис. 9. Поршень, вдвигающийся с постоянной скоростью w в покоящуюся воду.

Данную задачу описывает система уравнений (1) с начальными условиями (рис.10):

$$\begin{cases} u(x, t)|_{t=0} = \begin{cases} u_1 > 0 & x \leq x_1 \\ u_0 = 0 & x \geq x_1 \end{cases} \\ h(x, t)|_{t=0} = \begin{cases} h_1, & x \leq x_1 \\ h_0, & x \geq x_1 \end{cases} \\ h_1 > h_0 > 0, \end{cases}$$

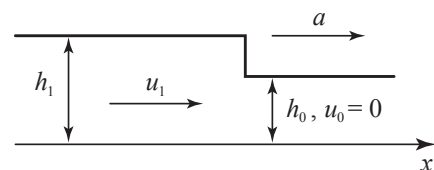


Рис. 10. Бор, распространяющийся в покоящуюся воду.

где u_1 определяется из условий на разрыве:

$$\begin{cases} h_1(u_1 - a) = h_0(u_0 - a) \equiv m \\ m(u_1 - u_0) = \frac{g}{2}(h_0^2 - h_1^2) \end{cases} \quad (11)$$

здесь a – скорость распространения разрыва, m – поток массы через фронт разрыва. Следовательно, $u(x,t)$, $h(x,t)$ могут быть представлены в виде [1]:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1 = a \left(1 - \frac{h_0}{h_1} \right), & x \leq (x_1 + at) \\ u_0 = 0, & x \geq (x_1 + at) \end{cases} \quad \forall t \geq 0,$$

$$h(x,t) = \begin{cases} h_1, & x \leq (x_1 + at) \\ h_0, & x \geq (x_1 + at) \end{cases}$$

где $a = \sqrt{g \frac{h_1}{h_0} \left(\frac{h_1 + h_0}{2} \right)}$.

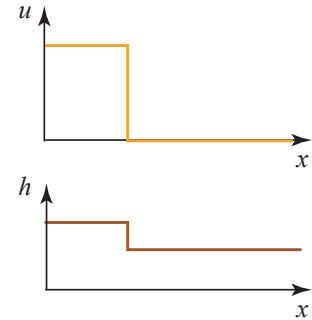


Рис. 11. Общий вид функций $u(x,t)$, $h(x,t) \forall t \geq 0$.

Графики функций $u(x,t)$, $h(x,t)$ для любого момента времени $t \geq 0$ приведены на рис.11.

На рис.12 приведены некоторые результаты расчетов задачи о распространении бора в покоящуюся жидкость в различные моменты времени. Наиболее интересным моментом численного решения является часть расчетной области, содержащая прыжок воды h , которая и приведена на графиках. Частицы, отвечающие за уровень жидкости h , изображены на графиках прямоугольниками, значения скоростей частиц u – точками, штрихом отмечено положение фронта прыжка воды.

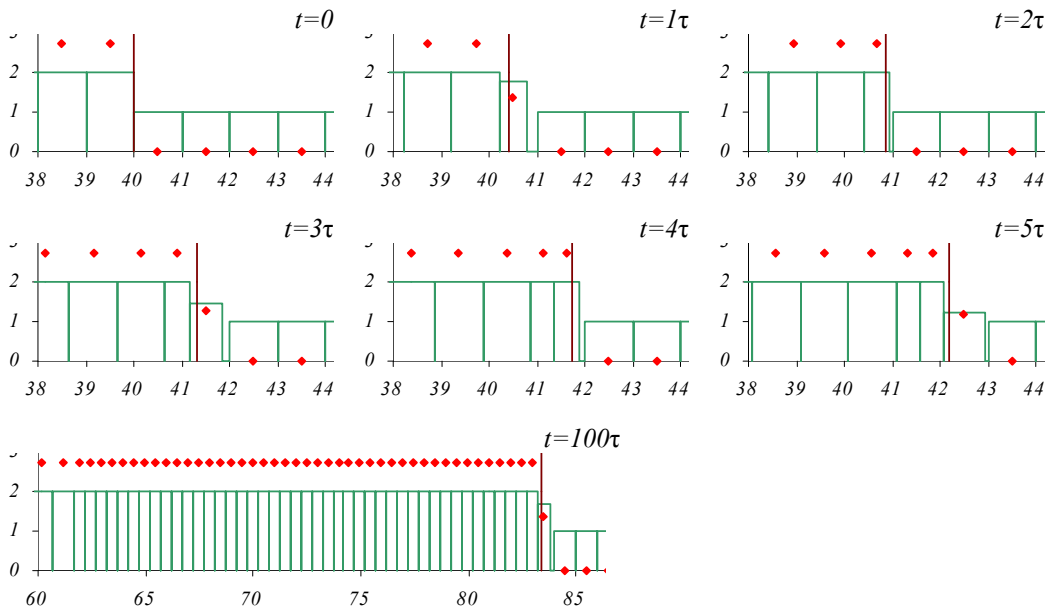


Рис. 12. Задача о распространении бора.

При проведении расчетов был выбран отрезок по оси x от 0 до 120. В начальный момент расстояние между частицами равно 1 (число частиц $N = 120$), шаг по времени $\tau = 0.08$. Высота бора и покоящейся жидкости перед ним равны 2 и 1 соответственно. В начальный момент бор находится в точке $x = 40$ и затем движется со скоростью $a = 5.4$ вправо. Скорость движения жидкости за разрывом $u_1 = 2.7$. Отметим, что максимальная погрешность вычислительного процесса возникает в зоне скачка уровня. При этом разрыв в решении последовательно передается от одной частицы к другой, т.е. «размазывания» скачка не происходит.

Далее будет рассмотрена несколько иная задача об отражении бора от твердой стенки. Пусть в точке с координатой x_2 расположена твердая стенка, перед которой находится покоящаяся жидкость глубины h_0 . Слева по направлению к стенке со скоростью a_+ движется бор, высота которого равна h_1 . Скорость жидкости за разрывом равна $u_1 > 0$. Ударная волна отражается от стенки, оставляя за собой

покоющуюся воду глубины h_2 . Известно, что $h_2 > h_1 > h_0 > 0$ и значение h_2 определяется в ходе численного решения (рис. 13).

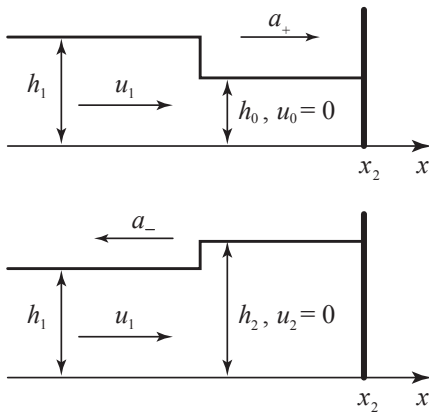


Рис. 13. Задача об отражении бора от твердой стенки.

Для решения поставленной задачи рассмотрим систему (1) с начальными условиями следующего вида:

$$u(x,t)|_{t=0} = \begin{cases} u_1 > 0 & x \leq x_1 \\ u_0 = 0 & x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

$$h(x,t)|_{t=0} = \begin{cases} h_1, & x \leq x_1 \\ h_0, & x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

$$h_1 > h_0 > 0,$$

где x_1 – координата скачка уровня жидкости в начальный момент времени, величина h_0 определяется из условия на разрыве (11). В качестве краевого условия ставится условие непроницаемости жидкости сквозь стенку:

$$u(x,t)|_{x=x_2} = 0 \quad \forall t \geq 0,$$

где x_2 – координата точки, в которой расположена твердая стенка. Задача решается в области $\{(x,t): t \geq 0, x \leq x_2\}$.

Соответствующие графики функций $u(x,t)$, $h(x,t)$ для любого момента времени $t \geq 0$ изображены на рис. 14.

На рис. 15 приведены результаты расчетов задачи об отражении бора от твердой стенки в различные моменты времени для 10 частиц ($N = 10$) с шагом по времени $\tau = 0.02$. Частицы, отвечающие за уровень жидкости h , изображены на графиках прямоугольниками, значения скоростей частиц u – точками, штрихом отмечено

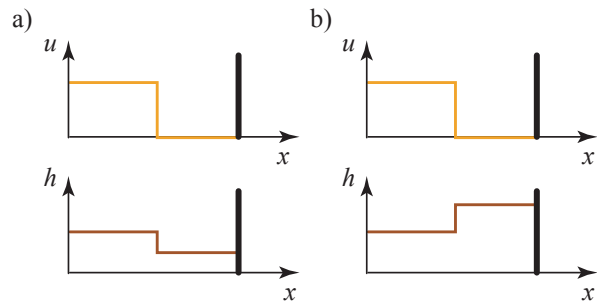


Рис. 14. Общий вид функций $u(x,t)$, $h(x,t) \forall t \geq 0$. до (a) и после (b) отражения от твердой стенки.

положение фронта прыжка воды.

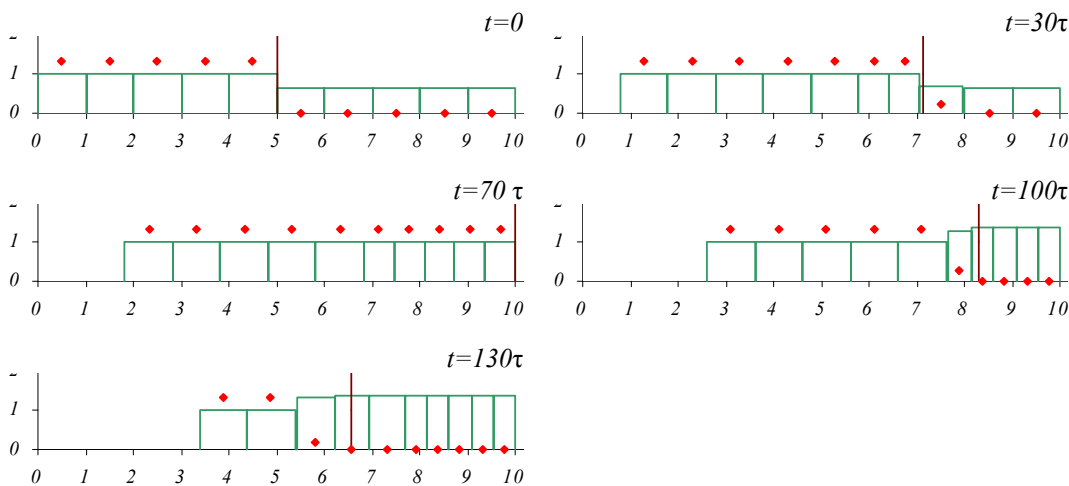
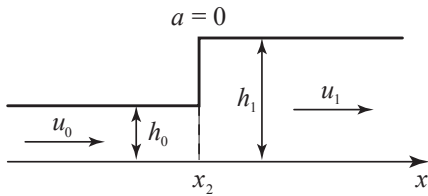


Рис. 15. Численное решение задачи об отражение бора от твердой стенки.

Стенка находится в точке с координатой $x = 10$. В начальный момент расстояние между частицами равно 1. Высота бора $h_1 = 1$, скорость жидкости за разрывом равна $u_1 = 1.3$. Высота покоящейся жидкости перед ним равна $h_0 = 0.63$. После отражения высота бора возрастает до $h_2 = 1.36$ (значение h_2 , полученное из условия на разрыве (11), равно 1.45). Скорости распространения бора равны соответственно $a_+ = 3.55$, $a_- = -2.88$.

6. Задача о гидравлическом прыжке. Если в задаче о движении бора (рис.9) сообщим



постоянную отрицательную скорость a воде (a – скорость распространения разрыва), то получим гидравлический прыжок, в котором ударный фронт неподвижен (рис.16).

При описании гидравлического прыжка будем рассматривать систему уравнений (1) с начальными условиями следующего вида:

Рис. 16. Гидравлический прыжок.

$$\begin{cases} u(x,t)|_{t=0} = \begin{cases} u_0 & x \leq x_1 \\ u_1 & x \geq x_1 \end{cases} \\ h(x,t)|_{t=0} = \begin{cases} h_0, & x \leq x_1 \\ h_1, & x \geq x_1 \end{cases} \end{cases}$$

$$h_1 > h_0 > 0; \quad u_0 > u_1 > 0,$$

где h_0, h_1 – заданные константы, u_0 и u_1 определяются из условий на разрыве (11).

При этом в отличие от задачи о распространении бора в данном случае в силу неподвижности ударного фронта функции u и h будут

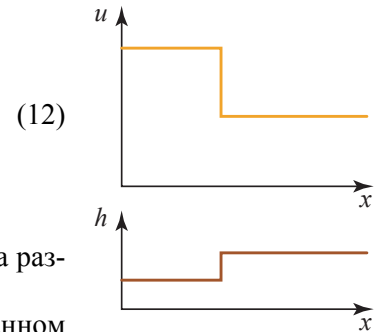


Рис. 17. Общий вид функций $u(x,t), h(x,t) \forall t \geq 0$.

кусочно-постоянными по x и независимыми от времени. Это означает, что на рис.17 описан процесс во все моменты времени.

На рис.18 изображено численное решение рассматриваемой задачи (1),(12) в различные моменты времени. Прямоугольниками на графиках изображены частицы, соответствующие уровню жидкости – h , точками – значения скоростей частиц u , штрихом отмечено положение прыжка воды.

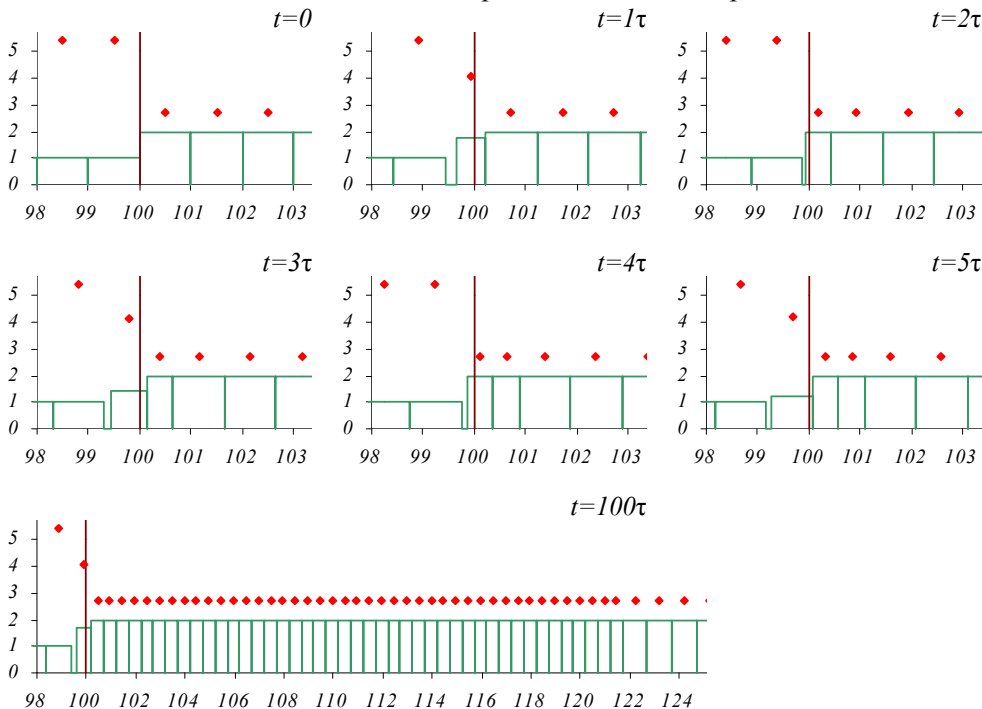


Рис. 18. Гидравлический прыжок.

При расчетах выбран отрезок по оси x от 0 до 105. Точка гидравлического прыжка равна $x = 100$. На рис.18 приведены фрагменты расчетной области, содержащей скачок уровня. В начальный момент времени расстояние между частицами равно 1 (число частиц $N = 105$), шаг по времени $\tau = 0.08$. Высота жидкости до и после прыжка равны 1 и 2 соответственно, скорость жидкости до и после прыжка – 5.4, 2.7. Из графиков видно, что, как и в случае распространения бора, разрыв в решении последовательно передается от одной частицы к другой.

7. Задача о разрушении плотины, $h_0 > 0$. Обратимся вновь к задаче (1),(6) о разрушении плотины и рассмотрим случай $h_0 > 0$.

Прежде чем переходить к описанию численных результатов отметим следующее. Если $h_0 \neq 0$, то можно ожидать, следуя [1], что ниже по течению образуется ударная волна, так как вода,

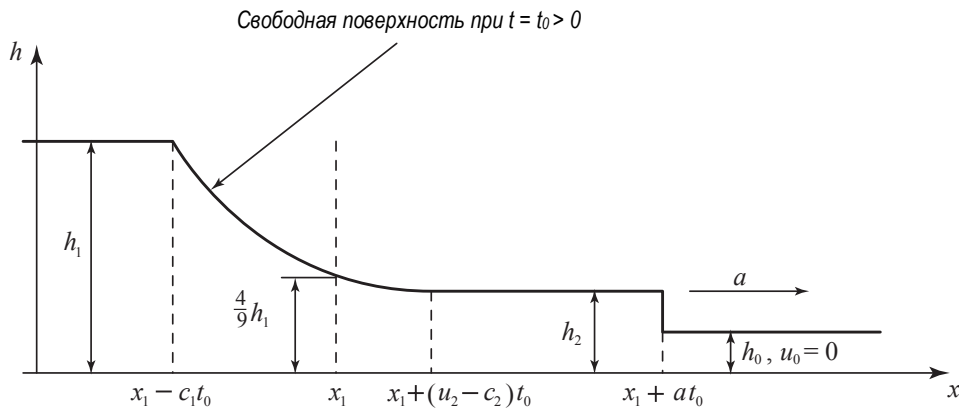


Рис. 19. Решение задачи о разрушении плотины в случае $h_1 > h_0 > 0$.

хлынувшая сверху, действует аналогично поршню, вдвигающемуся с ускорением в воду, а ударная волна должна возникнуть сразу за точкой $x = x_1$. Предположим, что ударная волна затем движется с постоянной скоростью a вниз по течению и непосредственно за скачком параметры течения будут постоянными ($h_2 = const, u_2 = const$) (рис.19). В следующей области $\{(x,t): t > 0, (x_1 - c_1 t) \leq x \leq (x_1 + (u_2 - c_2) t)\}$ движение определяется точно также как и в случае $h_0 = 0$, т.е. поверхность имеет форму параболы. В местах соединения с соседними областями парабола не имеет горизонтальной касательной, так что наклон поверхности жидкости в этих точках

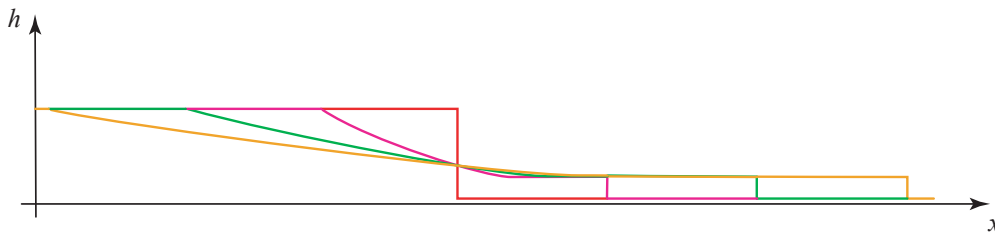


Рис. 20. Уровень воды выше и ниже плотины для различных моментов времени при $h_0/h_1 < 0.1384$.

терпит разрыв. Следует сказать, что отношение h_0/h_1 имеет критическое значение, равное 0.1384. Если глубина ниже плотины составляет менее 13.8% глубины воды по другую сторону, то расход воды в створе плотины после ее разрушения не зависит ни от первоначальной глубины воды ниже плотины h_0 , ни от времени t (рис.20). Однако, если отношение h_0/h_1 превосходит критическое значение 0.1384, то глубина, скорость и количество протекающей воды зависят от h_0 , хотя они продолжают оставаться независимыми от времени, т.к. сечение $x = x_1$ при этих условиях остается в области постоянного течения (рис.21).

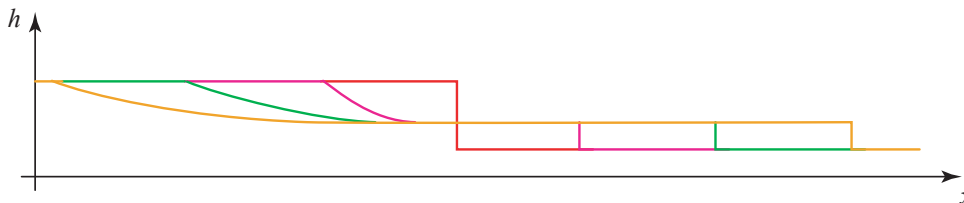


Рис. 21. Уровень воды выше и ниже плотины для различных моментов времени при $h_0/h_1 > 0.1384$.

Далее на рис.22 и 23 приведены результаты численного решения рассматриваемой задачи для обоих случаев: когда отношение h_0/h_1 равно 0.1 и 0.5, соответственно. Так же как и ранее точками на графиках изображены значения скоростей частиц u , прямоугольниками – частицы, отвечающие за уровень жидкости h . Сплошные линии – это решение, полученное в [1]. Плотина находится в точке с

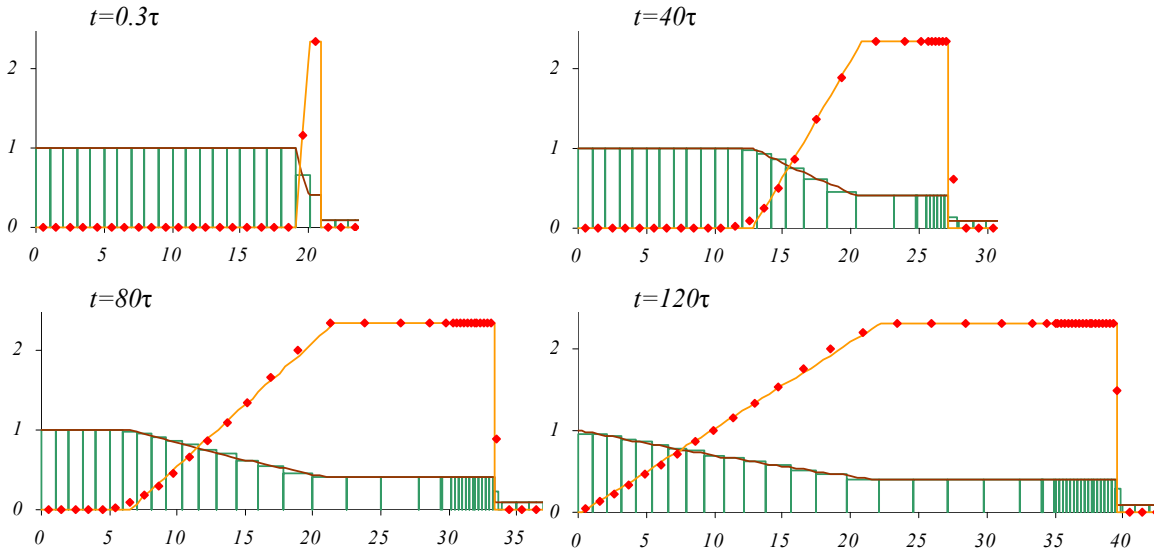


Рис. 22. Решение задачи о прорыве плотины при $h_0/h_1 = 0.1$. Плотина находится в точке $x = 20$.

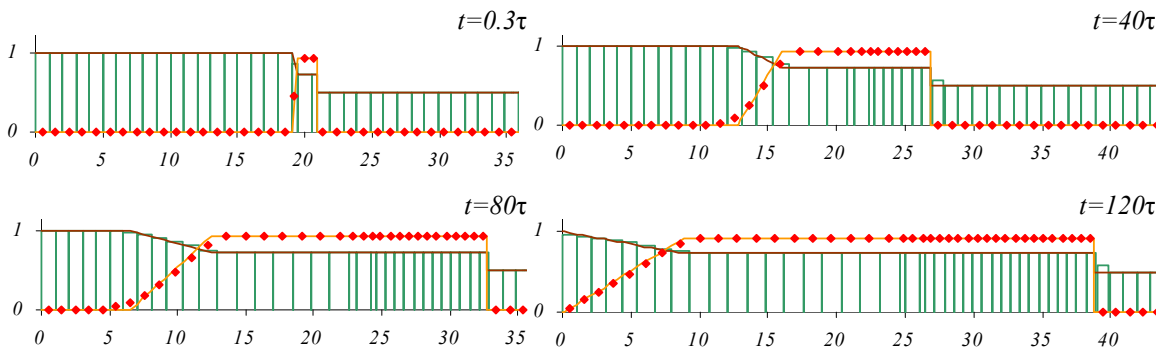


Рис. 23. Решение задачи о прорыве плотины при $h_0/h_1 = 0.5$. Плотина находится в точке $x = 20$.

координатой $x = 20$. На графиках представлено решение с шагом $\tau = 0.05$ для шагов 0.3; 40; 80; 120. В левом верхнем углу каждого рисунка показано стартовое распределение частиц.

8. В заключение в качестве иллюстрации приведем некоторые результаты расчетов для задачи о разрушении плотины в случае, когда уровень воды ниже плотины отличен от нуля, полученных с помощью различных разностных схем: схема Лакса-Фридрихса, схема Мак-Кормака, схема «вверх по потоку» (first order upwind scheme). Соответствующие численные решения с использованием разностных методов были получены в [6] и изображены на рис.24. На графиках приведено решение $-h(x)$ – в момент времени $t = 25s$. Пунктиром отмечено решение, полученное в [1], сплошной линией – численное решение. Приведенные результаты соответствуют следующим начальным условиям: плотина находится

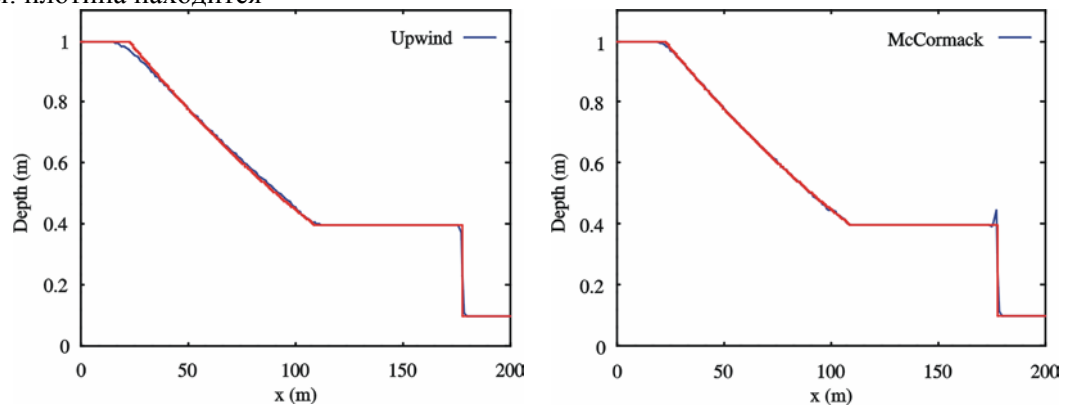


Рис. 24. Решение задачи о прорыве плотины [6].

в точке с координатой $x = 100m$; отношение $h_0/h_1 = 0.1$; шаг сетки – $\Delta x = 1m$; коэффициент искусственной вязкости в схеме Лакса-Фридрихса равен 0.9. Заметим также, что приведенные для схемы Мак-Кормака и схемы «вверх по потоку» результаты были получены с помощью методики коррекции энтропии.

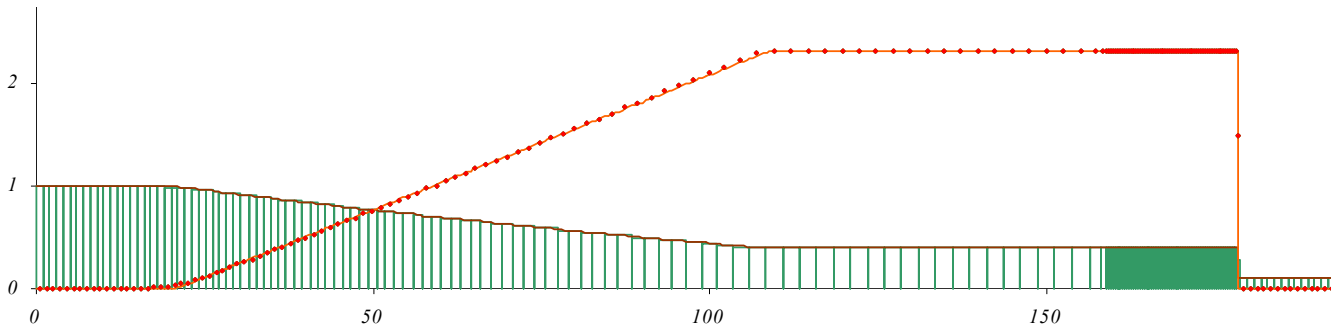


Рис. 25. Решение задачи о прорыве плотины. Число частиц $N = 200$.

Для сравнения на рис.25 показано решение, полученное методом частиц при тех же исходных данных, $t = 25.3s$, шаг по времени $\tau = 0.05$. Число частиц $N = 200$. На рис.25 изображены обе искомые функции – u и h . Стремление показать особенности решения методом частиц привело к некоторому несоответствию масштаба рис.24 и рис.25.

На рис.26 для этой же задачи (рис.24, рис.25) приведены графики функций u и h в момент времени $t = 25$ для меньшего числа частиц: $N = 22$ (ширина частицы или шаг сетки равен $\Delta x = 10$). Шаг по времени – $\tau = 0.1$.

Сравнение результатов рис.25 и рис.26 показывает, что даже при малом числе частиц решение, полученное этим методом, близко к решению, полученному в [1], (сплошные линии на рисунке).

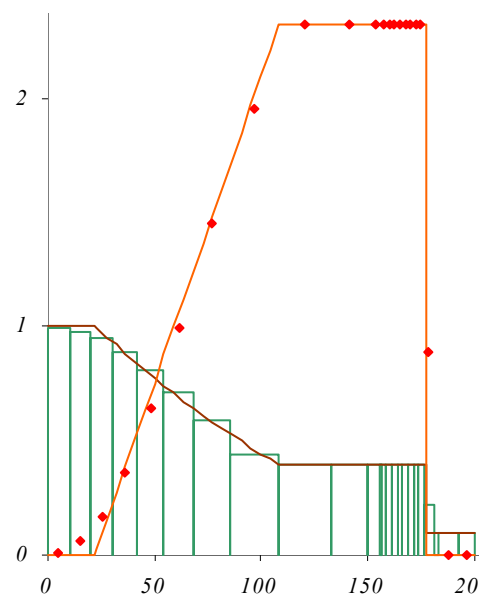


Рис. 26. Решение задачи о прорыве плотины. Число частиц $N = 22$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стокер Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. – М.: Изд. иностр. литературы, 1959. – 617 с.
2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 688 с.
3. Эглит М.Э. Неустойчивые движения в руслах и на склонах. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 96 с.
4. Богомолов С.В., Замараева А.А., Карабелли Х., Кузнецов К.В. Консервативный метод частиц для квазилинейного уравнения переноса//Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38. – № 9. – С. 1602-1607
5. Богомолов С.В., Кузнецов К.В. Метод частиц для системы уравнений газовой динамики//Математическое моделирование. – 1998. – Т. 10. – № 7. – С. 93-100
6. Burguete J., Navarro P.G. An Upwind Conservative Treatment of Source Terms in Shallow Water Equations//CD-ROM Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering "ECCOMAS 2000". – Barcelona, 11-14 September 2000. – 17 p.